现代数学译丛 20

金融衍生产品的数学模型

郭宇权（Yue-Kuen Kwok） 著

张寄洲　边保军　徐承龙 等　译



科学出版社

(O-4670.0101)





定 价：98.00 元

科学出版中心　数理分社
电话：(010)64033664
E-mail: math-phy@mail.sciencep.com
网址：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

现代数学译丛　20

金融衍生产品的数学模型

郭宇权（Yue-Kuen Kwok）　著

张寄洲　边保军　徐承龙 等　译

图字：01-2010-2338 号

内 容 简 介

本书是一本关于利用金融工程方法对衍生产品建立模型的理论教科书，主要内容是关于大多数衍生证券都共同适用的鞅定价原理. 仔细分析通常在公平和有固定收益市场交易的金融衍生产品所涉及的广泛内容，主要集中在定价、对冲及其风险管理等几个方面. 从著名的 Black-Scholes-Merton 期权定价模型开始，读者通过本书可以看到关于最丰富的衍生产品定价模型和利率模型的新进展. 书中重点介绍了求解不同类型衍生产品定价模型的解析技巧和数值方法.

第二版对第一版进行了大量的修订. 在离散时间的框架内，通过对基本金融经济学原理的分析，使连续时间鞅定价理论变得更生动. 书中给出了大量的新型权益和有固定收益的衍生证券的闭式定价公式. 在每章的后面通过习题的方式把许多最近的研究成果和方法呈现给读者.

郭宇权是香港科技大学的数学教授. 他发表了 80 多篇学术论文，出版了几本专著，包括《应用复变函数论》. 同时，他是学术杂志《经济动力学和控制》和《亚太金融市场》的副主编.

图书在版编目（CIP）数据

金融衍生产品的数学模型/郭宇权著；张寄洲等译. —北京：科学出版社，2012

（现代数学译丛）

ISBN 978-7-03-033705-4

I. ①金… II. ①郭… ②张… III. ①金融衍生产品-数学模型-研究 IV. ①F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 037047 号

责任编辑：王丽平 房 阳／责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 4 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2012 年 4 月第一次印刷 印张：31 3/4
字数：616 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

中文版前言

随着金融市场日益趋向全球化, 金融衍生工具产品在中国金融市场上的使用将有长足的发展. 通过对衍生工具定价模型的叙述和对各类衍生产品的使用, 以及相关风险对冲手段的介绍, 相信本书能为中国的金融数学专业的学生以及金融衍生工具业界人士提供最前沿的知识. 在此, 特别衷心感谢张寄洲教授、边保军教授和徐承龙教授的专业及辛勤的翻译工作, 他们的译作可以帮助中文读者了解国际学术界在衍生工具定价理论方面的新发展. 在翻译过程中, 三位教授花了大量的精力, 反复推敲在新型衍生工具方面最切合原意的中文专用名词, 他们的译作水平达到 “信达雅” 的高度. 个人专业著作能被翻译成另一语言来发表, 作者自会感到无限的光荣. 我个人的第一语言是中文, 看到自己用第二语言写成的专著能够用第一语言来出版, 其喜悦的心情是难以用笔墨来形容的. 最后, 感谢科学出版社对出版本书中文版的支持, 也感谢在出版过程中相关编辑及工作人员的辛勤劳动.

郭宇权

2011 年 12 月于香港科技大学

译 者 前 言

早在 1900 年, 法国数学家巴歇里耶 (Bachelier) 就在他的博士论文“投机理论”中提出证券价格的变化可以看成是一个布朗 (Brownian) 运动, 并且这也是历史上第一次给出布朗运动的数学定义. 随后, 萨缪尔森 (Samuelson) 在 1965 年进一步提出了股票价格的变化遵循几何布朗运动. 从此，几何布朗运动就成了经济学家描述股票价格变动所采用的最基本的模型. 特别是 20 世纪 50 年代以来, 金融经济学研究上的根本变化在于引进了数学方法, 从而诞生了一门新的交叉学科 —— 金融数学. 因此, 金融数学最显著的特征就是有效地运用数学理论和方法, 发现和论证金融经济运行的一些规律.

金融数学的蓬勃发展曾引发了两次 “华尔街革命”. 第一次 “华尔街革命” 是由 20 世纪 50 年代末、60 年代初马科维茨 (Markowitz) 的证券投资组合理论与夏普 (Sharpe) 的资本资产定价理论引发的, 他们共同开创了金融数学理论研究的先河. 第二次 “华尔街革命” 是指 1973 年布莱克和肖尔斯 (Black-Scholes) 期权定价理论的问世, 他们从证券价格的随机模型出发, 用几何布朗运动导出了著名的期权定价公式。这一理论不仅在金融界, 而且在其他经济学领域中都有着广泛的应用, 从而为金融业的未来发展带来了一场革命性的变化.

Black-Scholes-Merton 定价模型和鞅定价理论是期权定价理论的基石. 由香港科技大学郭宇权 (Yue-Kuen Kwok) 教授撰写的*Mathematical Models of Financial Derivatives*一书, 是一本关于利用金融数学方法对衍生产品定价建立模型的优秀理论教科书. 书中主要内容是关于鞅定价原理、衍生产品定价模型、对冲及其风险管理等知识. 读者通过阅读该书, 可以了解关于衍生产品定价模型和利率模型的最新进展, 掌握和了解求不同类型衍生产品定价模型的解析技巧和数值方法. 特别是在该书中每章的后面, 通过习题的方式, 把许多最新的研究成果和方法介绍给读者, 这是该书的一个重要特色.

能有机会将该书介绍给国内读者, 是让我们感到非常欣慰的事情. 该书可作为国内数学和金融等有关专业的高年级本科生和研究生的金融数学, 甚至金融工程课程的教材, 也可为金融从业人员提供有益的参考. 该书的翻译工作是由上海师范大学的张寄洲、同济大学的边保军和徐承龙合作完成的. 张寄洲负责协调全书的翻译工作, 并翻译了前言、目录、第 1~3 章, 第 4~6 章由边保军翻译, 第 7, 8 章由徐承龙翻译. 研究生孙伟、陆俊成、傅颖娜、袁泉、王乐乐、梁义娟、赵娜、杨巧敏等参与了该书各章的初译和打印工作. 王杨和傅毅还参与了第 1~3 章的校对工作. 对他

们的辛勤劳动在此表示万分感谢.

本书是应科学出版社之邀翻译的. 特别要感谢科学出版社编辑张扬先生和王丽平女士. 他们的支持和鼓励使得本书的翻译工作得以顺利完成. 译者同时非常感谢本书的作者郭宇权教授, 他不仅为本书写了前言, 而且亲自纠正了中文翻译中许多名词上的误译之处. 由于译者时间和水平所限, 书中难免有疏漏和翻译上的不妥之处, 敬请广大读者给予批评指正.

最后, 感谢国家重点基础研究发展计划子课题 “信用风险分析和信用衍生产品定价” (2007CB814903) 以及国家自然科学基金项目 “偏微分方程解的凸性研究和金融应用” (No.11071189) 和上海市本科教育高地建设项目 “数学与应用数学” 等项目的资助.

译　者

2011 年 12 月于上海

前　言

写作动机和读者对象

在过去的 30 年里, 我们目睹了金融市场中金融衍生产品和结构化产品的交易正在全球以惊人的速度增长, 掀起了衍生产品定价理论研究的高潮, 导致了在华尔街的金融机构大量雇用对金融衍生产品定价和管理投资组合风险具有能用高级分析和计算技巧, 以及能处理复杂而高深的科学现象等科学背景的毕业生. 现在在不同的国家里, 金融工程、数量金融学和计算金融学等学科拥有一百多个硕士学位项目. 本书是为了帮助攻读这些学位项目的学生掌握关于衍生产品定价理论而写的入门教材, 也适用于在金融机构从事计量工作, 并愿意获得期权定价技巧和探索新型结构衍生产品定价模型新进展的从业人员. 本书涉及的数学知识, 特别是对基本熟悉概率论和数理统计、微分方程、数值分析和数学分析的理工科高年级大学生的读者来说是适合的. 与鞅定价理论有关的随机过程的进一步知识, 如随机微积分和鞅理论, 在本书中也作了介绍.

衍生产品定价理论的奠基石是 Black-Scholes-Merton 定价模型和金融衍生产品的鞅定价理论. 在无套利的金融市场中, 根据贴现证券价格在风险中性测度下是鞅的性质, 著名的风险中性定价原理表明在该测度下衍生产品的价格是由最终收益的贴现期望值给出的. 第二版对第一版进行了大量的修订. 新版是在建立衍生产品模型后提出了理论, 重点突出了鞅定价原理. 在离散时间的框架内, 基本金融经济学原理的分析使连续时间鞅定价理论变得生动. 在公平和有固定收益市场中, 分析经常交易的金融衍生产品所涉及的广泛内容, 主要集中在定价、对冲以及风险管理等几个方面. 从著名的 Black-Scholes-Merton 期权定价模型开始, 读者通过本书可以看到关于最丰富的衍生产品定价模型和利率模型的新进展. 书中重点介绍了求解不同类型衍生产品定价模型的解析技巧和数值方法, 收集了各种新型路径依赖期权 (包括障碍期权、回望期权、亚式期权和美式期权) 以及有固定收益衍生产品的闭式定价公式.

各章导引

本书内容包括 8 章, 每章结尾都选用了大量精心设计的习题. 这些问题不仅使读者重温书中的概念和知识, 而且也使读者找到散落在最近的期刊文章中关于金融衍生产品定价理论的新研究成果和概念.

第 1 章是关于基本衍生工具的介绍, 如远期合约、期权和互换. 给出了在金融经济学中有关术语的各种定义, 如自融资策略、套利、对冲策略等. 关于标的资产价格动态在没有任何给定的假设下说明怎样推导出期权价格的合理边界.

第 2 章在离散证券模型下, 利用金融经济学的理论证明了无套利原理等价于等价鞅测度的存在性. 这个重要结果称为资产定价基本定理. 由此导出了风险中性定价原理, 在风险中性测度下, 可达未定权益的定价是由权益贴现的期望值决定的. 因此, 可达未定权益、无套利和风险中性等概念构成了现代期权定价理论的基石. 在随机分析中, 引入了布朗过程和基本分析工具. 特别地, 讨论了 Feynman-Kac 表示, 在两个概率测度之间的 Radon-Nikodym 导数和在 Itô 过程中使测度发生变换的 Girsanov 定理.

书中的亮点出现在第 3 章, 其中介绍了期权定价模型的 Black-Scholes-Merton 公式和金融衍生产品的鞅定价方法, 阐明了如何利用定价理论获得不同类型欧式期权的定价公式, 讨论了 Black-Scholes-Merton 模型的各种推广, 包括带交易费用的模型、跳扩散模型和随机波动率模型.

路径依赖期权是关于在期权的生存期间, 与资产价格过程的路径历史有关的收益结构的期权. 常见的例子是具有敲出特征的障碍期权、具有平均特征的亚式期权和收益依赖于资产价格过程实际极值的回望期权. 在第 4 章中, 假设标的资产价格服从几何布朗过程, 得到了各种类型欧式路径依赖期权的定价公式.

第 5 章是关于美式期权的定价. 提出了与美式期权模型有关的最佳实施边界的特征, 特别地, 分析了离散分红前后和即将到期前实施边界的特征, 讨论了美式期权的两个常用的定价公式, 即线性互补公式和最优停止公式, 证明了根据实施边界以积分表示的形式如何来表达提前实施期权金. 因为一般地, 对美式期权不能得到解析定价公式, 所以对美式期权的定价提出了几个解析近似方法, 也考虑了美式障碍期权、俄罗斯期权和重置敲定期权的定价模型.

因为有闭式定价公式的期权模型是稀少的, 所以对期权价格的定价通常借助于数值方法. 在期权定价中, 常用的数值方法是格点树方法、有限差分算法和蒙特卡罗模拟法. 从本质上来说, 格点树方法最初是通过随机游动模型对连续资产价格过程的模拟. 有限差分算法是寻求将 Black-Scholes 方程中的微分算子离散化. 蒙特卡罗模拟法是通过模拟资产价格的随机过程, 对期权定价问题提出了一个概率解法. 利用这些方法, 第 6 章给出了期权定价的算法.

第 7 章研究了各种利率模型和债券价格的特征. 以单因子短期利率模型为例开始讨论, 并将其扩展到多因子模型, 讨论了建立远期利率的随机运动模型的 Heath-Jarrow-Merton(HJM) 方法. HJM 方法提出了建立瞬时利率模型的共同方法. 也在 Gaussian HJM 框架下, 提出了远期 LIBOR(伦敦银行同业拆借利率 (London-inter-bank-offered-rate)) 过程的公式.

最后一章提出了关于几个普通的可交易利率衍生产品定价模型的解释, 如债券期权、区间型债券、利率上限期权和互换期权. 在随机利率下, 为使股票衍生产品的定价更容易, 引入了远期测度的技巧. 在远期测度下, 债券价格被用来作为计价单位. 在 LIBOR 衍生产品类型的定价中, 用 LIBOR 作为定价模型中标的状态变量是更有效的. 对每个远期 LIBOR 过程, 对数正态 LIBOR 模型确定了一个由远期利率结算日定义的远期测度. 与基于不可观察的瞬时远期利率的 HJM 方法不同, 对数正态 LIBOR 模型是建立在可观察的市场利率的基础上的. 类似地, 在对数正态互换利率模型下, 能有效地给出互换期权的定价, 这里在适当的互换测度中用年金 (债券价格的和) 作为计价单位. 最后, 在适当的两个货币 LIBOR 模型下, 考虑对冲和交叉货币利率互换的定价.

致谢

在写作过程中, 作者得益于来自同事们和学生们通过各种类型的研讨班和课堂讨论的建议和意见. 书中所使用的某些材料出自曾与作者合作过的同事和已毕业的博士生在研究出版物中的一些新成果. 特别要感谢 Lixin Wu, Min Dai, Hong Yu, Hoi Ying Wong, Ka Wo Lau, Seng Yuen Leung, Chi Chiu Chu, Kwai Sun Leung 和 Jin Kong 等长期研究的相互影响, 以及他们关于本书手稿的一些有益的建议. 特别感谢黄美西女士对手稿仔细的打印和编辑工作, 以及她在本书的出版过程中对待无穷无尽的修改的耐心态度. 最后, 在本书写作过程中, 更多的要真诚地感谢我的妻子爱珍和我们的两个女儿懿恩和懿珊的宽容态度. 在每天的生活和工作中, 她们的爱护和关心永远是支撑我努力工作的源泉.

关于本书封面设计的后话

在这本由 Springer 出版的教材书的封面, 其普通黄色和蓝色的背景下面是香港的中银大厦和立法会大楼. 这个设计的意念是对得益于中国惊人的经济发展和香港健全的法制系统下所带来的香港金融市场近年来巨大成就的赞美.

目　录

中文版前言

译者前言

前言

第 1 章　衍生产品介绍 …… 1

1.1　金融期权及其交易策略 …… 1

1.1.1　关于期权的交易策略 …… 5

1.2　期权价格的合理边界 …… 9

1.2.1　分红的影响 …… 15

1.2.2　看涨–看跌期权的平价关系 …… 16

1.2.3　外汇期权 …… 17

1.3　远期和期货合约 …… 19

1.3.1　远期合约的价值和价格 …… 19

1.3.2　远期和期货价格的关系 …… 22

1.4　互换合约 …… 23

1.4.1　利率互换 …… 23

1.4.2　货币互换 …… 25

1.5　习题 …… 26

第 2 章　金融经济学和随机分析 …… 31

2.1　单时段证券模型 …… 32

2.1.1　占优交易策略和线性价格测度 …… 32

2.1.2　套利机会与风险中性概率测度 …… 38

2.1.3　未定权益的价值 …… 44

2.1.4　二叉树期权定价模型的原理 …… 48

2.2　域流、鞅和多时段模型 …… 50

2.2.1　信息结构和域流 …… 51

2.2.2　条件期望与鞅 …… 53

2.2.3　停时和停止过程 …… 57

2.2.4　多时段证券模型 …… 59

2.2.5　多时段二叉树模型 …… 64

2.3　资产价格运动和随机过程 …… 67

2.3.1　随机游动模型 …… 68

2.3.2 布朗过程 ··· 71
2.4 随机分析：Itô引理和 Girsanov 定理 ··· 73
2.4.1 随机积分 ··· 74
2.4.2 Itô引理和随机微分 ··· 77
2.4.3 Itô过程和 Feynman-Kac 表示公式 ··· 79
2.4.4 测度变换：Radon-Nikodym 导数和 Girsanov 定理 ··· 82
2.5 习题 ··· 83
第 3 章 期权定价模型：Black-Scholes-Merton 公式 ··· 93
3.1 Black-Scholes-Merton 公式 ··· 94
3.1.1 无风险对冲原理 ··· 95
3.1.2 动态复制策略 ··· 97
3.1.3 风险中性原理 ··· 100
3.2 鞅定价理论 ··· 101
3.2.1 等价鞅测度和风险中性定价 ··· 102
3.2.2 Black-Scholes 模型回顾 ··· 105
3.3 Black-Scholes 定价公式及其性质 ··· 107
3.3.1 欧式期权的定价公式 ··· 107
3.3.2 比较静态 ··· 114
3.4 推广的期权定价模型 ··· 119
3.4.1 分红资产的期权 ··· 120
3.4.2 期货期权 ··· 125
3.4.3 选择期权 ··· 127
3.4.4 复合期权 ··· 128
3.4.5 风险债务的 Merton 模型 ··· 131
3.4.6 交换期权 ··· 134
3.4.7 具有汇率风险敞口的股票期权 ··· 136
3.5 超出 Black-Scholes 定价框架 ··· 139
3.5.1 含交易费的期权定价模型 ··· 140
3.5.2 跳扩散模型 ··· 143
3.5.3 隐含和局部波动率 ··· 145
3.5.4 随机波动率模型 ··· 150
3.6 习题 ··· 155
第 4 章 路径相关期权 ··· 171
4.1 障碍期权 ··· 172
4.1.1 欧式下降敲出看涨期权 ··· 173

4.1.2 转移密度函数和首次通过时间密度 …… 177
4.1.3 双边障碍期权 …… 185
4.1.4 离散观察的障碍期权 …… 190
4.2 回望期权 …… 191
4.2.1 欧式固定敲定价格回望期权 …… 192
4.2.2 欧式浮动敲定价格回望期权 …… 194
4.2.3 其他新型欧式回望期权 …… 197
4.2.4 偏微分方程模型 …… 199
4.2.5 离散观察的回望期权 …… 200
4.3 亚式期权 …… 201
4.3.1 偏微分方程模型 …… 202
4.3.2 连续观察的几何平均期权 …… 203
4.3.3 连续观察的算术平均期权 …… 206
4.3.4 看跌 - 看涨期权平价公式和固定 - 浮动敲定价格期权的对称关系 …… 208
4.3.5 离散几何平均的固定敲定价格期权 …… 211
4.3.6 离散算术平均的固定敲定价格期权 …… 214
4.4 习题 …… 219
第 5 章 美式期权 …… 238
5.1 最佳实施边界的特性 …… 239
5.1.1 原生资产分红的美式期权 …… 240
5.1.2 平滑粘贴性条件 …… 241
5.1.3 美式看涨期权的最佳实施边界 …… 243
5.1.4 看涨 - 看跌期权的对称关系 …… 246
5.1.5 原生资产单次分红的美式看涨期权 …… 249
5.1.6 单次和多次分红的美式看跌期权 …… 253
5.2 美式期权模型的定价公式 …… 256
5.2.1 线性互补公式 …… 256
5.2.2 最优停时问题 …… 258
5.2.3 提前实施费用的积分表示 …… 259
5.2.4 美式障碍期权 …… 264
5.2.5 美式回望期权 …… 266
5.3 解析近似方法 …… 268
5.3.1 复合期权近似方法 …… 268
5.3.2 积分方程的数值解 …… 270
5.3.3 二次近似方法 …… 272

5.4 具有自动重置权利的期权 ······ 274
5.4.1 叫底价特征的定价问题 ······ 275
5.4.2 可重置敲定价格的看跌期权 ······ 278
5.5 习题 ······ 282
第 6 章 期权定价的数值方法 ······ 297
6.1 网格树方法 ······ 298
6.1.1 二叉树模型的回顾 ······ 298
6.1.2 二叉树模型的连续极限 ······ 300
6.1.3 离散分红模型 ······ 303
6.1.4 提前实施特征和回购特征 ······ 305
6.1.5 三叉树模型 ······ 306
6.1.6 前向打靶法 ······ 310
6.2 有限差分算法 ······ 315
6.2.1 构造显示格式 ······ 316
6.2.2 隐式格式及实现问题 ······ 319
6.2.3 自由边界固定方法和点松弛技巧 ······ 322
6.2.4 截断误差和收敛的阶 ······ 326
6.2.5 数值稳定性和振荡现象 ······ 328
6.2.6 辅助条件的数值近似 ······ 331
6.3 蒙特卡罗模拟 ······ 334
6.3.1 方差减小技巧 ······ 336
6.3.2 低偏差序列 ······ 338
6.3.3 美式期权的定价 ······ 339
6.4 习题 ······ 348
第 7 章 利率模型和债券定价 ······ 358
7.1 债券价格与利率 ······ 359
7.1.1 债券价格与收益率曲线 ······ 359
7.1.2 远期利率合约、债券远期和标准互换 ······ 361
7.1.3 远期利率和短期利率 ······ 363
7.1.4 确定性利率下的债券价格 ······ 366
7.2 单因子短期利率模型 ······ 367
7.2.1 短期利率模型和债券价格 ······ 367
7.2.2 Vasicek 均值回归模型 ······ 372
7.2.3 Cox-Ingersoll-Ross 平方根扩散模型 ······ 373
7.2.4 推广的单因子短期利率模型 ······ 375

7.2.5 债券价格当前期限结构的校正 ······ 376
7.3 多因子利率模型 ······ 379
7.3.1 短期利率/长期利率模型 ······ 379
7.3.2 随机波动率模型 ······ 382
7.3.3 仿射期限结构模型 ······ 383
7.4 Heath-Jarrow-Morton 框架结构 ······ 387
7.4.1 远期利率的漂移率条件 ······ 388
7.4.2 短期利率过程和它们的马尔可夫特性 ······ 389
7.4.3 高斯型 HJM 框架结构下的远期 LIBOR 过程 ······ 393
7.5 习题 ······ 395
第 8 章 利率衍生产品：债券期权、LIBOR 及互换产品 ······ 415
8.1 远期测度及远期价格 ······ 416
8.1.1 远期测度 ······ 417
8.1.2 随机利率下股票期权的定价 ······ 419
8.1.3 期货和期货 – 远期价差 ······ 421
8.2 债券期权及区间型债券 ······ 423
8.2.1 贴现债券期权及附息债券期权 ······ 423
8.2.2 区间型债券 ······ 430
8.3 上限和 LIBOR 市场模型 ······ 433
8.3.1 高斯 HJM 框架下的上限定价 ······ 433
8.3.2 Black 公式和 LIBOR 市场模型 ······ 435
8.4 互换和互换期权 ······ 440
8.4.1 远期互换利率和互换测度 ······ 441
8.4.2 对数正态 LIBOR 市场模型下互换期权的近似定价 ······ 445
8.4.3 交叉货币互换 ······ 449
8.5 习题 ······ 457
参考文献 ······ 475
《现代数学译丛》已出版书目 ······ 488

第 1 章 衍生产品介绍

在过去的几十年, 我们目睹了世界金融市场中**衍生证券**(derivative securities)交易的一场革命. 金融衍生产品可定义为一种证券, 其价值依赖于更基本的标的变量, 如其他交易证券的价格、利率、商品价格或股票指数. 三种最基本的衍生证券是远期、期权和互换. **远期合约**(forward contract)(若在交易所内进行交易, 则称为**期货合约**(futures contract)) 是一方在未来确定的日期以事先确定的价格从对方那里购买某种资产的协议. **期权**(option) 赋予持有者在确定的日期以事先确定的价格购买或销售某种资产的权利 (但不必负有义务). **互换**(swap) 是一份交易双方在未来按照某种预先安排的方式交换现金流的金融合约. 多年以来, 可交易的衍生证券的种类激增, 新型衍生产品连续不断地被创造出来. 发展新型衍生证券的定价方法已成为金融工程领域的主要挑战. 在华尔街关于金融衍生物的使用及其风险管理方面的理论研究已广泛地被人们认为是复杂而高深的科学 (rocket science).

本书集中研究金融衍生产品的定价模型. 衍生产品交易是金融公司中投资组合管理不可或缺的部分, 而且许多金融策略和决策都可以从期权的角度分析得出. 在本书中, 探讨各种类型的金融衍生产品的特性, 并且讨论能确定衍生产品公平价格的理论框架.

在 1.1 节中, 讨论远期合约和期权的收益结构, 介绍金融经济学理论中通常使用的各种术语的定义, 如自融资策略、套利、对冲等, 也讨论与利用期权及其组合有关的各种交易策略. 在 1.2 节中, 对标的资产价格的随机行为不作任何假设的情况下, 推导出期权价格的合理边界, 还将讨论如果期权合约中含有提前实施特征且标的资产分红, 那么期权价格将受到怎样的影响. 在 1.3 节中, 考虑远期合约的定价, 并在常数利率下分析远期合约价格与期货价格之间的关系. 在 1.4 节中, 讨论产品的特征以及利率互换和货币互换的用法.

1.1 金融期权及其交易策略

首先, 定义期权交易中不同的术语. 期权可分为看涨期权和看跌期权. **看涨**(call)(或**看跌**(put)) 期权是一份合约, 它赋予持有者在某个日期 (**到期日**(expiration date)) 以事先规定的价格 (通常称为**敲定价格**(strike price) 或**实施价格**(exercise price)) 购买 (或销售) 事先规定的资产 (称为**标的资产**(underlying asset)) 的权利. 因为持有者有权利, 但并不负有义务买或卖某种资产, 所以他将作出的决定取决于交

易对他是否有利. 当持有者选择买或卖资产时, 被认为是实施该期权. 如果期权只能在到期日实施, 那么称该期权为**欧式期权**(European option); 否则, 如果期权在到期日之前的任何时刻都允许实施, 那么称该期权为**美式期权**(American option)(这些术语已经与它们的地理位置无关了). 没有特殊特征的简单看涨与看跌期权通常称为**标准期权**(plain vanilla options). 同时还有一些期权叫做**亚式期权**(Asian option)、**回望期权**(lookback option)、**障碍期权**(barrier option) 等. 这些奇异类型期权的精确定义将在第 4 章给出.

期权合约持有者的对方称为**期权的出售者**(option writer). 持有者和出售者分别称为期权合约的**多头**(long position) 和**空头**(short position). 与持有者不同, 出售者承担期权合约中的义务. 例如, 如果持有者认为购买资产对他有利, 那么看涨期权的出售者必须卖出这种资产. 这是一个零和博弈, 出售者的损失就是持有者的所得, 反之也成立.

如果立即实施期权获得正 (负) 的收益, 那么称期权处于**实值**(in-the-money)(**虚值**(out-the-money)) 状态. 例如, 当目前资产价格是在看涨期权的敲定价格上 (下) 方时, 看涨期权是处于实值 (虚值) 状态. 立即实施期权时收益为零, 称期权处于**平值**(at-the-money) 状态, 即目前资产价格恰好等于期权的敲定价格.

1. 远期和期权的最终收益

远期合约的持有者有义务在合约到期日以远期价格 (也称为交割价格) K 购买标的资产. 设 S_T 表示在到期日 T 时资产的价格. 因为持有者支付 K 美元购买价值为 S_T 的资产, 所以持有者 (多头) 的最终收益为 $S_T - K$. 远期合约的卖方 (空头) 的最终收益则为 $K - S_T$, 相对于持有者来说, 它是负的 (根据远期合约的零和法则).

下面考虑敲定价格为 X 的欧式看涨期权. 如果 $S_T > X$, 那么看涨期权的持有者将会在到期日 T 选择实施该期权, 这是因为他可以花费 X 美元购买到价值为 S_T 美元的资产. 因此, 持有者从看涨期权中获得的收益就是 $S_T - X$. 然而, 如果 $S_T \leqslant X$, 由于他可以从市场中以比事先规定的敲定价格 X 更低或者相等的价钱买到资产, 所以持有者将放弃执行该期权的权利. 欧式看涨期权多头 (持有者一方) 的最终收益为

$$\max(S_T - X, 0).$$

类似地, 欧式看跌期权多头的最终收益为

$$\max(X - S_T, 0).$$

只有当 $S_T < X$ 时, 看跌期权在到期日 T 才会被执行, 这是因为在看跌期权的合约

下, 价值 S_T 的资产可以被其持有者以一个更高的价格 X 卖出. 不管是看涨期权还是看跌期权, 最终收益都要保证是非负的. 这些性质反映了期权的本质: 如果收益是负的, 它们将不会被执行.

2. 期权费

由于期权的出售者在未来负有潜在的义务, 因此, 他们双方在签订期权合约时, 期权的出售者必须获得期权持有者预先支付的费用作为补偿. 另一种观点是因为期权持有者保证获得非负的最终收益, 所以他必须支付期权费得到期权交易的机会. 一个很自然的问题是: 合理的期权费 (称为期权价格) 应该是多少, 才使得对于期权的买方和卖方都是公平的. 另一个深刻的问题是: 对于美式期权提前实施的最优策略是什么? 至少, 容易看出期权价格依赖于敲定价格、到期日和当前的资产价格. 定价模型中所涉及的不太明显的因素有利率和资产价格的随机程度 (通过随机资产价格过程的**波动率**(volatility) 来刻画).

3. 自融资策略

假设投资者持有一个证券投资组合, 如期权、股票及债券的组合. 随着时间的消逝, 证券价格的变化会引起投资组合价值的改变. 此外, 投资者的交易策略也影响着投资组合价值的变化, 如通过在投资组合中改变持有证券的比例以及在组合中加入或抽出资金. 如果在初始的投资中没有额外的资金加入或抽出, 则称该投资策略为**自融资**(self-financing) 的. 为了增加投资组合中某种证券的份额, 通过出售同一投资组合中的一部分其他证券, 这种获得费用的做法称为完全融资.

4. 卖空

当投资者预期股票会上涨时, 他将买入股票. 投资者怎样从股票的下跌中获利呢? 他可以通过卖空股票来达到目的. 卖空是指借入股票并且立即卖出, 随后再买入股票归还给借方的交易行为. 在价格下跌前卖出股票, 之后再买回该股票, 卖空者希望从价格下跌中赚取差价获利. 通常, 在股票交易中, 有对卖空时间以及卖空收益的使用方面的限定规则. 例如, 一个交易中可能执行这样的规则: 仅当最近证券价格的大部分行为是上涨时, 才允许卖空证券. 当股票分红时, 卖空者要支付同样数量的红利给股票的贷方作为补偿.

5. 无套利原理

在期权定价的理论中, 一个基本的概念是不存在套利的机会, 称为**无套利原理**(no arbitrage principle). 下面给出一个存在套利机会的例子. 假设在交易所 A 和 B, 一种特定股票的价格分别为 99 美元和 101 美元. 假设没有交易费用, 那么一个人就可以通过在交易所 A 以 99 美元买入, 而在交易所 B 以 101 美元卖出来锁定

每股 2 美元的无风险利润. 参与这种交易的交易者称为**套利者**(arbitrageur). 如果金融市场合理运行, 则这种的套利机会不可能出现, 因为交易者对股票价格的差别是很警觉的, 他们很快就会去竞争这个机会. 然而, 当存在交易费时, 这是一种普通的市场摩擦形式, 价格的微小差异可能会持续存在. 例如, 如果在交易所 A 和 B, 买和卖每股股票的交易费都是 1.5 美元, 那么每股股票 3 美元的总交易费必然导致套利者丧失兴趣.

更精确地说, **套利机会**(arbitrage opportunity) 可以定义为不需要初始投资资金的自融资交易策略, 其最终收益为负的概率为零, 最终收益为正的概率大于零. 关于无套利原理更详细的内容将在 2.1 节中给出.

下面介绍远期的无套利价格.

这里将在标的资产不分红的情况下, 讨论如何运用无套利原理来确定远期合约的价格. 远期合约的价格是持有者为了在到期日获得标的资产而支付的价格. 根据无套利原理, 如果不带红利支付的资产即期价格为 S, 那么其远期价格 F 为

$$F = Se^{r\tau}, \tag{1.1.1}$$

其中 r 为常数无风险利率, τ 为远期合约距离到期日的时间, $e^{r\tau}$ 为在 τ 时段内获得连续复利的现金存款的增长因子.

当 $F > Se^{r\tau}$ 或 $F < Se^{r\tau}$ 时, 它能表明套利者可以锁定无风险利润. 首先, 假设 $F > Se^{r\tau}$, 一个套利策略就是从银行借入 S 美元, 并且用借入的现金来购买资产, 使在远期合约中处于空头. 在贷款期 τ 内, 贷款增长为 $Se^{r\tau}$. 在到期日, 根据远期合约, 套利者通过卖出资产将获得 F 美元. 在还回银行贷款 $Se^{r\tau}$ 后, 无风险利润为 $F - Se^{r\tau} > 0$; 否则, 假设 $F < Se^{r\tau}$, 上述的套利策略则相反, 即卖空资产将所得款存入银行, 使在远期合约中处于多头. 在到期日, 根据远期合约套利者支付 F 美元获得资产, 并通过归还资产而平掉空仓. 现在无风险利润为 $Se^{r\tau} - F > 0$. 两个例子都出现了套利机会. 根据无套利原理, 远期合约价格公式 (1.1.1) 成立.

我们期望远期价格应该等于在到期日最终的资产价格 S_T 的期望值. 然而, 因为期望值依赖于远期合约的持有者对标的资产价格随机运动的看法, 所以这个期望值的近似值并不靠近远期价格. 上述无套利的论证表明, 远期价格可以通过采用某个交易策略来实施. 如果远期价格偏离了这个无套利价格, 那么套利机会将会产生, 不久市场就将调整为以 "无套利价格" 进行交易.

6. 期权的波动性

众所周知, 期权价格以扩大的比例反应标的资产价格的变化. 为了说明这个事实, 考虑一个接近到期日的敲定价格为 100 美元的看涨期权. 假设当前的资产价格为 98 美元, 由于资产价格在短期内不太可能超过 100 美元, 因此, 看涨期权的价值

接近于零. 然而, 当资产的价格为 102 美元时, 看涨期权在到期日附近的价格约为 2 美元. 虽然资产价格在 98 美元和 102 美元之间仅有微小的变化, 但是期权价格的相对变化是很大的. 因此, 期权价格似乎比标的资产价格有更大的波动性. 换句话说, 对于每一美元的投资, 期权交易比标的资产的交易导致更多的价格变化. 相对于资产价格来说, 期权价格相对于资产价格弹性的精确分析需要有关期权定价模型的详细知识 (见 3.1 节).

7. 套期保值 (对冲)

如果看涨期权的出售者并不同时拥有一定数量的标的资产, 那么他就被认为处于**裸头寸**(naked position), 因为如果资产价格上涨很快, 则他就没有受到保护. 然而, 如果看涨期权的出售者拥有一些标的资产, 那么当资产价格上升时, 看涨期权空头的损失就可以从标的资产多头的利润中得到补偿. 这种策略称为**套期保值**(hedging)(或称为对冲), 其中组合的风险可以通过两个具有高度负相关的证券的相反方向来控制. 在一个**完全对冲**(perfect hedge) 中, 套期保值者可以将风险期权和相对应的标的资产以适当的比例进行组合, 形成一个无风险的投资组合. 在 3.1 节中, 将看到**无风险对冲原理**(riskless hedging principle) 是怎样被用来确切地表达期权定价原理的.

1.1.1 关于期权的交易策略

通过上述一个简单的对冲实例, 可以看到如何利用期权和标的资产的组合来控制风险敞口. 现在, 将以期权和标的资产作为基本金融工具来研究各种投资组合管理策略. 这里仅限于讨论有关欧式标准看涨和看跌期权的投资组合策略, 还假设在投资期内标的资产不分红.

分析投资组合策略最简单的方法就是建立对应的最终收益图表. 它表明从持有期权和标的资产中获得的到期日收益是期末资产价格的函数. 这种简单的分析仅适用于投资组合所包含的所有期权都具有相同的到期日和相同的标的资产的情况.

1. 有担保的看涨期权和有保护的看跌期权

考虑一个投资组合: 一份标的资产多头和一份看涨期权空头 (卖方). 这个投资策略被称为出售一份有**担保的看涨期权**(writing a covered call). 令 c 表示卖出看涨期权所获得的期权费, S_0 表示期权合约初始时刻的资产价格 (注意: $S_0 > c$, 见式 (1.2.12)), 那么投资组合的初始价值为 $S_0 - c$. 回想一下, 看涨期权的最终收益是 $\max(S_T - X, 0)$, 其中 S_T 表示到期日的资产价格, X 表示敲定价格. 假设标的资产不分红, 在到期日投资组合的价值是 $S_T - \max(S_T - X, 0)$, 因此, 在到期日有担保的看涨期权的收益为

$$S_T - \max(S_T - X, 0) - (S_0 - c) = \begin{cases} (c - S_0) + X, & S_T \geqslant X, \\ (c - S_0) + S_T, & S_T < X. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

注意到当 $S_T \geqslant X$ 时, 收益为常数值 $(c - S_0) + X$; 当 $S_T < X$ 时, 收益随 S_T 呈线性增长. 图 1.1 是有担保的看涨期权所对应的最终收益图. 读者可以考虑一下, 为什么 $c - S_0 + X \geq 0$? 为此, 可参见方程 (1.2.3a).

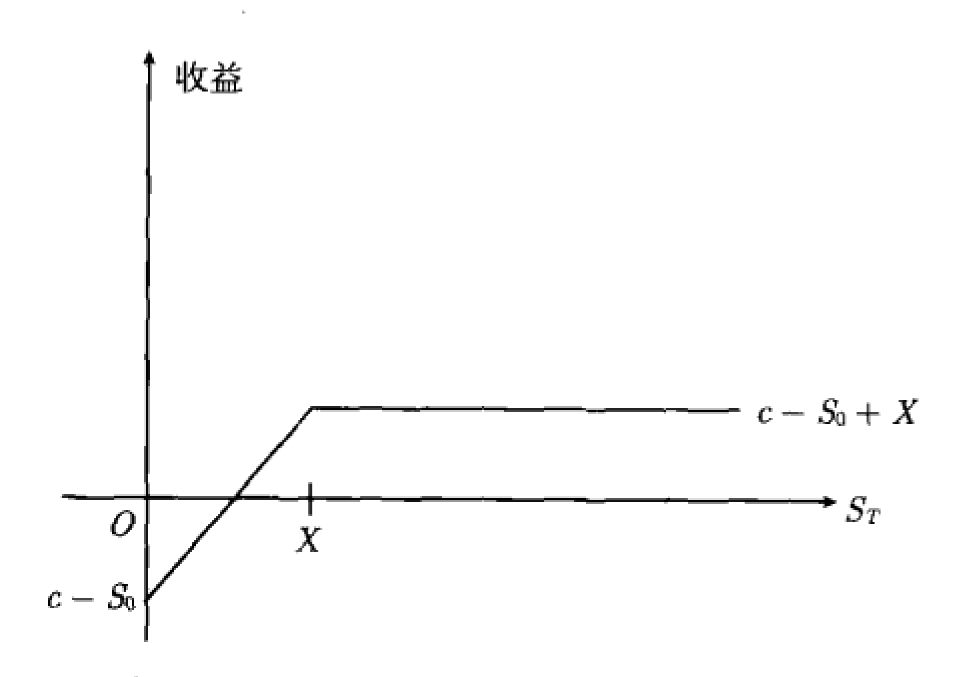


图 1.1　有担保的看涨期权的最终收益图

如果投资组合包含一份看跌期权多头和一份标的资产多头, 则称之为有保护的看跌期权. 令 p 表示购买看跌期权所支付的期权费. 类似地, 可以看出, 有保护的看跌期权到期日的收益为

$$S_T + \max(X - S_T, 0) - (p + S_0) = \begin{cases} -(p + S_0) + S_T, & S_T \geqslant X, \\ -(p + S_0) + X, & S_T < X. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

$X - (p + S_0) < 0$ 总是成立吗?

构造包含一份看跌期权多头和卖空对应资产的投资组合有意义吗? 这个投资组合策略起不到套期保值的作用, 这是因为看跌期权头寸和标的资产头寸的风险敞口方向相同, 当资产价格增长时, 两个头寸都有损失.

2. *差价期权*

一个差价期权策略是指由相同类型的期权 (即两个或更多的看涨期权, 或者两个或更多的看跌期权) 所组成的投资组合, 为了达到某一水平的套期保值的效果, 组合中一部分期权处于多头, 其余的期权处于空头. 两个最基本的差价期权策略是价格差价期权策略和日历差价期权策略. 在**价格差价期权**(price spread) 中, 买入一个期权的同时卖出另一个期权, 这两个期权具有相同的标的资产和相同的到期日,

但是它们的敲定价格不同. 除了期权具有相同的敲定价格但到期日不同以外, **日历差价期权**(calendar spread) 与价格差价期权类似.

价格差价期权

价格差价期权可以分为**牛市差价期权**(bullish spread) 和**熊市差价期权**(bearish spread). 术语牛市 (熊市) 意味着差价期权持有者从资产价格的上涨 (下跌) 中获益. 牛市差价期权可以由一份看涨期权多头和另一份具有更高敲定价格的看涨期权空头形成的投资组合所构成. 因为看涨期权的价格是敲定价格的减函数 (见式 (1.2.6a)), 构造投资组合需要预付费用. 设 X_1 和 X_2 $(X_2 > X_1)$ 表示看涨期权的敲定价格, c_1 和 c_2 $(c_2 < c_1)$ 是它们各自的期权费, 从而这两个看涨期权的最终收益之和为

$$\max(S_T - X_1, 0) - \max(S_T - X_2, 0) = \begin{cases} 0, & S_T < X_1, \\ S_T - X_1, & X_1 \leqslant S_T \leqslant X_2, \\ X_2 - X_1, & S_T > X_2. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

当 $S_T < X_1$ 时, 最终收益为零; 当 $X_1 \leqslant S_T \leqslant X_2$ 时, 最终收益随 S_T 线性增长; 当 $S_T > X_2$ 时, 最终收益是一个常数值 $X_2 - X_1$. 当两个看涨期权到期时处于实值状态, 牛市差价期权达到最大收益. 当两个看涨期权到期时处于虚值状态, 即当 $S_T < X_1$ 时, 最初组合牛市差价期权的构造费用即为牛市差价期权的全部损失.

假设由两个看涨期权构成一个新的投资组合, 这里买入的看涨期权比卖出的看涨期权拥有更高的敲定价格, 并且两者具有相同的到期日, 那么一个熊市差价期权就构成了. 与牛市差价期权不同, 熊市差价期权使投资者获得一个预先正的现金流. 由两个具有不同敲定价格的看涨期权构成的熊市差价期权的最终收益与相应的牛市差价期权的最终收益恰好相反. 注意: 牛市和熊市差价期权也可以由看跌期权的投资组合所构成.

蝶式差价期权

考虑一个投资组合: 购买一份敲定价格为 X_1 的看涨期权和另一份敲定价格为 X_3 (设 $X_3 > X_1$) 的看涨期权, 卖出两份敲定价格为 $X_2 = \dfrac{X_1 + X_3}{2}$ 的看涨期权. 这个投资组合就称为**蝶式差价期权**(butterfly spread), 它可以认为是由一个牛市差价期权和一个熊市差价期权所组成的. 构造蝶式差价期权需要的费用是 $c_1 + c_3 - 2c_2$, 其中 c_i 表示敲定价格为 $X_i (i = 1, 2, 3)$ 的看涨期权的价格. 由于看涨期权的价格是敲定价格的凸函数 (见式 (1.2.13a)), 所以有 $2c_2 < c_1 + c_3$. 因此, 组合蝶式差价期权的构造费用大于 0. 在到期日, 这 4 个看涨期权的收益之和为

$$
\begin{aligned}
&\max(S_T - X_1, 0) + \max(S_T - X_3, 0) - 2\max(S_T - X_2, 0) \\
&= \begin{cases} 0, & S_T \leqslant X_1, \\ S_T - X_1, & X_1 < S_T \leqslant X_2, \\ X_3 - S_T, & X_2 < S_T \leqslant X_3, \\ 0, & S_T > X_3. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.1.5}
$$

最终收益在 $S_T = X_2$ 时达到最大值, 在 X_2 的两边呈线性递减, 在 $S_T = X_1$ 或 $S_T = X_3$ 时达到零值. 在区间 (X_1, X_3) 的外部, 蝶式差价期权的收益为零. 从最终收益中扣除最初的组合费用 $c_1 + c_3 - 2c_2$, 得到蝶式差价期权的最终收益图, 如图 1.2 所示.

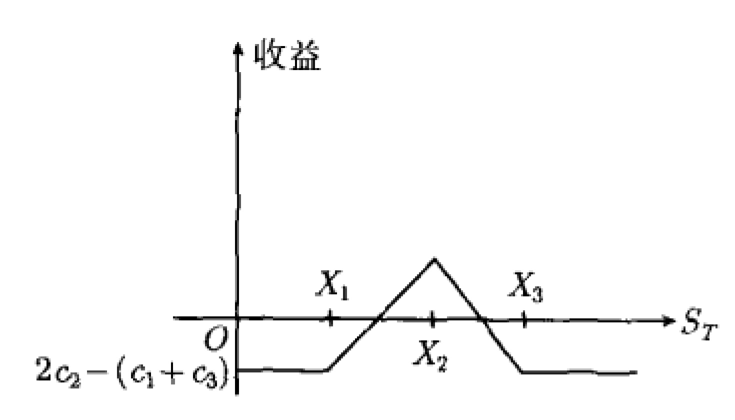


图 1.2　4 个看涨期权组成的蝶式差价期权的最终收益图

对于那些认为在差价期权有效期内资产价格不可能发生大的波动的投资者来说, 蝶式差价期权是一个合适的投资策略. 注意到拥有一个较宽区间 (X_1, X_3) 的蝶式差价期权的最终收益控制着一个较窄区间的蝶式差价期权的最终收益. 根据无套利原理, 推导出蝶式差价期权最初的构造费用随着区间 (X_1, X_3) 的宽度递增; 否则, 套利者就会以较便宜的价格买入较宽区间的蝶式差价期权, 再以较贵的价格卖出较窄区间的蝶式差价期权, 从而锁定无风险利润. 这个策略可以保证获得非负的最终收益, 而且拥有获得正的最终收益的可能.

日历差价期权

考虑一个由两个具有相同敲定价格, 但不同到期日 T_1 和 T_2 $(T_2 > T_1)$ 的看涨期权所组成的日历差价期权, 其中期限较短的期权和期限较长的期权的头寸分别为空头和多头. 由于期限较长的看涨期权通常要比期限较短的看涨期权更贵一些①, 所以日历差价期权的初始构成费用是必需的. 在随后的讨论中, 考虑通常的情况, 即期限较长的看涨期权要更贵一些. 具有不同到期日的两个看涨期权, 其价值以不同的速率下跌, 期限较短的看涨期权其价值下跌的速率更快些, 而且资产价格越接近敲定价格, 下跌的速率越快 (见 3.3 节). 持有日历差价期权的收益来源于期限较短的看涨期权和期限较长的看涨期权之间不同的价值下跌速率. 因为当看涨期权接近平值状态时, 其价值的下跌速率更快. 因此, 当 T_1 时刻 (短期看涨期权的到期日) 的资产价格接近于这两个看涨期权共同的敲定价格时, 日历差价期权在 T_1 时刻的收益更高. T_1 时刻的收益减去最初的构成费用即为 T_1 时刻的收益. 换句话说,

① 只有当标的资产分红且看涨期权处于足够的深度实值状态时, 期限较长的欧式看涨期权才比期限较短的欧式看涨期权便宜.

当 T_1 时刻的资产价格接近于共同的敲定价格时, 日历差价期权在 T_1 时刻的收益更高.

3. 组合期权

组合期权是由具有相同标的资产的不同类型的期权所构成的投资组合. 一个典型的例子就是**底部跨式期权**(bottom straddle), 它可以通过同时买入具有相同敲定价格 X, 相同到期日 T 的看涨期权和看跌期权构造而成. 底部跨式期权在到期日的收益为

$$\max(S_T - X, 0) + \max(X - S_T, 0) = \begin{cases} X - S_T, & S_T \leqslant X, \\ S_T - X, & S_T > X. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

由于两个期权的头寸都是多头, 所以底部跨式期权需要一个初始的构造费用 $c+p$, 其中 c 和 p 分别为欧式看涨和看跌期权的期权费. 正如式 (1.1.6) 的最终收益所示, 底部跨式期权的最终收益图就像字母 "V", 其最终收益在 $S_T = X$ 时达到它的最小值 $-(c+p)$ (负的收益意味着损失). 在到期日, 当 S_T 接近于 X 时, 底部跨式期权的持有者将蒙受损失, 但是, 当 S_T 在任何方向上与 X 有很大偏离时, 他将获得巨大的收益.

组合期权的其他典型例子包括**看跌三合期权**(strip)、**看涨三合期权**(strap)、**宽跨式期权**(strangle)、**盒式差价期权**(box spread) 等. 读者可以通过习题 1.1~1.4 研究它们最终收益的特征.

根据自己想要的最终收益模式, 还可以构造出许多其他的差价期权和组合期权. 的确, 这就是期权交易相比单独标的资产交易的主要优点之一. 特别地, 蝶式差价期权的最终收益类似于一个三角形的 "钉子" 形状, 所以通过构造这些 "钉" 状的适当组合期权, 可以按照投资者的个人偏好近似得到想要的收益. 作为提醒, 上述提出的最终收益图显示了持有期权头寸到期时的投资组合策略的收益, 而在到期之前, 收益图是相当复杂的, 并且需要相关的期权定价模型来寻求某个特殊时刻投资组合的价值.

1.2 期权价格的合理边界

本节将建立期权价格关于标的资产价格的一些合理边界. 在这点上, 不会具体给出资产价格过程的概率分布, 因此, 就不能导出公平的期权价格. 但是, 试图推出合理的界限, 任何可接受的平衡价格在这些界限之间下跌. 基本假设是投资者宁可要更多的财富也不愿失去它, 并且市场不存在套利机会.

首先, 给出不分红标的资产的欧式与美式期权价格的合理边界. 期权价格作为敲定价格 X, 资产价格 S 和距离到期日的时间 τ 的函数, 得出其数学性质. 其次, 研究红利对期权价格合理边界的影响. 通过对期权价格边界的分析, 可以推断出不分红的美式期权的最佳实施策略, 还将推导出看涨与看跌期权之间的关系 (称为**看涨看跌期权的平价关系**(put-call parity relations)). 作为一个重要的说明性例子, 将把合理边界的分析以及看涨看跌期权的平价关系推广到外汇期权.

下面介绍现金的时间价值概念. 由于现金能够获得正利息, 所以现在的 1 美元一段时间后的价值将大于 1 美元, 这是人所共知的. 或者相反地, 在足够长的获息期后, 小于 1 美元的现金最终将变成 1 美元. 零息票是债券最简单的形式, 如果债券的发行者在到期日之前没有违约, 那么根据零息票债券合约的许诺, 他将在到期日支付债券的面值给其持有者. 令 $B(\tau)$ 是在到期日面值为 1 美元的无违约的零息票债券的当前价格, 其中 τ 为距离到期日的时间 (通常对债券用"到期", 对期权用"有效期"). 当无风险利率 r 为常数且利息为连续复利时, 债券价格 $B(\tau)$ 为 $e^{-r\tau}$. 当 r 不是常数而是 τ 的确定函数时, $B(\tau)$ 为 $e^{-\int_0^\tau r(u)\,du}$. 当利率是随机变量时 (见 7.2 节), $B(\tau)$ 的表达式将更为复杂. 债券价格 $B(\tau)$ 可被认为是 τ 期间的贴现因子.

在本书中, 用大写字母 C 和 P 分别表示美式看涨期权和看跌期权的价格, 用小写字母 c 与 p 分别表示欧式看涨期权和看跌期权的价格.

期权价格的非负性

所有期权的价格都是非负的, 即

$$C \geqslant 0, \quad P \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad p \geqslant 0. \tag{1.2.1}$$

式 (1.2.1) 可以由期权合约收益结构的非负性导出. 如果期权价格是负的, 那么就意味着期权买方不仅可以预先获得现金, 同时又可以保证获得非负的最终收益. 这样, 他总是能锁定一个无风险利润.

内在价值

设 $C(S,\tau;X)$ 表示美式看涨期权的价格函数, 它是当前资产价格 S, 距离到期的时间 τ 和敲定价格 X 的函数. 类似的符号可用于其他美式期权的价格函数. 在到期日 $\tau=0$, 最终收益为

$$C(S,0;X)=c(S,0;X)=\max(S-X,0), \tag{1.2.2a}$$

$$P(S,0;X)=p(S,0;X)=\max(X-S,0). \tag{1.2.2b}$$

通常, $\max(S-X,0)$ 和 $\max(X-S,0)$ 分别称为看涨和看跌期权的**内在价值**(intrinsic value). 由于美式期权在到期日之前的任何时刻都可以实施, 因此, 它们的价格一定不低于它们的内在价值, 即

$$C(S,\tau;X) \geqslant \max(S-X,0), \tag{1.2.3a}$$

$$P(S,\tau;X) \geqslant \max(X-S,0). \tag{1.2.3b}$$

由于 $C \geqslant 0$, 所以只需考虑 $S > X$ 的情况即可, 此时美式看涨期权处于实值状态. 假设当 $S > X$ 时, $C < S - X$, 那么套利者可以通过借 $C + X$ 美元来买入美式看涨期权, 并将其立即实施获得价值为 S 的资产, 从而锁定无风险利润. 此时, 无风险利润为 $S - X - C > 0$. 同理, 可以通过无套利原理来证明式 (1.2.3b) 成立.

然而, 由于欧式期权没有提前实施的特权, 所以条件 (1.2.3a) 和 (1.2.3b) 分别对于欧式看涨和看跌期权是不成立的. 确实, 当资产价格很低时, 欧式看跌期权的价格将低于内在价值 $X - S$; 当资产价格过高时, 分红的欧式看涨期权的价格则低于其内在价值 $S - X$.

美式期权的价格不低于相应的欧式期权的价格

美式期权拥有欧式期权的所有权利, 同时美式期权还拥有提前实施的特权. 显然, 这个附加的特权不可能具有负的价格. 因此, 美式期权的价格一定不低于相应的欧式期权的价格, 即

$$C(S,\tau;X) \geqslant c(S,\tau;X), \tag{1.2.4a}$$

$$P(S,\tau;X) \geqslant p(S,\tau;X). \tag{1.2.4b}$$

不同到期日的期权价格

考虑两个具有不同到期日 τ_2 和 $\tau_1(\tau_2 > \tau_1)$ 的美式期权, 由于在两个到期日之间, 期限较长的期权拥有实施期权的权利, 因此, 期限较长的期权价格一定不低于相应的期限较短的期权价格. 这个附加的权利具有正的价值, 因此有

$$C(S,\tau_2;X) > C(S,\tau_1;X), \quad \tau_2 > \tau_1, \tag{1.2.5a}$$

$$P(S,\tau_2;X) > P(S,\tau_1;X), \quad \tau_2 > \tau_1. \tag{1.2.5b}$$

由于欧式期权不具有提前实施的特权, 所以上述的结论对欧式期权不成立.

不同敲定价格的期权价格

考虑两个看涨期权, 可以是欧式期权, 也可以是美式期权, 敲定价格较高的期权比敲定价格较低的期权具有更低的期望利润. 这是因为严格地说, 敲定价格较高的看涨期权实施正收益的机会更少. 即使实施了期权, 现金流也很少. 因此, 看涨期权的价格函数是敲定价格的减函数, 即

$$c(S,\tau;X_2) < c(S,\tau;X_1), \quad X_1 < X_2, \tag{1.2.6a}$$

$$C(S,\tau;X_2) < C(S,\tau;X_1), \quad X_1 < X_2. \tag{1.2.6b}$$

通过和上述相反的讨论可知, 欧式和美式看跌期权的价格函数是敲定价格的增函数, 即

$$p(S,\tau;X_2) > p(S,\tau;X_1), \quad X_1 < X_2, \tag{1.2.7a}$$

$$P(S,\tau;X_2) > P(S,\tau;X_1), \quad X_1 < X_2. \tag{1.2.7b}$$

不同资产价格的期权价格

对于一个看涨 (看跌) 期权, 可以是欧式期权, 也可以是美式期权, 当目前资产价格很高时, 它有非常大 (小) 的机会去实施期权, 并且实施时会导致较大 (较小) 的现金流. 因此, 看涨 (看跌) 期权的价格函数是资产价格的增 (减) 函数, 即

$$c(S_2,\tau;X) > c(S_1,\tau;X), \quad S_2 > S_1, \tag{1.2.8a}$$

$$C(S_2,\tau;X) > C(S_1,\tau;X), \quad S_2 > S_1 \tag{1.2.8b}$$

和

$$p(S_2,\tau;X) < p(S_1,\tau;X), \quad S_2 > S_1, \tag{1.2.9a}$$

$$P(S_2,\tau;X) < P(S_1,\tau;X), \quad S_2 > S_1. \tag{1.2.9b}$$

看涨和看跌期权价格的上界

如果一个看涨期权的到期日无限长, 那么称它为**永久看涨期权**(perpetual call). 资产本身可以看成是一个具有零敲定价格加上附加特权 (如表决权和分红) 的永久美式看涨期权, 因此, 可以得到 $S \geqslant C(S,\infty;0)$. 利用条件 (1.2.4a) 和 (1.2.5a), 可以得到

$$S \geqslant C(S,\infty;0) \geqslant C(S,\tau;X) \geqslant c(S,\tau;X). \tag{1.2.10}$$

因此, 资产价格是美式与欧式看涨期权价格的上界. 更进一步, 在条件 (1.2.10) 中, 令 $S=0$, 并利用期权价格的非负性得到

$$0 = C(0,\tau;X) = c(0,\tau;X),$$

即当资产价格为零时, 看涨期权的价格为零.

当资产价格为零时, 美式看跌期权的价格等于敲定价格; 当资产价格不为零时, 敲定价格是美式看跌期权价格的上界. 结合条件 (1.2.4b) 有

$$X \geqslant P(S,\tau;X) \geqslant p(S,\tau;X). \tag{1.2.11}$$

不分红的看涨期权价格的下界

不分红的欧式看涨期权价格的下界至少等于或大于标的资产价格减去当前的敲定价格. 为了说明这个结论, 比较两个投资组合 A 和 B 的价值. 投资组合 A 是由一份不付红利的欧式看涨期权和面值为 X 的贴现债券所组成的, 并且它们的到期日相同. 投资组合 B 就是一份标的资产. 表 1.1 列出了两种不同情况 $S_T < X$ 和 $S_T \geqslant X$ 下两个投资组合的最终收益, 其中 S_T 表示到期日的资产价格.

表 1.1 投资组合 A 和 B 在到期日的收益

到期日资产价格	$S_T < X$	$S_T \geqslant X$
投资组合 A	X	$(S_T - X) + X = S$
投资组合 B	S_T	S_T
比较的结果	$V_A > V_B$	$V_A = V_B$

在到期日, 用 V_A 表示投资组合 A 的价值, 用 V_B 表示投资组合 B 的价值, V_A 大于或至少等于 V_B. 投资组合 A 优于投资组合 B. 投资组合 A (优势投资组合) 的现值一定等于或大于组合 B (受控投资组合) 的现值. 如果不然, 则可以通过买入投资组合 A 和卖出投资组合 B 获得套利机会. 上述结果可以表示为

$$c(S, \tau; X) + XB(\tau) \geqslant S.$$

结合期权价值的非负性, 欧式看涨期权价格的下界为

$$c(S, \tau; X) \geqslant \max(S - XB(\tau), 0).$$

根据条件 (1.2.10), 可以得到不分红的欧式看涨期权价格的上、下界为 (图 1.3)

$$S \geqslant c(S, \tau; X) \geqslant \max(S - XB(\tau), 0). \tag{1.2.12}$$

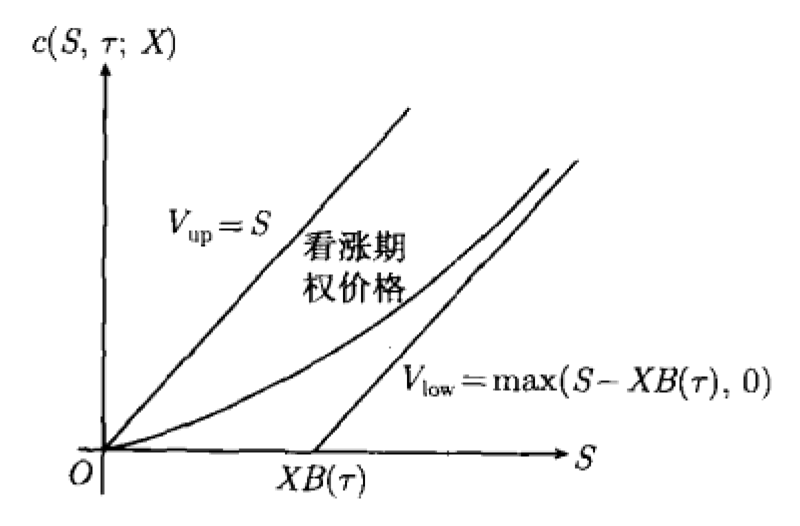


图 1.3 不分红的欧式看涨期权价格的上、下界分别为 $V_{\text{up}} = S$ 和 $V_{\text{low}} = \max(S - XB(\tau), 0)$

此外, 再次利用条件 (1.2.10) 可知, 上述的上、下界对于不分红的美式看涨期权也是成立的. 当标的资产分红时, 上述关于欧式期权价格的合理边界的结论将会改变 (见式 (1.2.14), (1.2.23)).

美式期权的提前实施策略

首先, 考虑不分红的美式看涨期权. 只有当美式看涨期权处于实值 $S > X$ 时, 它才会被实施. 在实施美式看涨期权的任何时刻, 它的实施收益 $S - X$ 都应该是正的. 但是, 实施价格小于 $\max(S - XB(\tau), 0)$, 即继续持有看涨期权时, 其价值的下界. 因此, 提前实施的做法会导致美式看涨期权价格的减少. 为了持有者的利益, 不分红的美式看涨期权不应当被提前实施. 由于丧失了提前实施的特权, 因此, 美式与欧式看涨期权的价格是一样的.

当标的资产分红时, 如果资产价格很高且红利很大, 那么在到期日前提前实施美式看涨期权是最佳的选择. 在这种情况下, 对于投资者来说, 通过提前实施比持有期权来获取资产更有吸引力. 当美式看涨期权处于深度实值状态, 即 $S \gg X$ 时, 提前实施它是不用后悔的 (失去期权合约的保护来防止资产价格下跌). 另一方面, 更早获得标的资产可得到标的资产支付的红利. 对于美式看跌期权, 不管资产是否分红, 当资产价格足够低时, 可以证明提前实施总是最优的 (见式 (1.2.16)). 在本节后面部分中, 将会更详细地讨论分红对美式期权提前实施策略的影响.

期权价格函数的凸性

看涨期权的价格是敲定价格的凸函数. 令 $X_2 = \lambda X_3 + (1-\lambda)X_1$, 其中 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1, X_1 \leqslant X_2 \leqslant X_3$. 在数学上, 凸性可以表述为下面的不等式:

$$c(S,\tau;X_2) \leqslant \lambda c(S,\tau;X_3) + (1-\lambda)c(S,\tau;X_1), \tag{1.2.13a}$$

$$C(S,\tau;X_2) \leqslant \lambda C(S,\tau;X_3) + (1-\lambda)C(S,\tau;X_1). \tag{1.2.13b}$$

图 1.4 给出了上述不等式的图形表示.

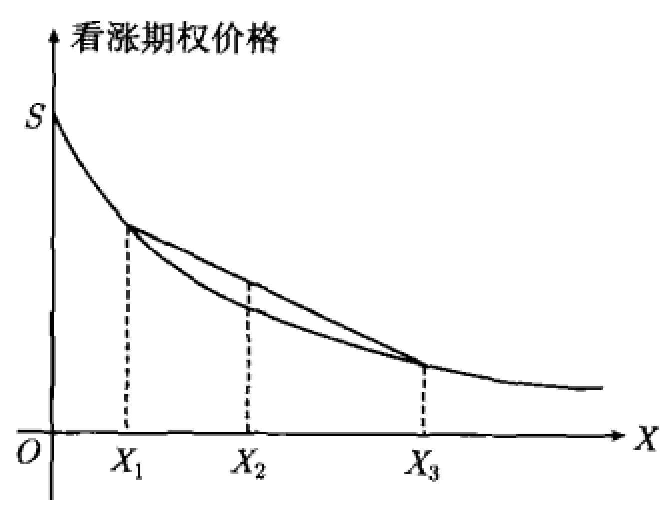


图 1.4　看涨期权价格是敲定价格 X 的凸函数, 当 $X=0$ 及 X 的最大值趋于 0 时, 看涨期权价格等于 S

为了证明不等式 (1.2.13a) 对欧式看涨期权成立, 考虑下述两个投资组合在到期日的收益. 投资组合 C 由 λ 份敲定价格为 X_3 的看涨期权以及 $(1-\lambda)$ 份敲定价格为 X_1 的看涨期权组成, 投资组合 D 由一份敲定价格为 X_2 的看涨期权组成. 在表 1.2 中, 列出了 S_T 的所有可能取值情况下的两个投资组合的最终收益.

表 1.2　投资组合 C 和 D 在到期日的收益

到期日资产价格	$S_T \leqslant X_1$	$X_1 \leqslant S_T \leqslant X_2$	$X_2 \leqslant S_T \leqslant X_3$	$X_3 \leqslant S_T$
投资组合 C	0	$(1-\lambda)(S_T - X_1)$	$(1-\lambda)(S_T - X_1)$	$\lambda(S_T - X_3) + (1-\lambda)(S_T - X_1)$
投资组合 D	0	0	$S_T - X_2$	$S_T - X_2$
比较的结果	$V_C = V_D$	$V_C \geqslant V_D$	$V_C \geqslant V_D$	$V_C = V_D$

由于对 S_T 的所有可能值 $V_C \geqslant V_D$, 所以投资组合 C 优于投资组合 D. 因此,

投资组合 C 的现值一定等于或大于投资组合 D 的现值, 故不等式 (1.2.13a) 成立. 在上述论证中, 并没有涉及 τ, 所以即使允许两个投资组合中的看涨期权提前实施, 上述结论也是成立的. 因此, 对美式看涨期权来说, 凸性依然成立. 通过改变上述两个投资组合中的看涨期权为对应的看跌期权, 类似于上面的讨论, 可以得出欧式与美式看跌期权的价格是敲定价格的凸函数.

此外, 利用看涨和看跌期权函数关于资产价格和敲定价格的线性齐次性, 可以证明看涨和看跌期权 (欧式或美式) 的价格是资产价格的凸函数 (见习题 1.7).

1.2.1 分红的影响

现在研究分红对期权价值合理边界的影响. 在接下来的讨论中, 假设红利的数额和支付日期是已知的. 一个重要的结论是: 如果在期权的有效期内分红, 那么提前实施美式看涨期权将是最佳的.

首先, 考虑红利对资产价格的影响. 当一种资产支付一定数量的红利时, 无套利原理表明资产价格也相应地减少了同等数额 (假设不存在其他因素影响收入, 如税收和交易费). 假设资产价格下跌的数量小于支付的红利数量, 那么通过在红利支付日前借钱买入资产, 然后在红利支付后卖出资产并还清贷款, 套利者就能锁定无风险利润. 套利者的净收益等于红利收入减去买卖交易中因资产价格的不同而造成的损失. 如果资产价格下跌的数量大于红利数量, 那么上述这种交易将采用相反的策略以获取套利利润.

令 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 分别表示从现在时刻到 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 时期支付的红利数额, D 表示现在和到期日之间所有已知的离散分红的现值. 假设利率是常数, 则有

$$D = D_1 e^{-r\tau_1} + D_2 e^{-r\tau_2} + \cdots + D_n e^{-r\tau_n},$$

其中 r 为无风险利率, $e^{-r\tau_1}, e^{-r\tau_2}, \cdots, e^{-r\tau_n}$ 为各自的贴现因子. 下面观察红利对于欧式看涨期权价值下界的影响, 以及依赖总的红利数额 D 的美式看涨期权的提前实施特征. 类似于表 1.1 中显示的两个投资组合, 将投资组合 B 修改为包含一份标的资产和数额为 D 的美金贷款 (以面值为 D_i 和距离到期的时间为 $\tau_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的债券组合的形式) 的投资组合. 在到期日, 投资组合 B 的价值始终是 S_T, 这是因为数额为 D 美金的贷款可以用期权有效期内收到的红利来偿还. 又观察到在到期日 $V_A \geqslant V_B$, 所以投资组合 A 的现值一定不低于投资组合 B 的现值. 再结合期权价值的非负性得到

$$c(S, \tau; X, D) \geqslant \max(S - XB(\tau) - D, 0). \tag{1.2.14}$$

式 (1.2.14) 给出了分红的欧式看涨期权价格新的下界. 由于标的资产的红利导致看涨期权价格变低, 所以当总的红利数额 D 足够大时, 很可能看涨期权的价格小

于其内在价值 $S-X$, 从而给出 D 满足的条件, 使得 $c(S,\tau;X,D)$ 小于其内在价值 $S-X$,

$$S-X>S-XB(\tau)-D \quad 或 \quad D>X[1-B(\tau)]. \tag{1.2.15}$$

如果 D 不满足以上条件, 那么提前实施美式看涨期权是不明智的. 除关于 D 的必要条件 (1.2.15) 以外, 美式看涨期权还必须处于足够深度实值状态, 提前实施它才不会后悔 (见 5.1 节). 由于在离散分红后, 标的资产价格必然下跌, 因此, 最佳的策略就是在分红前立即实施期权以获得资产分配的红利. 这种在红利支付日前后美式看涨期权的表现行为将在 5.1 节中详细讨论.

与持有看涨期权不同, 由于看跌期权价格是资产价格的减函数, 当离散分红后, 资产价格下降, 看跌期权的持有者将从中获利. 采用和上述类似的讨论 (考虑两个投资组合), 美式和欧式看跌期权的边界可以表示为

$$P(S,\tau;X,D)\geqslant p(S,\tau;X,D)\geqslant \max(XB(\tau)+D-S,0). \tag{1.2.16}$$

即使没有红利 ($D=0$), 当看跌期权处于足够深度实值 (对应于 S 价值很低) 时, 下界 $XB(\tau)-S$ 也可能小于内在价值 $X-S$. 由于美式看跌期权的持有者不能容忍期权价格低于其内在价值, 所以美式看跌期权应被提前实施. 红利的出现使得美式看跌期权提前实施的可能性变小, 因为当实施看跌期权资产被卖时, 持有者将损失未来的红利. 采用与 (1.2.15) 中类似的讨论, 可以证明当 $D\geqslant X[1-B(\tau)]$ 时, 提前实施美式看跌期权是不明智的. 红利对于美式看跌期权的提前实施策略的影响通常比美式看涨期权的情况更为复杂 (见 5.1 节).

标的资产可能给持有者带来**持有成本**(cost of carry), 如持有实物商品会有储藏费用和损坏费用. 对于美式期权的提前实施策略, 持有成本产生的影响与通过持有资产获得的红利产生的影响正好相反.

1.2.2 看涨–看跌期权的平价关系

看涨–看跌期权的平价关系是指看涨与看跌期权价格之间的关系. 对于一对具有相同标的资产、相同到期日及相同敲定价格的欧式看涨和看跌期权有

$$p=c-S+D+XB(\tau). \tag{1.2.17}$$

当标的资产不分红时, 设 $D=0$.

对上述看涨–看跌期权平价关系的证明是相当简单的. 考虑下面的两个投资组合. 第一个投资组合: 一份欧式看涨期权多头; 一个债券组合 (到期日为 τ_1 面值为 D_1 的贴现债券 …… 到期日为 τ_n 面值为 D_n 的贴现债券), 以及到期日为 τ 面值为 X 的贴现债券; 卖空一份资产. 第二个投资组合仅包含一份欧式看跌期权. 在第一个投资组合中债券的现值总和为

$$D_1B(\tau_1) + \cdots + D_nB(\tau_n) + XB(\tau) = D + XB(\tau).$$

债券面值与红利的数额相匹配, 它们用来弥补由于卖空资产而失去的红利. 在到期日, 两个投资组合具有相同的价值 $\max(X - S_T, 0)$. 由于两个欧式期权不能提前实施, 因此, 两个投资组合在期权的有效期内具有相同的价值. 根据这两个投资组合的价值相等, 就得到平价关系式 (1.2.17).

由于美式期权提前实施的特性, 以上的平价关系不能应用于美式看涨和看跌期权. 然而, 可以推出美式看涨和看跌期权价格之差的上界和下界. 首先, 假设标的资产不分红. 由于 $P > p$ 和 $C = c$, 从式 (1.2.17)(令 $D = 0$) 推得

$$C - P < S - XB(\tau),$$

给出了 $C - P$ 的上界. 考虑以下两个投资组合: 一个投资组合包含一份欧式看涨期权和数量为 X 的现金, 另一个投资组合包含一份美式看跌期权和一份标的资产. 易见第一个投资组合优于第二个投资组合, 因此有

$$c + X > P + S.$$

此外, 由于 $c = C$, 所以当资产不分红时, $C - P$ 的下界可以给出

$$S - X < C - P.$$

结合这两个边界, 对于不分红的美式看涨和看跌期权, 其价格之差的上、下界可以表示成

$$S - X < C - P < S - XB(\tau). \tag{1.2.18}$$

对于分红的情况, 右边的不等式 $C-P < S-XB(\tau)$ 同样成立, 因为红利使得看涨期权的价值减少、看跌期权的价值增加. 然而, 左边的不等式需被修改成 $S - D - X < C - P$ (见习题 1.8). 结合以上结论, 对于分红的美式看涨和看跌期权, 其价格之差的上、下界可表示成

$$S - D - X < C - P < S - XB(\tau). \tag{1.2.19}$$

1.2.3 外汇期权

现在, 将上述分析技巧推广到外汇期权中. 这里, 标的资产是一种外汇, 并且用本国货币来设定价格. 作为一个说明, 将美元视为本币, 日元视为外币. 在这种情况下, 一单位外币的即期本币价格 S 是指一单位日元的即期价值相当于多少美元, 比如说, 1 日元兑换 0.01 美元. 现在考虑本币和外币的利率. 令 $B_f(\tau)$ 表示一个具有单位面值和到期时间 τ 的不违约零息票债券的外币价格. 由于标的资产是外汇, 它连续获得无风险外币利率 r_f, 所以类似于连续分红的资产. 欧式和美式外汇期权价值的合理边界必须相应地修改.

外汇看涨和看跌期权的上、下界

首先, 考虑欧式外汇看涨期权的下界. 考虑如下两个投资组合: 投资组合 A 包含一份敲定价格为 X 的欧式外汇看涨期权和一份与看涨期权有同样到期日面值为 X 的本国贴现债券; 投资组合 B 包含一份单位外币面值的外国贴现债券, 此债券也和看涨期权有同样的到期日. 投资组合 B 的价值等于 $B_f(\tau)$ 的外币价格, 因此, 也等于 $SB_f(\tau)$ 的本币价格. 在看涨期权到期时, 投资组合 B 的价值变成一单位的外币价格, 相当于 S_T 的本币价格. 投资组合 A 的价值等于 $\max(S_T, X)$ 的本币价格, 因此, 投资组合 A 的价值大于或等于投资组合 B 的价值. 再结合期权价值的非负性, 得到

$$c \geqslant \max(SB_f(\tau) - XB(\tau), 0).$$

正如前面所述, 分红的美式看涨期权提前实施是最佳的. 回想一下, 最佳提前实施的必要 (不是充分) 条件是下界 $SB_f(\tau) - XB(\tau)$ 小于内在价值 $S - X$. 在目前情况下, 必要条件是

$$SB_f(\tau) - XB(\tau) < S - X \quad 或 \quad S > X\frac{1 - B(\tau)}{1 - B_f(\tau)}. \tag{1.2.20}$$

当条件 (1.2.20) 不满足时有 $C > S-X$. 提前实施美式外汇看涨期权将有 $C = S-X$, 其价值减少了. 因此, 提前实施美式外汇看涨期权不是最佳的选择. 总的来说, 美式和欧式外汇看涨期权价值的上界和下界为

$$S \geqslant C \geqslant c \geqslant \max(SB_f(\tau) - XB(\tau), 0). \tag{1.2.21}$$

同样可以证明, 美式外汇看跌期权的最佳提前实施的必要条件是

$$S < X\frac{1 - B(\tau)}{1 - B_f(\tau)}. \tag{1.2.22}$$

美式和欧式外汇看跌期权价值的上界和下界为

$$X \geqslant P \geqslant p \geqslant \max(XB(\tau) - SB_f(\tau), 0). \tag{1.2.23}$$

对应的欧式外汇看涨-看跌期权的平价关系为

$$p = c - SB_f(\tau) + XB(\tau), \tag{1.2.24}$$

美式外汇看涨和看跌期权差价的范围为 (见习题 1.11)

$$SB_f(\tau) - X < C - P < S - XB(\tau). \tag{1.2.25}$$

总之, 已经导出了看涨和看跌期权价格的合理边界以及它们的平价关系. 也分析了提前实施及分红对期权价格的影响. 一个重要的结论就是提前实施不分红的美式看涨期权是不明智的. 更加全面的有关期权价格函数解析性质的讨论可以参见 Merton (1973) 的开创性论文和 Smith (1976) 的综述文章.

1.3 远期和期货合约

回顾一下远期合约, 它是两个参与者之间的一份协议, 持有者同意在未来的交割时间 T 以事前确定的交割价格 K 从出售者那里购买一种资产. 期权合约的持有者要预先支付给出售者期权费, 而远期合约则不同, 在远期合约交易时, 不涉及提前支付费用. 选取远期合约的交割价格使得在合约刚生效时, 对于买卖双方而言, 远期合约的价值为零. **远期价格**(forward price) 可以定义为使远期合约的初始价值为零的交割价格. 当已经交易的远期合约的交割价格是确定时, 由于标的资产价格随后的波动, 在新的远期合约中远期价格易于改变.

假设在 7 月 1 日, 到期日为 10 月 31 日白银的远期价格的报价是 30 美元, 这意味着 30 美元是远期合约的多头 (空头) 方同意在到期日购买 (销售) 合同规定数量和质量的白银的价格 (交割时支付). 一周之后 (7 月 8 日), 由于这个星期内白银价格的波动导致交割日为 10 月 31 日的白银的远期价格的报价发生了变化, 如远期价格上涨到了 35 美元, 当具有相同到期日新的远期合约的价格上涨到 35 美元时, 由于交割价格固定为 30 美元, 从而 7 月 1 日开始的远期合约现在有了正的价值. 设想一下, 持有者在持有原有的远期合约时, 他可以出售另一个具有相同商品和到期日的远期合约. 在交割日 10 月 31 日那天, 这两个远期合约的相反头寸可以完全抵消. 持有者可以支付 30 美元去购买这个标的资产, 但卖掉该资产他将会得到 35 美元. 因此, 持有者在交割日可以获得 $35-30=5$ 美元的无风险收益. 回想一下, 在 7 月 1 日和 7 月 8 日当两个远期合约生效时, 持有者是没有支付任何费用的. 显然, 有一些价值与持有原有的远期合约有关. 这个价值与即期远期价格和固定交割价格有关. 对期权来说, 可以交替地使用术语 “价格” 和 “价值”, 但对远期合约来说, “远期价格” 和 “远期价值” 是两个不同的量.

1.3.1 远期合约的价值和价格

考虑标的资产在三种分红情况下的远期合约的定价公式, 即无红利、已知的离散红利和已知的连续红利收益.

不分红的资产

用 $f(S,\tau)$ 和 $F(S,\tau)$ 分别表示当前资产价值为 S 和到期时间为 τ 的远期合约的价值和价格, 并设 r 为连续无风险利率. 考虑一个投资组合, 它包含一份远期合约多头及一份具有相同到期日和以交割价格作为面值的债券. 债券价格是 $Ke^{-r\tau}$, 其中 K 为到期日的交割价格. 另一个投资组合包含一份标的资产. 在到期日, 用持有债券所获得的面值去购买一份资产以承兑远期合约. 在到期日, 两个投资组合的价值都是一份资产的价值. 假设资产不支付任何红利, 根据无套利原理, 两个投资

组合在到期日之前的任意时刻都应该具有相同的价值, 因而远期合约的价值为

$$f = S - Ke^{-r\tau}. \tag{1.3.1}$$

回顾一下, 把使远期合约价值为零的那个交割价格定义为远期价格. 在 (1.3.1) 中, 令 $f = 0$, 则 K 的价值为 $K = Se^{r\tau}$, 因而远期价格为 $F = Se^{r\tau}$, 这与式 (1.1.1) 一致. 结合欧式看涨和看跌期权的平价关系, 得到

$$f = (F - K)e^{-r\tau} = c(S, \tau; K) - p(S, \tau; K), \tag{1.3.2}$$

其中看涨和看跌期权的敲定价格等于远期合约的交割价格. 看涨–看跌期权的平价关系告诉我们, 持有一份看涨期权与持有一份看跌期权和一份远期合约是等效的.

离散分红的资产

现在, 假设在远期合约的有效期内, 资产是离散分红给持有者. 令 D 表示在远期的有效期内由资产支付的所有红利的现值. 为了寻求远期合约的价值, 修改上面的第二个投资组合, 使它包含一份资产和借入 D 美元的现金. 在到期日, 由于 D 美元的借款将由持有资产所获得的红利来偿还, 所以第二个投资组合的价值也是一份资产的价值. 因此, 在资产离散分红的情况下, 远期合约的价值可以表述为

$$f = S - D - Ke^{-r\tau}.$$

为了得到 K 的值, 令 $f = 0$, 从而得到远期价格为

$$F = (S - D)e^{r\tau} \tag{1.3.3}$$

连续分红的资产

接着, 假设资产以红利率 q 连续分红. 在整个有效期内连续分红, 并且在瞬时区间 dt 内红利数额为 $qS\,dt$, 其中, S 为当前的资产价格. 在这种红利情形下, 选择第二个投资组合包含 $e^{-q\tau}$ 份的资产, 同时, 所有的红利将用于再投资, 以获得额外份额的资产. 由于资产的份额数可被认为是以比率 q 连续复合增长, 因此, 在到期日第二个投资组合的价值将是一份资产的价值. 从这两个投资组合价值的等式可以得出连续分红的远期合约的价值为

$$f = Se^{-q\tau} - Ke^{-r\tau},$$

对应的远期价格为

$$F = Se^{(r-q)\tau}. \tag{1.3.4}$$

因为通过持有看跌期权、看涨期权或远期合约, 投资者没有权利获得任何红利, 因此, 看涨–看跌期权的平价关系 (1.3.2) 对于离散分红或连续分红的看跌期权、看涨期权或远期合约依然成立.

1. 利率平价关系

当考虑外汇的远期合约时, 标的资产 S 的价值是一单位外币的本币价格. 被看成是一种资产的外汇能以外国无风险利率 r_f 获得利息, 这相当于一个连续的红利率 r_f. 因此, 以一单位外币的本币价格作为标的资产远期合约的交割价格为

$$F = Se^{(r-r_f)\tau}. \tag{1.3.5}$$

式 (1.3.5) 被称为**利率平价关系**(interest rate parity relation).

2. 持有成本和便利收益

对于实物商品, 如粮食和工业用料, 持有资产可能有额外的费用, 如储藏、保险和损耗等费用. 简单地说, 这些额外费用可以看成是由资产所支付的负的红利. 假设用 U 表示在整个合约有效期内引起的所有额外费用的现值, 那么用 U 来代替 (1.3.3) 中的 $-D$ 就能获得远期价格. 因此, 远期价格为

$$F = (S+U)e^{r\tau}. \tag{1.3.6}$$

如果在任意时刻引起的额外持有费用都与商品的价格成一定比例, 那么它们可以看成是负的红利收益率. 如果 u 表示每年的费用, 它与即期商品价格成比例, 那么远期价格为

$$F = Se^{(r+u)\tau}. \tag{1.3.7}$$

用 u 来代替 (1.3.4) 中的 $-q$ 即得式 (1.3.7).

可以把 $r+u$ 理解成维持商品库存所引起的**持有成本**(cost of carry). 这部分花费由两部分组成: 一部分是用于投资资产而借入资金所付的利息费用; 另一部分是由于储藏、保险、损耗等所引起的持有费用. 为方便起见, 用 b 表示持有成本. 当标的资产以红利率 q 连续分红时, $b = r - q$. 一般地, 远期价格为

$$F = Se^{b\tau}. \tag{1.3.8}$$

持有这些商品的用户有一定的好处, 如可以避免短时间的供应不足和确保生产过程的正常运行. 这些好处可以看成是负的持有费用. 假设远期的市场价格 F 低于商品所有者的成本 $Se^{(r+u)\tau}$, 那么这两者的差别给出了实际持有商品所实现的收益的一种度量. 定义便利收益 (年收益) y 作为即期商品价格的比例, 这样, y 相对于 u 而言有负面的影响. 通过净化成本和收益, 远期价格为

$$F = Se^{(r+u-y)\tau}. \tag{1.3.9}$$

随着便利收益的出现, F 要小于 $Se^{(r+u)\tau}$, 这是由于乘积因子 $e^{-y\tau}$ 小于 1.

1.3.2　远期和期货价格的关系

远期合约和期货非常相似, 除了前者是在场外交易, 而后者是在交易所内交易以外. 由于交易所愿意组织交易使得违约风险变得最小, 因此, 在交易所购买期货的投资者必须在**保证金账户**(margin account) 内交纳保证金, 以防止违约 (期货合约在到期日不执行) 的可能性. 在每个交易日结束时, 通过保证金账户, 期货持有者将支付给出售者或从出售者那里收到当天期货价格改变的总数量, 这个过程称为**盯市账户**(marking to market the account). 因此, 在到期日购买标的资产所需要的费用仅仅就是当时的现货价格. 然而, 对一个在交易所外交易的远期合约, 在开始或合约的有效期内都没有资金的变化发生, 只在到期日才有现金交易发生. 由于支付方式的不同可能导致具有相同的标的资产和到期日的远期合约和期货的价格不同, 这要归因于应用于中间支付的利率可能是不同的. 在 8.1 节, 当利率是随机的且与标的资产价格过程正相关时, 证明了远期价格和期货价格为什么是不相同的.

这里, 当利率是常数时, 讨论远期和期货价格的关系式. 首先, 考虑一份远期合约和一份期货, 它们的有效期均为 n 天. 设 F_i 和 G_i 分别表示第 $i(i=0,1,\cdots,n)$ 天结束时远期价格和期货价格. 下面将证明 $F_0=G_0$. 令 S_n 表示到期日的资产价格, 每天的常数利率为 δ. 假设在第 0 天以一份期货多头开始, 在第 i 天期货的收益或损失是 (G_i-G_{i-1}), 在到期日, 即第 n 天结束时, 这个数量将上涨为 $(G_i-G_{i-1})\ e^{\delta(n-i)}$ 美元. 因此, 在第 n 天结束时一份期货多头的价值是 $(G_i-G_{i-1})\ e^{\delta(n-i)}$ 的总和, 其中 $i=1,\cdots,n$, 其和表示为

$$\sum_{i=1}^{n}(G_i-G_{i-1})\ e^{\delta(n-i)}.$$

每天收益或损失的总和反映了期货每日结算的特性.

在整个有效期内持有一份期货, 现在将其替换成投资者每天改变持有的期货份额. 假设在第 $i-1$ 天结束时持有 $\alpha_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 份期货, 其中 α_i 是确定的. 由于期货交易时没有费用, 在第 n 天结束时, 投资者的投资组合的价值为

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(G_i-G_{i-1})\ e^{\delta(n-i)}.$$

另一方面, 由于从第 0 天开始的远期合约的持有者在到期日能够以 F_0 美元购买价值 S_n 的标的资产, 所以在到期日一份远期多头的价值是 S_n-F_0. 现在, 考虑下面两个投资组合:

投资组合 A: 第 n 天到期面值为 F_0 的一份债券多头,

　　　　一份远期合约多头;

投资组合B:第n天到期面值为G_0的一份债券多头,

在第$i-1(i=1,2,\cdots,n)$天结束时持有$e^{-\delta(n-i)}$份的期货多头.

在到期日 (第 n 天最后), 投资组合 A 中债券和远期合约的价值分别为 F_0 和 S_n-F_0, 因此, 投资组合的总价值为 S_n. 对投资组合 B, 在到期日债券的价值为 G_0. 期货多头 (期货持有的单位数量每天一直在改变) 的价值中包含了一个调整数 $\alpha_i = e^{-\delta(n-i)}$. 于是有

$$\sum_{i=1}^{n} e^{-\delta(n-i)}\left(G_i - G_{i-1}\right) e^{\delta(n-i)} = \sum_{i=1}^{n}(G_i - G_{i-1}) = G_n - G_0.$$

因此, 在到期日投资组合 B 的总价值是 $G_0+(G_n-G_0)=G_n$. 因为期货价格在到期日必须等于资产价格 S_n, 所以有 $G_n=S_n$. 当投资组合 A 和投资组合 B 需要的最初投资分别为 $F_0e^{-\delta n}$ 和 $G_0e^{-\delta n}$ 美元时, 这两个投资组合在到期日有相同的价值. 在无套利机会的情况下, 这两个投资组合的最初价值应该是一样的. 因此, 可以得到 $F_0=G_0$, 即当期远期和期货的价格是相等的.

1.4 互换合约

互换是交易双方根据某些预定的规则同意与另一方交换现金流的金融合约. 本节将考虑两个重要类型的互换: 利率互换和货币互换. 利率互换具有将浮动利率贷款转换成固定利率贷款的作用, 或反之也成立. 货币互换能够用来将一种货币的贷款转换成另一种货币的贷款. 可以认为互换就是**一揽子的远期合约**(package of forward contracts). 探讨两个公司如何通过引入互换获得收益以及对现金流交换来说决定预定规则的金融基本原理将是有趣的事情.

1.4.1 利率互换

利率互换最通常的形式是固定利率对浮动利率互换, 通过应用固定利率到名义本金额来计算的一系列付款将转换成用浮动利率计算的付款数量. 在互换合约的有效期内, 净现金流交换将在指定的互换日进行. 最简单的形式是所有的付款都以相同的货币进行. 因为没有本金的交换发生, 所以本金被认为只是名义上的, 并且本金仅仅是用来计算在互换日定期交换的实际现金数额.

在利率互换中, 浮动利率来自货币市场利率之一, 如伦敦银行同业拆借利率 (LIBOR)、短期国库券利率、联邦基金利率等. 在它们之中, 最通常的选择是 LIBOR, 它是在给定的到期日第一流银行借款给其他的第一流银行欧洲美元的利率. 欧洲美元是指存放在美国境外的美国或外国银行的美元存款. LIBOR 涉及不同的期限, 如

一个月的 LIBOR 就是一个月的资金借贷利率等. 在浮动利率对浮动利率互换中, 用两个不同的参考浮动利率来计算兑换支付.

作为一个例子, 考虑一个 5 年的固定利率对浮动利率互换. 固定利率支付者同意每年支付 8% (以半年复利报价) 给浮动利率支付者, 浮动利率支付者同意支付 6 个月的 LIBOR 作为回报给对方. 假设在互换的整个有效期内每 6 个月将进行支付交换, 名义本金为 1000 万美元. 这就意味着每 6 个月固定利率支付者将支付数量为 1000 万 × 8% ÷ 2 = 40 万美元的固定利息, 但在支付前他将获得数量等于 1000 万美元乘以 6 个月的 LIBOR 一半的浮动利息. 例如, 假设 2008 年 4 月 1 日是互换的初始时间, 并且在那一天 6 个月的 LIBOR 是 6.2%. 在第一个互换日 (预定为 2008 年 10 月 1 日) 浮动利息支付为 1000 万 × 6.2% ÷ 2 = 31 万美元. 在这种方式下, 在第一个互换日, 固定利率支付者将支付给浮动利率支付者的净数量为 40 万 − 31 万 = 9 万 (美元).

浮动利率支付者所支付的利息类似于浮动利率贷款的利息, 这里在开始时设定利率, 并且在期末时按照利率支付利息. 这种类型的互换被称为标准的利率互换. 假设互换的参与者双方不发生违约, 标准的利率互换可以表示为固定利率债券与浮动利率债券的差价. 这个性质自然地导出一种有效的标准利率互换定价方法.

1. 标准利率互换的价值

考虑上述给出的 5 年固定对浮动标准利率互换的固定利率支付者. 根据 6 个月的 LIBOR, 固定利率支付者将得到半年的浮动利息. 支付利息的这种现金流与浮动利率债券产生的现金流是相等的, 其中该债券与互换具有相同的到期日、面值以及参考利率. 与浮动利率债券的持有者不同, 固定利率支付者在互换的到期日将不能得到名义资本. 另一方面, 他或她将按照固定利率半年支付一次利息, 这类似于与互换具有相同的固定利率、到期日和面值的固定利率债券的发行者.

我们发现标准利率互换中固定利率支付者的头寸可以通过在互换下浮动利率债券多头和固定利率债券空头来复制. 这两个标的债券与互换具有相同的到期日、面值和相应的参考利率. 因此, 对固定利率的支付者来说, 互换的价值就是浮动利率债券的价值减去固定利率债券的价值. 因为在固定利率对浮动利率互换中, 浮动利率支付者的头寸恰好与固定利率支付者的头寸相反, 所以对浮动利率的支付者和固定利率的支付者来说, 互换的价值也恰好是相反的. 总的来说有

$$V_{\text{fix}} = B_{\text{fl}} - B_{\text{fix}},$$

$$V_{\text{fl}} = B_{\text{fix}} - B_{\text{fl}},$$

其中 V_{fix} 和 V_{fl} 分别表示对固定利率支付者和浮动利率支付者来说利率互换的价值, B_{fix} 和 B_{fl} 分别表示标的固定利率债券和浮动利率债券的价值.

2. 利率互换在资产及债务管理中的应用

金融机构经常使用利率互换来改变其资产或债务的现金流特征, 以此达到某种管理的目标或锁定差价. 作为一个例子, 假设某银行拥有某种资产 (如贷款或债券), 该资产能获得 8%(年利率) 的半年固定利息. 为了给该资产提供资金, 银行发行了支付 6 个月的 LIBOR 加 60 基点 (1 个基点为 = 0.01%) 的存款凭证. 银行怎样才能锁定资金成本的差价呢? 这可以通过将资产产生的固定利率转换成浮动利率的收入来获得. 这种类型的交易称为**资产互换**(asset swap), 它是由同时购买资产以及实行利率互换所组成的. 假设下述的利率互换适合于银行:

每 6 个月银行支付 7%(年利率), 并且获得 LIBOR.

通过引入这个利率互换, 每 6 个月银行获得净固定利率 $8\% - 7\% = 1\%$ 的付款, 并且支付净浮动利率为 $(\text{LIBOR} + 60 \times 0.01\%) - \text{LIBOR} = 0.6\%$ 的付款. 通过这种方式, 银行能够锁定资金成本的 40 个基点的差价.

另一方面, 假设银行发行了年利率为 7% 每 6 个月支付一次的固定利率贷款. 通过**债务互换**(liability swap), 在利率互换中作为浮动利率的支付者, 银行能使得固定利率负债变为浮动利率负债. 也就是说, 每 6 个月银行将支付 LIBOR + 50 基点以及获得 7.2%(年利率) 的利息. 现在, 银行用借贷资本购买浮动利率债券, 使得获得的浮动利率票息可以用来支付利率互换中浮动利率的利息. 通过简单的计算, 如果浮动票息利率高于 LIBOR + 30 基点, 那么银行再次锁定资金成本的正差价.

1.4.2 货币互换

货币互换使得一种货币的贷款转变成另一种货币的贷款. 假设一个美国公司在英国为了给工程融资希望能获得英镑贷款. 另一方面, 一个英国公司想募集美元. 两家公司相对于在本国筹措国内资本而言, 筹集国外资本相当不易. 作为一个例子, 对两家公司来说, 关于两种货币, 考虑下面的固定贷款利率.

上述贷款利率表明, 相对于英国公司来说, 美国公司有更好的信誉, 因此, 它享受更低的贷款利率. 注意到在美元中贷款利率间的差价为 2%, 而英镑的差价只有 1.2%. 利用两种货币中贷款利率 $2\% - 1.2\% = 0.8\%$ 的差价, 就能构造一个货币互换, 使得两家公司能够获得理想型的资本以及利用好本国货币的低贷款利率 (表 1.3).

表 1.3 美国和英国公司以固定利率贷款

	US (美元)	UK(英镑)
美国公司	9.0%	12.4%
英国公司	11.0%	13.6%

令当前的货币汇率为 1 英镑 = 1.4 美元, 并且假设名义资本为 100 万英镑和

140 万美元. 首先, 两个公司从本国的放贷者手中借入本国货币资本. 也就是说, 美国公司以 9.0% 的利率借入 140 万美元的贷款, 英国公司以 13.6% 的利率借入 100 万英镑的贷款. 接着, 按照下述方式构造货币互换：在互换初期, 美国公司用 140 万美元的资本交换英国公司 100 万英镑的资本. 这样, 两家公司均获得了它们需要的资本. 在互换的有效期内, 美国公司将定期地以 12.4% 的英镑固定利率支付给英国公司, 作为回报, 它也可以从英国公司获得 9.4% 的固定美元利率. 在货币互换到期日, 美国公司将 100 万英镑的借贷资本返还给英国公司, 同时它从英国公司收回 140 万美元. 两家公司再将贷款返还给各自国家的放贷者. 两家公司之间的现金流归纳在图 1.5 中.

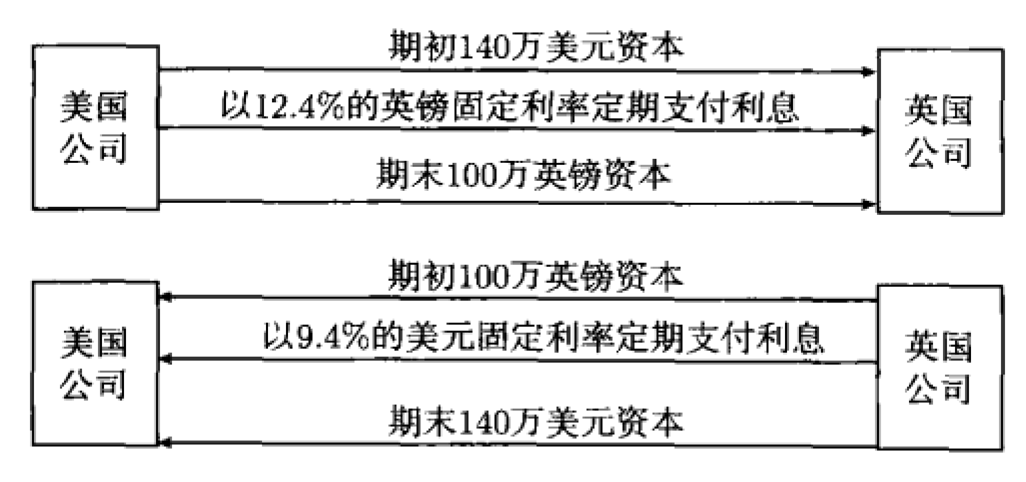


图 1.5　在货币互换中交易双方的现金流

在上述货币互换中交易双方的收益将是怎样的呢？美国公司支付了相同的固定英镑利率 12.4%, 但同时获得了 $9.4\% - 9.0\% = 0.4\%$ 的美元利率. 这是因为通过货币互换美国公司支付给本国的借贷者 9.0% 的利率, 但同时获得英国公司支付的 9.4% 的利率. 另一方面, 英国公司仅仅支付了 9.4% 的美元利率, 而不是 11.0% 的利率. 这表示虽然它在英镑利率上损失了 $13.6\% - 12.4\% = 1.2\%$ 的差价, 但是在美元利率上获得了 $11.0\% - 9.4\% = 1.6\%$ 的差价. 注意到支付的利率的净收益和损失是不同的货币, 因此, 在货币的互换中参与者要面对汇率风险.

1.5　习　　题

1.1　如何通过具有不同敲定价格, 但有相同到期日和相同标的资产的看跌期权构成蝶式差价期权的投资组合？画出在到期日差价期权相应的收益图.

1.2　**看跌三合期权**(strip) 是由具有相同敲定价格和相同到期日的一份看涨期权多头和两份看跌期权空头所构成的投资组合. 除了用两份看涨期权多头和一份看跌期权空头替换之外, **看涨三合期权**(strap) 类似于看跌三合期权. 画出看跌三合期权和看涨三合期权的最终收益图, 并且评价它们在控制风险敞口中所起的作用. 如何将它们与底部跨式组合比较？

1.3 **宽跨式期权**(strangle) 是一种交易策略, 投资者购买相同到期日但敲定价格不同的一份看涨期权和一份看跌期权. 看涨期权的敲定价格可以比看跌期权的敲定价格更高或更低 (当敲定价格相等时, 它就是跨式期权). 画出两种情况的最终收益图, 并讨论最终收益的特性.

1.4 **盒式差价期权**(box spread) 是由敲定价格为 X_1 和 X_2 的牛市看涨差价期权和具有相同敲定价格的熊市看跌差价期权构成的组合期权, 所有这 4 个期权均具有相同的标的资产和相同的到期日, 讨论盒式差价期权的特性.

1.5 假设敲定价格 X_1 和 X_2 满足 $X_2 > X_1$, 证明对不支付红利的欧式看涨期权, 其价格之差满足

$$-B(\tau)(X_2 - X_1) \leqslant c(S, \tau; X_2) - c(S, \tau; X_1) \leqslant 0,$$

其中 $B(\tau)$ 是面值为 1 和到期时间为 τ 的纯贴现债券的价值. 此外, 导出

$$-B(\tau) \leqslant \frac{\partial c}{\partial X}(S, \tau; X) \leqslant 0.$$

换句话说, 假设看涨期权的价格可以表示为敲定价格的可微函数, 那么导数一定是非正的, 并且绝对值不大于具有相同到期日的纯贴现债券的价格. 上述结论对支付红利的欧式或美式看涨期权也是成立的吗?

1.6 证明由各种具有相同到期日的单资产期权所构成的投资组合的价值至少等于由相同份额的每种标的资产构成的投资组合的单项期权的价值. 此单项期权称为**一篮子期权**(basket option). 用数学术语表述, 如对欧式看涨期权有

$$\sum_{i=1}^{N} n_i c_i(S_i, \tau; X_i) \geqslant c\left(\sum_{i=1}^{N} n_i S_i, \tau; \sum_{i=1}^{N} n_i X_i\right), \quad n_i > 0,$$

其中 N 表示投资组合中期权的数量, n_i 表示在篮子中资产 i 的份数.

1.7 证明看跌期权 (欧式和美式) 的价格是资产价格的凸函数, 即

$$p(\lambda S_1 + (1-\lambda)S_2, X) \leqslant \lambda p(S_1, X) + (1-\lambda)p(S_2, X), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

其中 S_1 和 S_2 表示资产价格, X 表示敲定价格.

提示: 设 $S_1 = h_1 X$ 和 $S_2 = h_2 X$, 注意到看跌期权的价格函数是关于资产价格和敲定价格的一次齐次函数, 那么上述不等式可以表述为

$$[\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2]p\left(X, \frac{X}{\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2}\right) \leqslant \lambda h_1 p\left(X, \frac{X}{h_1}\right) + (1-\lambda)h_2 p\left(X, \frac{X}{h_2}\right).$$

应用看跌期权的价格是敲定价格凸函数的性质.

1.8　考虑下面的投资组合:

投资组合 A: 一份欧式看涨期权加上货币市场存款中的 X 美元;

投资组合 B: 一份美式看跌期权, 一份标的资产和数量为 D 美元的贷款. 贷款是债券投资组合的形式, 并且债券的面值和到期日与离散分红的数量和时间相匹配.

假设标的资产分红, D 表示在期权有效期内标的资产支付的红利现值, 证明如果美式看跌期权不被提前执行, 那么投资组合 B 的价值 $\max(S_T, X)$ 小于投资组合 A 的价值; 即使美式看跌期权被提前执行, 投资组合 A 的价值在执行时刻始终大于投资组合 B 的价值. 由此导出

$$S - D - X < C - P.$$

提示: 对分红的看涨期权 $c < C$, 且在投资组合 A 中贷款 (债券) 的价值随时间而递增.

1.9　从看涨–看跌期权的平价关系导出不分红的欧式看跌期权价格的上界为

$$p \leqslant XB(\tau).$$

接着导出永久欧式看跌期权的价值为零. 在上述不等式中何时等号成立?

1.10　考虑欧式外汇看涨期权. 证明当 $S \to \infty$ 时,

$$c(S, \tau) \sim SB_f(\tau) - XB(\tau).$$

对以上结论作出相关的金融解释, 推导使得期限较短的欧式外汇看涨期权的价值大于期限较长的欧式外汇看涨期权的价值成立的条件.

提示: 利用看涨–看跌期权的平价关系 (1.2.24). 在非常高的汇率下, 欧式看涨期权在到期日几乎一定处于实值.

1.11　证明美式外汇看涨和看跌期权价格之差的上、下界为

$$SB_f(\tau) - X < C - P < S - XB(\tau),$$

其中 $B_f(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 分别为外国货币债券和本国货币债券的价格, 它们均在各自的货币中面值为 1 和到期时间为 τ, S 为一单位外币的即期本币价格.

提示: 为了证明左边的不等式, 考虑下面两个投资组合的价值: 第一个投资组合包含一份欧式外汇看涨期权和 X 美元的本币; 第二个投资组合包含一份美式外汇看跌期权和 $B_f(\tau)$ 单位的外币. 为了证明右边的不等式, 选择第一个投资组合包含一份美式外汇看涨期权和 $XB(\tau)$ 美元的本币, 第二个投资组合包含一份欧式外汇看跌期权和一单位的外币.

1.12 假设敲定价格随着无风险利率逐步增加, 证明美式看跌期权的价格与相应的欧式看跌期权的价格是相同的.

提示: 证明提前实施美式看跌期权不是一种最佳策略.

1.13 考虑一份远期合约, 其标的资产在 $t_j(j=1,2,\cdots,M-1)$ 时刻具有持有成本 c_j, 其中 t_M 为远期合约的到期日. 为了标记简单起见, 记互换合约的初始时间为 t_0. 假设资产可以卖空. 令 S 表示在初始时刻资产的即期价格, d_j 表示到期日收到的现金在 t_j 时刻的贴现因子. 证明这个远期合约的远期价格 F 为

$$F=\frac{S}{d_0}+\sum_{j=1}^{M-1}\frac{c_j}{d_j}.$$

1.14 考虑一年期的远期合约, 其标的资产是一个支付息票的债券, 此债券的到期日超过远期合约的到期日. 假设债券以 8% 的息票利率每半年支付利息, 债券的面值为 100 美元 (即每次息票支付为 4 美元)、债券的当前市场价格为 94.6 美元, 并且前面的息票已经支付. 令无风险年利率是 10% 的常数值, 求出这个债券远期合约的远期价格.

提示: 息票支付可以被认为是负的持有成本.

1.15 考虑一份名义本金为一百万美元和距离到期日 9 个月的利率互换, 互换条款指定 6 个月的 LIBOR 与 10% 的固定年利率交换 (以半年复利报价). 现在距离到期日为 3 个月和 9 个月的单位面值的零息债券的市场价格分别为 0.972 美元和 0.918 美元, 而现在距离到期日为 3 个月的单位面值的浮动利率债券的市场价格为 0.992 美元. 假设互换的参与者没有违约风险, 对固定利率的支付者, 求出利率互换的价格.

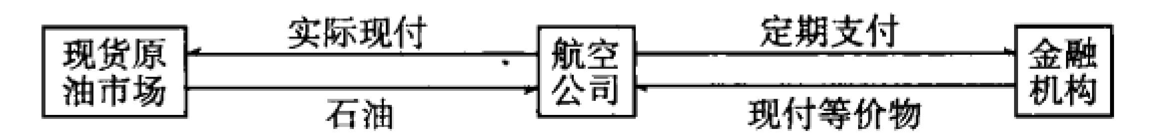
1.16 金融机构 X 与另一机构 Y 签订了一份 5 年货币互换协议. 互换合约规定 X 收到对方以欧元支付的 4% 的固定年利率, 同时用美元支付给对方 6% 的固定年利率. 本金金额为 1000 万美元和 1300 万欧元, 每半年交换支付利息一次. 假设 Y 在互换开始后第三年末违约, 求出对方 X 的重置成本. 假设违约时刻的汇率是 1 欧元兑换 1.32 美元, 并且所有期限的美元和欧元的现行利率分别为 5.5% 和 3.2%.

1.17 假设两个金融机构 X 和 Y 面临如下表所示的贷款利率:

	X	Y
美元浮动利率	LIBOR + 2.5%	LIBOR + 4.0%
英镑固定利率	4.0%	5.0%

假设 X 希望以固定利率借入英镑, Y 希望以浮动利率借入美元. 怎样安排一份货币互换, 使得参与双方均能获益.

1.18　考虑一家为了保证运行必须定期 (如每三个月) 购买原油的航空公司. 为了避免现货市场上燃油价格的波动, 公司希望与某个金融机构签订一份**商品互换**(commodity swap) 合约. 下面的示意图显示了商品互换中的支付流.



在商品互换的条款下, 航空公司在每个互换日将得到某一数量单位原油的即期价格, 同时支付给对方每单位固定数量 K. 令 $t_i(i=1,2,\cdots,M)$ 表示互换日, d_i 表示 t_i 时刻收到的现金在互换初始日的贴现因子, F_i 表示在 t_i 时刻得到一单位原油的远期价格, K 为由航空公司向互换的对方支付的每单位的固定付款. 假设选取 K, 使得商品互换的初始价格是零, 证明

$$K=\frac{\sum_{i=1}^{M} d_i F_i}{\sum_{i=1}^{M} d_i},$$

即固定利率是一个以相应贴现因子为权重在互换日到期的远期合约价格的加权平均.

1.19　考察愿意将浮动利率贷款变为固定利率贷款 (反之也成立) 的两家公司, 在安排两个不同的利率互换时, **金融中介**(financial intermediary) 的作用. 考虑下面的情况:

公司 A 的目标是将每年支付 6.2% 的固定利率贷款变为支付 LIBOR+ 0.2% 的浮动利率贷款;

公司 B 的目标是将支付 LIBOR+ 2.2% 的浮动利率贷款变为每年支付 8.4% 的固定利率贷款.

安排一个利率互换, 而不是这两家公司直接接触, 金融中介怎样设计两家公司不同的利率互换, 以确保获得贷款利率差价的利润.

第2章　金融经济学和随机分析

第 1 章研究了如何应用无套利原理实施远期合约中的远期价格. 可实施的远期价格不是在远期合约的到期日由资产价格的期望给出的. 对市场中的资产而言, 衍生产品的复制和无套利原理的使用形成了衍生产品定价模型的基石. 例如, 一个看涨期权可以由一个看跌期权和一个远期合约的组合所复制. 更有趣的是, 一个欧式期权可以由一个包含标的资产和无风险资产的投资组合进行动态复制 (以货币市场存款的形式). 假设市场是无摩擦的且期权合约不可提前实施, 如果期权的收益与到期时复制投资组合的价值是一致的, 那么通过无套利原理可以证明在期权的有效期内, 期权的价值始终等于复制投资组合的价值. 如果每个衍生产品都由市场中可利用资产的投资组合所复制, 那么这个市场被称为完全市场. 因此, 在复制投资组合中, 基于市场资产的价格就能确定衍生产品的价格.

在本章中, 应用金融经济学的理论来证明无套利条件等价于存在一个等价鞅测度. 这个重要的结果被称为**资产定价基本定理**(fundamental theorem of asset pricing). 使用术语"鞅测度"是因为在这个测度下, 所有风险资产的贴现价格过程都是一个鞅, 而且这个鞅测度等价于给出现实世界各种状况发生的真实概率的实际测度. 进一步, 如果市场是完全的 (所有未定权益都能被复制), 那么等价鞅测度是唯一的. 在等价鞅概率测度下 (Harrison and Kreps, 1979), 可以证明任何未定权益的复制基本价格都可以通过计算贴现最终收益的期望值得到, 这个方法被称为风险中性定价. 使用风险中性这个术语是由于市场中所有的资产在这个测度下作为无风险资产获得相同的回报, 所以对于一个具有风险中性态度, 并且面临这种可能性的投资者而言, 持有不同的资产将是无关紧要的. **可复制的未定权益**(replicable contingent claims)、**无套利**(absence of arbitrage) 和**风险中性**(risk neutrality) 的概念构成了现代期权定价理论的基石.

前面仅限于讨论离散时间证券模型. 2.1 节开始研究单时段证券模型. 讨论单价定律、不存在占优交易策略、线性价格测度和无套利等概念. 在无套利的假设下, 对未定权益的价值运用分离超平面定理导出了风险中性测度的证明. 2.2 节讨论多时段证券模型, 开始建立证券模型的信息结构, 给出概率理论中的各种概念, 如域流、可测随机变量、条件期望和鞅等. 在多时段状态下, 风险中性概率测度用术语鞅来定义. 需要强调的是资产定价基本定理的来源. 关于金融经济学相关概念更详细的阐述可参见 Pliska(1997) 以及 LeRoy 和 Werner(2001) 的相关文献.

衍生产品的定价最初依赖于标的资产价格的随机过程. 在本书中, 大多数资产价格过程都可以通过 Itô 过程来得到模型. 对股票价格, 它们由一种普遍类的 Itô 过程, 即几何布朗过程来刻画. 在 2.3 节中, 简单介绍布朗过程. 从离散随机游动模型开始, 并且把布朗过程看成是随机游动过程的连续极限, 导出了控制布朗过程转移密度函数的向前 Fokker-Planck 方程. 在最后一节中, 介绍一些随机分析中的基本工具, 特别是随机积分和随机微分的概念, 阐明布朗路径的不可微性, 给出了 Itô 引理的直观证明, 它是分析随机状态变量函数的必要工具, 也将讨论 Feynman-Kac 表示定理、Radon-Nikodym 导数和 Girsanov 定理. Girsanov 定理提供了将带有一般漂移率的 Itô过程转换成鞅的一个有效工具. 在随机分析中, 这些预备知识对发展期权定价理论和在以后几章中导出期权价格公式是必不可少的.

2.1 单时段证券模型

无套利方法是研究金融衍生产品定价理论的基石之一. 简单地说, 套利就是在不可能损失的情况下使投资获利的可能性 (套利的严格定义将在后面给出). 在运作良好和有竞争的金融市场中, 不存在套利机会是最通常的假设.

在本节中, 在单时段证券模型的框架下讨论金融经济学的各种概念. 一系列有限证券在 $t=0$ 时刻作出投资决定, 并且在到期日 $t=1$ 时得到收益. 虽然单时段模型并不反映投资活动在复杂世界的现实表现, 但是能从单时段证券模型的分析中揭示出许多金融经济学中的基本概念. 同时, 单时段投资模型与购买并长期持有投资策略是相当近似的.

2.1.1 占优交易策略和线性价格测度

在单时段证券模型中, 风险证券 M 的初始价格表示为 $S_1(0),\cdots,S_M(0)$, 它们在 $t=0$ 时刻为正标量. 然而, 这些值在 $t=1$ 时刻是随机变量. 这些随机变量的定义与一个在现实世界中有 K 种可能状态的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_K\}$ 有关. 当 $t=0$ 时, 投资者知道资产价格在 $t=1$ 时列出的所有可能结果, 但哪种结果会发生, 只有在投资期的终止时刻才知道. 此外, 一个定义在 Ω 上的概率测度 P 满足对所有的 $\omega\in\Omega$, $P(\omega)>0$.

用 $\mathbf{S}$ 表示价格过程 $\{\mathbf{S}(t):t=0,1\}$, 其中 $\mathbf{S}(t)$ 为行向量 $\mathbf{S}(t)=(S_1(t),S_2(t),\cdots,S_M(t))$. 资产价格过程在 $t=1$ 时刻的可能值由如下的 $K\times M$ 阶矩阵来表示:

$$S(1;\Omega)=\begin{pmatrix} S_1(1;\omega_1) & S_2(1;\omega_1) & \cdots & S_M(1;\omega_1) \\ S_1(1;\omega_2) & S_2(1;\omega_2) & \cdots & S_M(1;\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1(1;\omega_K) & S_2(1;\omega_K) & \cdots & S_M(1;\omega_K) \end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

由于资产是有限责任证券, $S(1;\Omega)$ 中的元素是非负标量. 也假设存在严格正的无风险证券和货币市场存款, 它们的值用 S_0 表示. 不失一般性, 取 $S_0(0)=1$, 在时刻 1 的值为 $S_0(1)=1+r$, 其中 $r\geqslant 0$ 为在一个周期上的确定利率. $S_0(1)$ 的倒数被称为在一个周期上的贴现因子. 定义贴现价格过程为

$$\mathbf{S}^*(t)=S(t)/S_0(t), \quad t=0,1,$$

即用无风险证券作为**计价单位**(numeraire 或 accounting unit). 相应地, 风险资产 M 和无风险证券的贴现价格过程的收益矩阵可以表示为下面的形式:

$$\widehat{S}^*(1;\Omega)=\begin{pmatrix} 1 & S_1^*(1;\omega_1) & \cdots & S_M^*(1;\omega_1) \\ 1 & S_1^*(1;\omega_2) & \cdots & S_M^*(1;\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_1^*(1;\omega_K) & \cdots & S_M^*(1;\omega_K) \end{pmatrix}. \tag{2.1.2}$$

在 $\widehat{S}^*(1;\Omega)$ 中的第一列 (所有元素都等于 1) 表示无风险证券在所有状态下的贴现收益. 同时, 定义与无风险证券和风险证券 M 有关的贴现价格过程的向量为

$$\widehat{\mathbf{S}}^*(t)=(1,S_1^*(t),\cdots,S_M^*(t)), \quad t=0,1.$$

投资者通过选择在 0 时刻资产的投资组合来决定**交易策略**(trading strategy). 从 $t=0$ 到 $t=1$ 时在投资组合中持有第 m 个资产份额记为 $h_m(m=0,1,\cdots,M)$. 标量 h_m 可以是正的 (多头持有)、负的 (卖空) 或零 (不持有).

令 $V=\{V_t:t=0,1\}$ 表示在整个时段上投资组合总价值的价值过程, 则有

$$V_t=h_0S_0(t)+\sum_{m=1}^{M}h_mS_m(t), \quad t=0,1. \tag{2.1.3}$$

由于在第 m 个风险证券上的投资收益为 $h_m[S_m(1)-S_m(0)]=h_m\Delta S_m$, 令 G 表示在投资组合中由投资所产生的总收益的随机变量, 则有

$$G=h_0r+\sum_{m=1}^{M}h_m\Delta S_m. \tag{2.1.4}$$

如果在投资范围内不撤回或增加资金, 则

$$V_1=V_0+G. \tag{2.1.5}$$

用 $V_t^*=V_t/S_0(t)$ 定义贴现价格过程和贴现收益为 $G^*=V_1^*-V_0^*$, 那么可以得到

$$V_t^*=h_0+\sum_{m=1}^{M}h_mS_m^*(t), \quad t=0,1, \tag{2.1.6a}$$

$$G^* = V_1^* - V_0^* = \sum_{m=1}^{M} h_m \Delta S_m^*. \tag{2.1.6b}$$

1. 占优交易策略

令 $\mathcal{H}$ 表示在投资组合中涉及选择持有资产份额的交易策略. 交易策略 $\mathcal{H}$ 被称为占优的, 如果存在另一种交易策略 $\widehat{\mathcal{H}}$, 使得对所有的 $\omega \in \Omega$ 有

$$V_0 = \widehat{V}_0 \quad 和 \quad V_1(\omega) > \widehat{V}_1(\omega), \tag{2.1.7}$$

其中 $\widehat{V}_0$ 和 $\widehat{V}_1$ 分别表示在 $t=0$ 和 $t=1$ 时刻 $\widehat{\mathcal{H}}$ 的投资组合价值. 从金融意义上来说, 策略 $\mathcal{H}$ 和 $\widehat{\mathcal{H}}$ 都是从同样的初始投资额开始的, 但是占优策略 $\mathcal{H}$ 在所有可能的状态下获得更高的收益.

假设 $\mathcal{H}$ 优于 $\widehat{\mathcal{H}}$, 定义一个新的交易策略 $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \widehat{\mathcal{H}}$. 令 $\widetilde{V}_0$ 和 $\widetilde{V}_1$ 分别表示 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 时投资组合的价值. 从式 (2.1.7) 可以知道 $\widetilde{V}_0 = 0$ 以及对所有的 $\omega \in \Omega$, $\widetilde{V}_1 > 0$. 因为它优于一种从 0 值开始并丝毫不作任何投资的策略, 所以这种投资策略是占优的. 允许这种占优交易策略存在的证券模型是不现实的, 因为一个投资者开始没有钱并不能保证通过采取某种特殊的交易策略最终得到正的收益. 等价地, 能证明占优交易策略可以将在 $t=0$ 时刻严格负的财富转变成 $t=1$ 时刻一个非负的财富 (见习题 2.1). 接下来, 证明为什么占优策略的不存在性等价于线性价格测度的存在性.

2. 资产扩张、单价定律和状态价格

考虑下列几个例子, 其中可能的状态数量取为三种. 首先, 考虑两个贴现收益向量为$\mathbf{S}_1^*(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{S}_2^*(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$的风险证券. 收益矩阵 $S^*(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 是由收益向量构成的. 用行变量 $\mathbf{S}^*(0) = (1, 2)$ 表示当前的贴现价格. 记 $\mathbf{h}$ 表示列变量, 其中的元素为投资组合中证券的权重. 当前贴现的投资组合价值和贴现的投资组合收益分别用 $\mathbf{S}^*(0)\mathbf{h}$ 和 $S^*(1)\mathbf{h}$ 来表示. 当 $S_0^*(0) = 1$ 时, 当前投资组合的价值和贴现的投资组合价值是相同的.

以持有不同证券组成的所有投资组合收益的集合称为**资产扩张**(asset span)$\mathcal{S}$. 资产扩张可以看成是收益矩阵 $S^*(1)$ 的列向量. 在这个例子中, 资产扩张由形式为$h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的所有向量组成, 其中 h_1 和 h_2 为标量.

对于投资组合中的两个证券, 可以加入第三个证券或者更多的证券. 这些新增加的证券可以放入, 也可以不放入资产扩张内. 如果新增加的证券放入 $\mathcal{S}$ 中, 那

么它的收益可以表示成 $\mathbf{S}_1^*(1)$ 和 $\mathbf{S}_2^*(1)$ 的线性组合. 在这个情况下, 它称为**冗余证券**(redundant security). 由于只有三种可能的状态, 所以资产扩张的维数不可能超过 3, 也就是非冗余证券的最大数目是 3. 假设加入贴现收益是 $\mathbf{S}_3^*(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 的第三个证券, 很容易可以检验出它是非冗余证券. 如果在 $\mathbb{R}^3$ 中, 子空间由 $\mathbf{S}_1^*(1), \mathbf{S}_2^*(1)$ 和 $\mathbf{S}_3^*(1)$ 所张成, 那么这个新的资产扩张就是整个 $\mathbb{R}^3$ 空间. 任何增加的证券一定是多余的, 因为它的贴现收益向量必须加入到新的资产扩张中. 如果每一个收益向量都在资产扩张中, 那么称证券模型为**完全的**(complete). 当且仅当资产扩张的维数等于可能状态的数量时, 这种情况才发生. 在这种情况下, 任何加入到证券模型中的新证券都一定是冗余证券.

单价定律是论述所有具有相同收益的投资组合应具有相同的价格. 考虑两个具有不同投资组合权重 $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{h}'$ 的投资组合. 假定这两个投资组合有相同的贴现收益, 即 $S^*(1)\mathbf{h} = S^*(1)\mathbf{h}'$, 那么由单价定律得 $\mathbf{S}^*(0)\mathbf{h} = \mathbf{S}^*(0)\mathbf{h}'$. 容易证明单价定律成立的一个充分条件是具有零收益的投资组合, 其价格必为零. 当且仅当收益矩阵 $S^*(1)$ 的零空间的维数为零时, 这种情况才发生. 也就是说, 如果单价定律不成立, 则可能有两个交易策略 $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{h}'$, 使得 $S^*(1)\mathbf{h} = S^*(1)\mathbf{h}'$, 但是 $\mathbf{S}^*(0)\mathbf{h} > \mathbf{S}^*(0)\mathbf{h}'$. 设 $G^*(\omega)$ 和 $G^{*\prime}(\omega)$ 分别表示对应于交易策略 $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{h}'$ 的贴现收益, 那么可以得到 $G^{*\prime}(\omega) > G^*(\omega)$ 对于所有的 $\omega \in \Omega$ 成立, 因此, 存在一个占优交易策略. 因此, 占优交易策略的不存在性表明单价定律的成立. 然而, 反之则不成立 (见习题 2.4).

给定一个位于资产扩张中的贴现投资组合收益 $\mathbf{x}$, 则该收益可以由证券模型中的一些证券的线性组合生成. 对某个 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M$ 有 $\mathbf{x} = S^*(1)\mathbf{h}$. 投资组合的当前贴现价值为 $\mathbf{S}^*(0)\mathbf{h}$, 其中 $\mathbf{S}^*(0)$ 为贴现价格向量. 可以将 $\mathbf{S}^*(0)\mathbf{h}$ 看成是关于收益 $\mathbf{x}$ 的价格函数 $F(\mathbf{x})$. 如果单价定律成立, 那么此时价格函数是单值的, 而且可以证明它是一个线性函数, 即

$$F(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1 F(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 F(\mathbf{x}_2) \tag{2.1.8}$$

对于任意标量 α_1, α_2 和收益 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 都成立 (见习题 2.5).

令 $\mathbf{e}_k$ 表示向量空间 $\mathbb{R}^K$ 中的第 k 个坐标向量, 其中假设 $\mathbf{e}_k$ 的第 k 个分量值为 1, 所有其他分量值为 0. 向量 $\mathbf{e}_k$ 可以看成是一个证券的贴现收益向量, 它也被称为状态 k 的 Arrow 证券. 这个 Arrow 证券当状态 k 发生时有单位收益; 否则, 为零收益. 假设证券模型是完全的且单价定律成立, 那么价格函数 F 分配唯一的值给每个 Arrow 证券, 记为 $s_k = F(\mathbf{e}_k)$, 称之为状态 k 的状态价格.

考虑在 $t = 1$ 时用

$$\mathbf{S}^*(1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix}$$

表示的具有贴现收益的风险证券, 那么这个风险证券的现价为

$$S^*(0) = F(\mathbf{S}^*(1)) = F\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k s_k.$$

3. 线性价格测度

考虑一个包含无风险证券的证券模型. 如果对每个交易策略, 在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 时, 相关的贴现投资组合的价值满足

$$V_0^* = \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) V_1^*(\omega_k), \tag{2.1.9}$$

则称非负的行向量 $\mathbf{q} = (q(\omega_1), \cdots, q(\omega_K))$ 为线性价格测度. 线性价格测度有下列性质. 首先, 假设取每个风险证券的持有数量为零, 即 $h_1 = h_2 = \cdots = h_M = 0$. 如果在投资组合中有唯一的无风险资产, 则有

$$V_0^* = h_0 = \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) h_0,$$

使得

$$\sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) = 1. \tag{2.1.10}$$

因为已经取 $q(\omega_k) \geqslant 0 (k = 1, \cdots, K)$ 且它们的和为 1, 因此, 可以认为 $q(\omega_k)$ 是样本空间 Ω 中的概率测度. 其次, 除了第 m 个证券以外, 通过取投资组合中的权重为 0, 则有

$$S_m^*(0) = \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) S_m^*(1; \omega_k), \quad m = 1, \cdots, M. \tag{2.1.11a}$$

在线性价格测度 $q(\omega_k)$ 下, 当前贴现证券价格是由一个周期后贴现证券收益期望给出的. 注意到 $q(\omega_k)$ 与 k 状态发生的实际概率无关. 以矩阵的形式, 方程 (2.1.11a) 可以表示为

$$\widehat{\mathbf{S}}^*(0) = \mathbf{q}\widehat{S}^*(1; \Omega), \quad \mathbf{q} \geqslant \mathbf{0}. \tag{2.1.11b}$$

作为一个数值例子, 考虑包含两个风险证券和一个无风险证券的证券模型, 而且有三种可能状态. 当前贴现证券价格 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0) = (1, \quad 4, \quad 2)$, 并且在 $t = 1$ 时的贴

现收益矩阵为$\widehat{S}^*(1)=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$. 这里因为 $\widehat{S}^*(1)\mathbf{h}=\mathbf{0}$ 的唯一解是 $\mathbf{h}=\mathbf{0}$, 故单价定律成立. 因为 $\widehat{S}^*(1)$ 的列是互相独立的, 于是 $\widehat{S}^*(1)$ 的零空间的维数为 0. 借助于式 (2.1.10) 和 (2.1.11a), 线性价格概率 $q(\omega_1),q(\omega_2)$ 和 $q(\omega_3)$ 如果存在, 则应该满足下列系统的线性方程:

$$\begin{aligned}1&=q(\omega_1)+q(\omega_2)+q(\omega_3),\\4&=4q(\omega_1)+3q(\omega_2)+2q(\omega_3),\\2&=3q(\omega_1)+2q(\omega_2)+4q(\omega_3).\end{aligned}$$

解上述方程得到 $q(\omega_1)=q(\omega_2)=2/3$ 和 $q(\omega_3)=-1/3$. 由于不是所有的价格概率都是非负的, 所以对这个证券模型, 线性价格测度是不存在的.

对上述证券模型, 占优交易策略存在吗? 也就是说, 能否找到一个交易策略 $(h_1,\ h_2)$, 使得 $V_0^*=4h_1+2h_2=0$, 但 $V_1^*(\omega_k)>0(k=1,2,3)$? 这等价于要求是否存在 h_1 和 h_2, 使得 $4h_1+2h_2=0$ 且

$$\begin{cases}4h_1+3h_2>0,\\3h_1+2h_2>0,\\2h_1+4h_2>0.\end{cases}\tag{2.1.12}$$

在图 2.1 中, 证明区域包含 h_1h_2 平面中满足不等式 (2.1.12) 的点集. 这个区域位于上述两个粗线的右上方: ① $3h_1+2h_2=0(h_1<0)$, ② $2h_1+4h_2=0(h_1>0)$. 可以

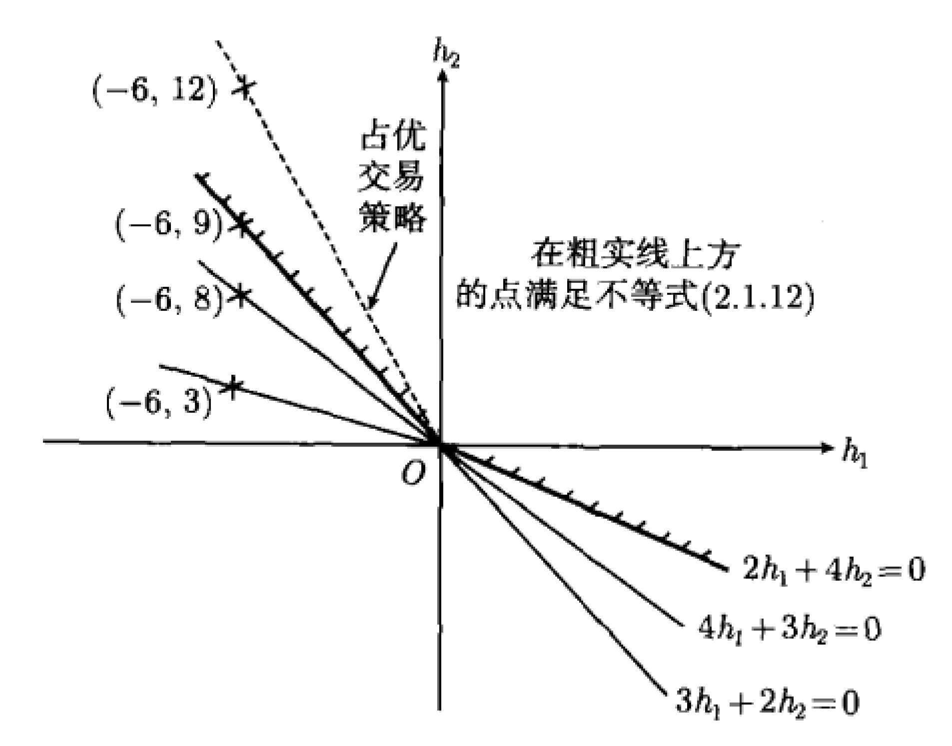


图 2.1 在 h_1h_2 平面区域中的两个粗实线表示满足不等式 (2.1.12) 的交易策略, 位于带点的线 $4h_1+2h_2=0(h_1<0)$ 是占优交易策略

看到在有点的半直线: $4h_1 + 2h_2 = 0(h_1 < 0)$ 上的所有点表示起点财富为零, 但最终财富一定为正的占优交易策略.

假设开始时的贴现价格向量是从 $(1,4,2)$ 变为 $(1,3,3)$, 则新的线性价格概率的新集合将由求解下列公式确定:

$$\begin{cases} 1 = q(\omega_1) + q(\omega_2) + q(\omega_3), \\ 3 = 4q(\omega_1) + 3q(\omega_2) + 2q(\omega_3), \\ 3 = 3q(\omega_1) + 2q(\omega_2) + 4q(\omega_3), \end{cases}$$

可以看到其解为 $q(\omega_1) = q(\omega_2) = q(\omega_3) = 1/3$. 现在, 所有价格概率都是非负值, 行向量 $\mathbf{q} = (1/3, 1/3, 1/3)$ 表示一个线性价格测度. 如图 2.1 所示, 观察直线 $3h_1 + 3h_2 = 0$ 总是位于上面两个粗线的外部区域. 因此, 对于这个新的证券模型, 不能找到 (h_1, h_2), 使得 $3h_1 + 3h_2 = 0$ 与 h_1, h_2 一起满足不等式 (2.1.12). 由于线性价格测度存在, 借助 (2.1.12), 期望两个风险证券 $(3,3)$ 的初始价格向量能够被表示成权重非负的三个向量 $(4,3)$, $(3,2)$ 和 $(2,4)$ 的某个线性组合. 事实上,

$$(3,3) = \frac{1}{3}(4,3) + \frac{1}{3}(3,2) + \frac{1}{3}(2,4),$$

这时权重系数就是线性价格概率.

下面的定理阐述了线性价格测度的存在性与占优交易策略的不存在性之间的关系.

定理 2.1　存在线性价格测度当且仅当不存在占优交易策略.

上述线性价格测度可以看成是 Farkas 引理的一个直接结论.

Farkas 引理　不存在 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{M+1}$ 满足

$$\widehat{S}^*(1;\Omega)\mathbf{h} > \mathbf{0} \quad 且 \quad \widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h} = 0$$

的充要条件是存在 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^K$ 满足

$$\widehat{\mathbf{S}}^*(0) = \mathbf{q}\widehat{S}^*(1;\Omega) \quad 且 \quad \mathbf{q} \geqslant \mathbf{0}.$$

作为一个注记, 线性系统 (2.1.11b) 的解存在当且仅当如果 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)$ 位于 $\widehat{S}^*(1;\Omega)$ 中的行空间. 然而, 解向量 $\mathbf{q}$ 不满足非负性 $\mathbf{q} \geqslant \mathbf{0}$. 占优交易策略不存在当且仅当 $\mathbf{q} \geqslant \mathbf{0}$. 当 $\widehat{S}^*(1;\Omega)$ 的行空间互相独立时, 如果解 $\mathbf{q}$ 存在, 那么它是唯一的.

2.1.2　套利机会与风险中性概率测度

在上述证券模型中, 假设 $\mathbf{S}^*(0)$ 改为 $(3,2)$, 并且考虑这样的交易策略: $h_1 = -2$ 和 $h_2 = 3$. 注意到 $V_0^* = 0$, 并且在 $t = 1$ 时的可能贴现收益为 $V_1^*(\omega_1) = 1, V_1^*(\omega_2) =$

0 和 $V_1^*(\omega_3)=8$. 它表明了这样一种交易策略: 开始价值为 0, 确保无损失, 并且结束时在某些状态 (不必在所有状态) 下有绝对正的价值. 这种投资机会的出现称为套利机会. 正式地定义具有下列性质的某个交易策略为**套利机会**(arbitrage opportunity): ① $V_0^*=0$, ② $V_1^*(\omega)\geqslant 0$ 且 $E[V_1^*(\omega)]>0$, 其中 E 为在实际概率测度 P 下的期望且满足 $P(\omega)>0$. 注意到占优交易策略与套利机会的不同之处. 回忆一下, 当初始时刻价值为零的投资组合在结束时所有状态下都有**严格**(strictly) 正的价值, 占优交易策略存在. 因此, 占优交易策略的存在性意味着套利机会的存在性; 反之, 则不一定成立. 换言之, 不存在套利机会意味着不存在占优交易策略; 反之, 则意味着单价定律成立.

套利机会的存在从经济学的观点来看是不合理的. 很自然的问题是: 套利机会不存在的充要条件是什么? 答案是与价格测度的存在性有关, 称为风险中性概率测度. 在无套利的金融市场中, 将证明每个投资者都应当利用这样的风险中性概率测度 (虽然不必是唯一的) 来寻找证券或投资组合的公平价值, 并且不考虑投资者的风险偏好.

1. 风险中性概率测度

上述例子恰好表明出现套利机会但占优交易策略不存在 (因为对某个 ω, $V_1^*(\omega)=0$). 线性价格测度向量为 $(0,1,0)$, 其中两个线性价格概率为零. 为了排除套利机会, 关于价格概率, 需要更强的条件, 即概率必须是严格正的.

在 Ω 上的概率测度 Q 称为风险中性概率测度, 如果它满足

(i) 对所有的 $\omega\in\Omega$, $Q(\omega)>0$;

(ii) $E_Q[\Delta S_m^*]=0 (m=1,\cdots,M)$,

其中 E_Q 表示在 Q 下的期望. 注意到 $E_Q[\Delta S_m^*]=0$ 等价于

$$S_m^*(0)=\sum_{k=1}^{K}Q(\omega_k)S_m^*(1;\omega_k).$$

该式与 (2.1.11a) 有类似的形式. 事实上, 如果概率测度都是正的, 那么线性价格测度就是风险中性概率测度. 风险中性概率测度 $Q(\omega)$ 的严格正性是更需要的, 因为 $Q(\omega)$ 被视为是与实际概率测度 $P(\omega)$ "等价的", 其中 $P(\omega)>0$. 这就是说, P 和 Q 关于独立事件概率值的指派是不一致的, 但至于事件可能或不可能发生它们总是一致的. "等价概率测度" 的概念将在 2.2.1 小节中详细讨论.

2. 资产定价的基本定理 (单周期模型)

风险中性测度的存在性直接地与在下述定理中论述的排除套利机会有关:

定理 2.2 存在无套利机会当且仅当存在一个风险中性概率测度 Q.

定理 2.2 的证明需要**分离超平面定理**(separating hyperplane theorem). 这里给出该定理的几何直观. 首先, 给出在向量空间中超平面和凸集的定义. 令 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 超平面 $H=[\mathbf{f},\alpha]$ 定义为 $\mathbb{R}^n$ 中 $\mathbf{f}$ 上的投影大小为 α 的这些向量 $\mathbf{x}$ 的集合. 例如, 向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 满足 $x_1+2x_2+3x_3=2$ 的集合就是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个超平面, 其中 $\mathbf{f}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 和 $\alpha=2$. 对 $\mathbb{R}^n$ 中集合 C 的任意两个向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的任意凸组合表示为形式 $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, 如果它依然在 C 中, 则称集合 C 为凸的. 例如, 集合 $C=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}: x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0\right\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个凸集. 如果存在 α, 使得对所有 $\mathbf{x}\in A$ 都有 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}\geqslant\alpha$ 并且对所有 $\mathbf{y}\in B$ 都有 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}<\alpha$, 则超平面 $[\mathbf{f},\alpha]$ 分离 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 A 和 B. 例如, 超平面 $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0\right]$ 分离 $\mathbb{R}^3$ 中的两个不相交的凸集 $A=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}: x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0\right\}$ 和 $B=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}: x_1< 0, x_2< 0, x_3< 0\right\}$.

分离超平面定理指出, 如果 A 和 B 是向量空间 V 中的两个非空的不相交凸集, 则它们能被一个超平面分离开. 在图 2.2 中, 给出了向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中分离超平面定理的图解.

定理 2.2 的证明　充分性. 假设风险中性概率测度 Q 存在, 即 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)=\pi\widehat{S}^*(1;\Omega)$, 其中 $\pi=(Q(\omega_1),\cdots,Q(\omega_K))$. 考虑一个交易策略 $\mathbf{h}=(h_0, h_1,\cdots,h_M)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{M+1}$, 使得在所有的 $\omega\in\Omega$ 中, $\widehat{S}^*(1;\Omega)\mathbf{h}\geqslant 0$, 并且在某些状态下有严格不等式. 现在考虑 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h}=\pi\widehat{S}^*(1;\Omega)\mathbf{h}$, 由于 π 中的所有元素都是正的, 并且在 $\widehat{S}^*(1;\Omega)\mathbf{h}$ 中的元素为零或严格正的, 所以只能有 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h}>0$. 因此, 无套利机会存在.

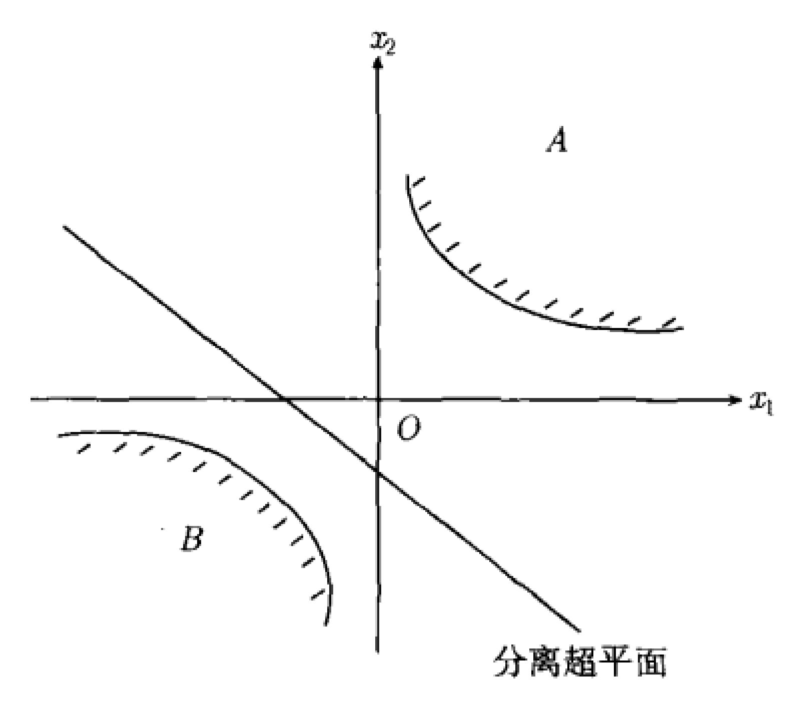


图 2.2 超平面 (在 $\mathbb{R}^2$ 中用线表示) 分离 $\mathbb{R}^2$ 中的两个凸集 A 和 B

必要性. 首先, 定义在 $\mathbb{R}^{K+1}$ 中的子集 U, 它由形式为 $\begin{pmatrix} -\widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h} \\ \widehat{\mathbf{S}}^*(1;\omega_1)\mathbf{h} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{S}}^*(1;\omega_k)\mathbf{h} \end{pmatrix}$ 的向量所组成, 其中 $\widehat{\mathbf{S}}^*(1;\omega_k)$ 为 $\widehat{S}^*(1;\Omega)$ 中的第 k 行, $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^{M+1}$ 表示一个交易策略. 因为任何两个交易策略的和仍然是一个交易策略, 交易策略的任何标量积也是一个交易策略, 所以子集 U 可看成是 $\mathbb{R}^{K+1}$ 中的一个子空间. 注意到 U 包含 $\mathbb{R}^{K+1}$ 中的零向量, 并且显然, U 也是凸集. 考虑另外一个子集 $\mathbb{R}_+^{K+1}$, 定义为

$$\mathbb{R}_+^{K+1}=\{(x_0,\ x_1,\cdots,x_K)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{K+1}:x_i\geqslant 0,\ 0\leqslant i\leqslant K\},$$

它是 $\mathbb{R}^{K+1}$ 中的一个凸集. 称不存在套利机会意味着 U 和 $\mathbb{R}_+^{K+1}$ 通常只能有零向量.

假若不然, 即假设存在非零向量 $\mathbf{x}\in U\cap\mathbb{R}_+^{K+1}$. 因为存在一个与 U 中的每个向量都有关联的交易策略向量 $\mathbf{h}$, 可以证得与 $\mathbf{x}$ 相关的交易策略 $\mathbf{h}$ 表示一个套利机会. 考虑下述两种情况: $-\widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h}=0$ 或 $-\widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h}>0$.

(i) 当 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h}=0$ 时, 由于 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^{K+1}$, 所以元素 $\widehat{\mathbf{S}}(1;\omega_k)\mathbf{h}(k=1,2,\cdots,K)$ 一定大于或等于零, 并且至少有一个严格不等式. 在这种情况下, $\mathbf{h}$ 被视为表示套利机会;

(ii) 当 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h}<0$ 时, 所有分量 $\widehat{\mathbf{S}}(1;\omega_k)\mathbf{h}(k=1,2,\cdots,K)$ 一定都是非负的, 因此, $\mathbf{h}$ 表示一个占优交易策略 (见习题 2.1), 并且反之, $\mathbf{h}$ 是一个套利机会.

因为 $U\cap\mathbb{R}_+^{K+1}=\{\mathbf{0}\}$, U 和 $\mathbb{R}_+^{K+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$ 是 $\mathbb{R}^{K+1}$ 中不相交的凸子集. 利用分离超平面定理, 存在一个超平面分离这两个不相交的非空凸集. 令 $\mathbf{f}\in\mathbb{R}^{K+1}$ 对这个超平面是正规的, 则得到 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}>\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^{K+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y}\in U$. (注意: 也可以

得到 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}<\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}$, 这取决于正规的方向. 然而, 最终的结论是不变的.) 因为 U 是一个线性子空间, 因此, $\mathbf{y}\in U$ 的负倍数仍然属于 U. 条件 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}>\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}$ 成立仅当对于一切 $\mathbf{f}\in U,\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}=0$. 因此, 得到对于所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^{K+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$ 都有 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}>0$. 这就要求 $\mathbf{f}$ 中的所有分量都是严格正的; 否则, 假设 $\mathbf{f}$ 的第 i 个分量为非正的, 那么就可以选择 $\mathbf{x}$ 是第 i 个分量为 1, 其他所有分量都为 0 的坐标向量. 这导出一个矛盾, 对所有的 $\mathbf{x}$ 有 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}>0$. 又 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}=0$, 因此, 对一切 $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^{M+1}$ 有

$$-f_0\widehat{\mathbf{S}}^*(0)\mathbf{h}+\sum_{k=1}^{K}f_k\widehat{\mathbf{S}}^*(1;\omega_k)\mathbf{h}=0,$$

其中 $f_j(j=0,1,\cdots,K)$ 为 $\mathbf{f}$ 的分量. 因此, 就推得

$$\widehat{\mathbf{S}}^*(0)=\sum_{k=1}^{K}Q(\omega_k)\widehat{\mathbf{S}}^*(1;\omega_k), \tag{2.1.13a}$$

其中 $Q(\omega_k)=f_k/f_0$. 最后, 考虑等式两边向量中的第一个分量. 它们对应的是无风险债券的现价和贴现收益, 并且都等于 1. 因此得到

$$1=\sum_{k=1}^{K}Q(\omega_k).$$

于是就得到了风险中性概率 $Q(\omega_k)(k=1,\cdots,K)$, 并且其和为 1. 由于 $f_j>0(j=0,1,\cdots,K)$, 所以它们都是严格正的.

注记 (1) 相对于每个风险资产, 式 (2.1.13a) 表明

$$S_m(0)=S_m^*(0)=\sum_{k=1}^{K}Q(\omega_k)S_m^*(1;\omega_k),\quad m=1,2,\cdots,M. \tag{2.1.13b}$$

因此, 任何风险证券的现价都是在风险中性测度 Q 下由贴现收益的期望值给出的.

(2) 风险中性测度 $Q(\omega_k)$ 与分离超平面法线的分量有关. Q 的存在性是由超平面的存在性 (不必唯一) 产生的. 因为 f_0 和 $\mathbf{f}$ 的其他分量总是有相同的符号, 所以 $Q(\omega_k)$ 的正值性满足 (与超平面法线方向的选取无关).

3. 风险中性测度的集合

考虑前面含有无风险证券和只有一个风险证券的证券模型, 其中$\widehat{S}(1;\Omega)=\begin{pmatrix}1&4\\1&3\\1&2\end{pmatrix}$ 和 $\widehat{\mathbf{S}}(0)=(1,3)$. 风险中性概率测度 $\pi=(Q(\omega_1),Q(\omega_2),Q(\omega_3))$, 如果

存在, 将由如下等式所定义:

$$(Q(\omega_1), Q(\omega_2), Q(\omega_3)) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3). \qquad (2.1.14)$$

由于未知数大于等式的个数, 所以解是不唯一的. 解为 $\pi = (\lambda, 1-2\lambda, \lambda)$, 其中 λ 为自由参数. 为了使所有风险中性概率都是严格正的, 必须有 $0 < \lambda < 1/2$.

假设加入另一个贴现收益为$\mathbf{S}_2^*(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 和当前贴现值为 $S_2^*(0) = 3$ 的风险证券. 由于这个新的添加证券, 所以证券模型变成完全的 (两个风险证券和无风险证券的资产生成整个 $\mathbb{R}^3$ 空间). 随着新的等式 $3Q(\omega_1) + 2Q(\omega_2) + 4Q(\omega_3) = 3$ 加入到系统 (2.1.14) 中, 易见这个新的证券模型有唯一的风险中性测度 $((1/3, 1/3, 1/3)$. 风险中性测度的唯一性来源于证券模型的完全性 (见习题 2.14).

令 W 是 $\mathbb{R}^K$ 中的一个子空间, 它是由对应于某些交易策略 $\mathbf{h}$ 的贴现收益组成的. 在以上的证券模型中, 第一个和第二个风险证券的贴现收益分别为 $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 因此, 相应的贴现收益子空间为

$$W = \left\{ h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

其中 h_1 和 h_2 为标量.

对于所有风险中性概率测度 Q 有

$$\begin{aligned} E_Q G^* &= \sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k) \left[\sum_{m=1}^{M} h_m \Delta S_m^*(\omega_k) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{M} h_m E_Q[\Delta S_m^*] = 0, \end{aligned} \qquad (2.1.15)$$

其中 $\Delta S_m^*(\omega_k)$ 为第 m 个风险证券当状态 ω_k 发生时的贴现收益. 因此, 风险中性概率向量 π 必须在正交补 $W^\perp$ 中. 由于风险中性概率总和必须为 1, 并且所有概率值必须为正, 所以风险中性概率向量 π 必须存在于下列子集中:

$$P^+ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^K : y_1 + y_2 + \cdots + y_K = 1 \text{ 且 } y_k > 0, k = 1, \cdots, K\}.$$

令 R 代表所有风险中性测度集合. 结合上述结果, 可以看到

$$R = P^{+} \cap W^{\perp}. \tag{2.1.16}$$

在上面的数值例子中, $W^{\perp}$ 是通过在 $\mathbb{R}^3$ 中的原点并垂直于 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 的直线. 对某个标量 λ, 这条直线应该假设为 $\lambda(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 由于系统规定所有元素的总和为 1, 并且每个元素必须为正, 所以得到风险中性概率的向量为 $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$.

2.1.3 未定权益的价值

一个未定权益被认为是一个随机变量 Y, 它表示其价值取决于一个特殊状态 ω_k 发生的最终收益, 其中 $\omega_k \in \Omega$. 假设未定权益的持有者允许得到事先调整的收益: 卖方在 $t=0$ 时刻出售未定权益价格应该是多少, 才使得参与双方都是**公平的**(fair) 呢?

考虑含有无风险证券和风险证券的证券模型, 其无风险证券在 $t=0$ 和 $t=1$ 时的价值分别为 $S_0(0)=1$ 和 $S_0(1)=1.1$, 风险证券的价值分别为 $S_1(0)=3$ 和$\mathbf{S}_1(1)=\begin{pmatrix}4.4\\3.3\\2.2\end{pmatrix}$. 对某个标量 h_0 和 h_1, 在 $t=1$ 时由交易策略生成的收益集合为$h_0\begin{pmatrix}1.1\\1.1\\1.1\end{pmatrix}+h_1\begin{pmatrix}4.4\\3.3\\2.2\end{pmatrix}$. 例如, 未定权益$\begin{pmatrix}5.5\\4.4\\3.3\end{pmatrix}$ 可由交易策略 $h_0=1$ 和 $h_1=1$ 生成, 同时其他的未定权益, 如$\begin{pmatrix}5.5\\4.0\\3.3\end{pmatrix}$, 不能由所给定证券模型的任何交易策略生成. 如果对构造的复制投资组合, 存在某个交易策略 $\mathbf{h}$, 使得对 $t=1$ 时在所有可能发生的状态下, 投资组合价值 V_1 等于 Y, 则称未定权益 Y 为**可达的**(attainable).

在 $t=0$ 时, 可达的未定权益$\begin{pmatrix}5.5\\4.4\\3.3\end{pmatrix}$ 的价格应该为多少? 我们提出复制投资组合在 $t=0$ 时的价格应为 $V_0 = h_0S_0(0)+h_1S_1(0)=1\times1+1\times3=4$. 如同在 2.1.2 小节中的讨论, 假设不存在套利机会 (等价于存在风险中性概率测度), 那么单价定律成立, 因此, V_0 是唯一的. 未定权益 Y 在 $t=0$ 时的价格就是 V_0, 这个价格由套利定价理论导出. 如果不是这样, 假设未定权益在 $t=0$ 时的价格 p 大于 V_0, 则套利者通过卖空未定权益, 并买入复制投资组合就能锁定无风险收益 $p - V_0$. 如果 $p < V_0$, 则套利策略就反过来. 在这个证券模型中, 事先知道风险中性概率测度存

在 (虽然不是唯一的). 然而, 未定权益 $\begin{pmatrix} 5.5 \\ 4.4 \\ 3.3 \end{pmatrix}$ 的初始价格是唯一的且为 $V_0 = 4$.

1. 风险中性定价原理

考虑一个由某个交易策略生成的可达未定权益 Y, 交易策略的相关贴现收益 G^* 为 $G^* = \sum_{m=1}^{M} h_m \Delta S_m^*$. 假设与证券模型相关的风险中性概率测度 Q 存在, 利用关系式 $V_0^* = V_1^* - G^*, E_Q[G^*] = 0$ 和 $V_1^* = Y/S_0(1)$, 获得

$$V_0 = E_Q V_0^* = E_Q[V_1^* - G^*] = E_Q[Y/S_0(1)]. \tag{2.1.17}$$

回想到风险中性概率测度的存在性意味着单价定律的成立. 对每个风险中性概率测度 Q, $E_Q[Y/S_0(1)]$ 的价值都相同吗? 根据单价定律, 这是正确的, 因为对应于同一个未定权益 Y, 不能有两个不同的 V_0. **风险中性定价原理**(risk neutral valuation principle) 表述如下:

一个可达未定权益权 Y 在 $t = 0$ 时刻的价格是由在任何风险中性测度 Q 下未定权益贴现值的期望给出的.

实际上, 可以看到一个更强的结果: 如果对每个风险中性测度 Q, $E_Q[Y/S_0(1)]$ 有相同的值, 则未定权益 Y 是可达的 (证明参见文献 Pliska(1997)).

提醒读者注意: 如果对一个给定的证券模型, 单价定律不成立, 则对一个可达的未定权益, 不能定义一个唯一的价格 (见习题 2.14).

2. 状态价格

考虑一个未定权益的贴现价格 $Y^* = Y/S_0(1)$, 如果对某个 $\omega_k \in \Omega$, $\omega = \omega_k$, 则它等于 1; 否则, 等于零. 这就是对应于状态 ω_k 的 Arrow 证券 $\mathbf{e}_k$. 因此有

$$E_Q[Y/S_0(1)] = \pi \mathbf{e}_k = Q(\omega_k). \tag{2.1.18}$$

贴现收益为 $\mathbf{e}_k$ 的 Arrow 证券的价格被称为状态 $\omega_k \in \Omega$ 的状态价格. 以上结果表明对状态 ω_k, 价格等于同一状态的风险中性概率.

任何未定权益 Y 都可以表示成这些基本的 Arrow 证券的线性组合. 假设 $Y^* = Y/S_0(1) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k e_k$, 在 $t = 0$ 时未定权益的价格等于 $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k Q(\omega_k)$. 例如, 假设

$$\mathbf{Y}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \widehat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

那么风险中性概率为

$$\pi = (\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda),$$

其中 $0 < \lambda < 1/2$. 当 $t = 0$ 时, 未定权益的价格为

$$V_0 = \pi \mathbf{Y}^* = 5\lambda + 4(1 - 2\lambda) + 3\lambda = 4,$$

它与 λ 无关. 这就证明了先前的结论, $E_Q[Y/S_0(1)]$ 假设对任何风险中性测度 Q 都具有相同的值.

3. 完全市场

回顾一下, 如果每个未定权益 Y 都位于资产扩张中, 那么证券模型是完全的. 也就是说, Y 可以由某些交易策略生成的投资组合所复制. 考虑维数为 $K \times (M+1)$ 的增广最终收益矩阵

$$\widehat{S}(1;\Omega) = \begin{pmatrix} S_0(1;\omega_1) & S_1(1;\omega_1) & \cdots & S_M(1;\omega_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_0(1;\omega_K) & S_1(1;\omega_K) & \cdots & S_M(1;\omega_K) \end{pmatrix}.$$

如果 $\widehat{S}(1;\Omega)$ 的列张成整个 $\mathbb{R}^K$ 空间, 则 Y 总是位于资产扩张中. 因为 $\widehat{S}(1;\Omega)$ 的列向量的维数不能大于 $M+1$, 所以完全市场的必要条件是 $M + 1 \geqslant K$. 在完全市场的情况下, 如果风险中性概率测度的集合是非空的, 那么一定存在一个唯一值 (见习题 2.14). 进一步, 当 $\widehat{S}(1;\Omega)$ 的列向量线性无关且资产扩张是整个 $\mathbb{R}^K$ 空间时, 就有 $M + 1 = K$. 在这种情况下, 所有未定权益是可达的. 由于没有冗余证券, 所以 Y 生成的交易策略必定是唯一的. 因此, 对任何未定权益都有唯一的价格. 另一方面, 当资产扩张到整个 $\mathbb{R}^K$ 空间, 但某些证券是多余的时, Y 生成的交易策略不是唯一的. 假设风险中性测度存在, 在套利价格情况下, 当 $t = 0$ 时, 未定权益的价格必定是唯一的, 而且与交易策略的选择无关. 这也是根据风险中性测度存在推导出的单价定律的一个结果. 这个结果说明冗余证券的不存在性对单价定律是充分的, 但不是必要的.

作为一个数值例子, 考虑定义为

$$\widehat{\mathbf{S}}^*(0) = (1, 3) \quad 和 \quad \widehat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

的证券模型. 因为不存在冗余证券, 因此, 单价定律成立. 假设通过增加另一个风险证券来修改证券模型, 使得

$$\widehat{\mathbf{S}}^*(0) = (1, 3, 4) \quad 和 \quad \widehat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

最后的风险证券被认为是多余的 (第三列是第一列和第二列的和). 然而, 单价定律仍然成立, 因为当 $S_2(0) = S_0(0) + S_1(0)$ 时,

$$\mathbf{S}_2^*(1) = \mathbf{S}_0^*(1) + \mathbf{S}_1^*(1).$$

实际上, 可以看到 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)$ 位于 $\widehat{S}^*(1;\Omega)$ 的行空间.

当 $\widehat{S}(1;\Omega)$ 的列空间的维数小于 K 时, 并不是所有的未定权益都是可达的. 在这种情况下, 不可达的未定权益不能用套利定价理论来定价. 然而, 可以确定的一个区间 $(V_-(Y), V_+(Y))$ 使得当 $t=0$ 时未定权益的一个合理价格可以得出, 其上、下界分别为

$$V_-(Y) = \sup\{E_Q[\widetilde{Y}/S_0(1)] : \widetilde{Y} \leqslant Y \text{且} \widetilde{Y} \text{是可达的}\}, \tag{2.1.19a}$$

$$V_+(Y) = \inf\{E_Q[\widetilde{Y}/S_0(1)] : \widetilde{Y} \geqslant Y \text{且} \widetilde{Y} \text{是可达的}\}, \tag{2.1.19b}$$

其中 $V_+(Y)$ 为在优于不可达权益 Y 的可达未定权益的所有价格中的最小值, 而 $V_-(Y)$ 为优于 Y 的可达未定权益的所有价格中的最大值. 假定 $V(Y) > V_+(Y)$, 那么一个套利者就可以锁定无风险利润, 他通过卖出未定权益得到 $V(Y)$, 然后如在 (2.1.19b) 中定义的生成可达权益 $\widetilde{Y}$ 那样, 用 $V_+(Y)$ 来构造复制投资组合. 前面的正收益是 $V(Y) - V_+(Y)$. 当 $t=1$ 时, 复制投资组合的收益总是优于 Y, 从而确保在到期日没有损失. 类似地, 当 $V(Y) < V_-(Y)$ 时, 一个套利者也可以锁定无风险利润, 他通过买进未定权益和卖空如在 (2.1.19a) 中定义的生成可达权益 $\widetilde{Y}$ 来构造复制投资组合.

4. 概述

(1) 单价定律, 不存在占优交易策略和不存在套利机会之间的关系为

$$\begin{aligned}\text{不存在套利机会} &\Rightarrow \text{不存在占优交易策略}\\ &\Rightarrow \text{单价定律},\end{aligned}$$

其中

$$\text{单价定律} \Leftrightarrow \text{线性价格函数的单值性}.$$

(2) 定理 2.1 和定理 2.2 表明

$$\text{不存在套利机会} \Leftrightarrow \text{存在风险中性测度},$$
$$\text{不存在占优交易策略} \Leftrightarrow \text{存在线性价格测度}.$$

(3) 当线性价格测度存在时, 状态价格是非负的, 并且当风险中性测度存在时, 状态价格是严格正的.

(4) 在不存在套利机会的情况下, 风险中性定价原理可以被用来寻找未定权益的公平价格.

2.1.4　二叉树期权定价模型的原理

下面要用著名的二叉树期权定价模型来说明风险中性定价原理是怎样确定看涨期权的价格的. 在二叉树模型中, 资产价格的运动可以通过离散的二叉树随机游动来模拟 (关于随机游动的模型更详细的讨论见 2.3.1 小节). 这里, 只限于讨论单时段二叉树模型, 并在 2.2.4 小节中分析多时段二叉树模型. 将证明由二叉树模型获得的看涨期权价格仅仅与无风险利率有关, 而与资产价格的实际期望回报率无关.

1. 复制投资组合公式

追索由 Cox 等 (1979) 提出的离散二叉树模型的来历. 他们证明了以适当的比例买进资产和借入现金 (以无风险货币市场存款的形式), 人们可以复制一个看涨期权的头寸. 令 S 表示当前的资产价格. 在二叉树随机游动模型中, 在一个时期 Δt 后, 资产价格分别以概率 q 和 $1-q$ 上升到 uS 或下降到 dS(图 2.3). 假设 $u>1>d$, 使得 uS 和 dS 分别表示资产价格的上升和下降运动. 跳参量份额 u 和 d 与资产价格动态有关, 详细讨论将在 6.1.1 小节中进行. 令 R 表示一个时段内货币市场存款的增长因子, 也就是说, 在无风险的货币市场存款中 1 美元的投资在一个时段后将会增长到 R 美元. 为了确保不存在套利机会, 必须有 $u>R>d$ (见习题 2.16).

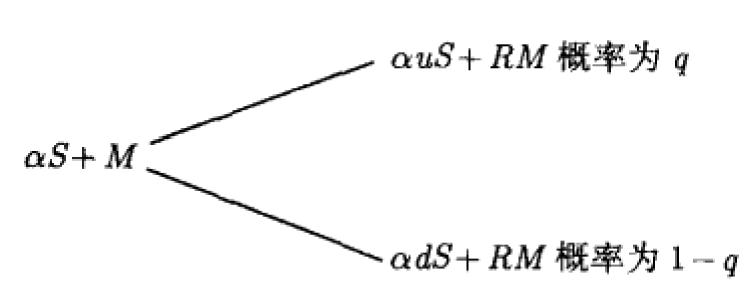


图 2.3　在二叉树模型中, 单时段后资产价格 S 和货币市场存款 M 的运动, 风险资产既可以上升到 uS, 也可以下降到 dS, 而无风险货币市场存款 M 上涨到 RM

假设构造一个投资组合, 包括 α 份的资产和以无风险货币市场存款形式给出的数量为 M 的现金. 在一个时间周期 Δt 后, 投资组合的价值为 (图 2.3)

$$\begin{cases} \alpha uS + RM, & \text{概率为 } q, \\ \alpha dS + RM, & \text{概率为 } 1-q. \end{cases}$$

利用不支付红利资产看涨期权的多头来复制投资组合. 由于这里有两种可能的状态: 资产价格上升或下降, 因此, 看涨期权是一个未定权益. 假设在到期日之前, 当前时段仅仅是一个时期 Δt. 令 c 表示当前看涨期权的价格, c_u 和 c_d 分别表示在一个时期后 (这里也就是到期日) 对应于资产价格上升和下降时看涨期权的价格. 令 X 表示看涨期权的敲定价格. 在到期日, 看涨期权的收益为

$$\begin{cases} c_u = \max(uS - X, 0), & \text{概率为 } q, \\ c_d = \max(dS - X, 0), & \text{概率为 } 1 - q. \end{cases}$$

上述包含了一个风险资产和货币市场存款的投资组合称为复制看涨期权的多头, 当且仅当对每个可能的收益投资组合的价值与看涨期权相等, 即

$$\alpha uS + RM = c_u \quad \text{和} \quad \alpha dS + RM = c_d.$$

在上面的线性方程中, α 和 M 是未知的. 未知数的个数 (与资产的份额和现金数额有关) 与方程个数 (在二叉树模型中两种可能的状态) 是相等的. 解这个方程可以得到

$$\alpha = \frac{c_u - c_d}{(u-d)S} \geqslant 0, \quad M = \frac{uc_d - dc_u}{(u-d)R} \leqslant 0. \tag{2.1.20}$$

因此, 容易建立

$$u\max(dS - X, 0) - d\max(uS - X, 0) \leqslant 0.$$

由于 M 总是非正的, 所以复制投资组合包含以在式 (2.1.20) 中给出的比例来买入资产和借入现金. 持有资产的份额可以看成是看涨期权价格 $c_u - c_d$ 的差额与资产价格 $uS - dS$ 的差额的比.

在资产价格动态的单时段二叉树模型中, 观察到看涨期权可以由风险资产和无风险货币市场存款这些基本证券的投资组合复制而成.

2. 二叉树期权定价公式

根据无套利原理, 看涨期权的现值必须与复制的投资组合的现值相等; 否则, 将发生什么情况呢? 假设看涨期权的现值小于投资组合的价值, 那么可以通过购买更便宜的看涨期权和卖出更贵的投资组合来获得无风险利益. 由于投资组合的价值与看涨期权的价值在后面的时间相互抵消, 从而保证了上述两种交易的净收入. 如果看涨期权的价值高于投资组合的价值, 那么论证相反. 因此, 看涨期权的现值可以由投资组合的现值给出, 即

$$c = \alpha S + M = \frac{\dfrac{R-d}{u-d}c_u + \dfrac{u-R}{u-d}c_d}{R} = \frac{pc_u + (1-p)c_d}{R}, \tag{2.1.21}$$

其中 $p = \dfrac{R-d}{u-d}$. 注意到概率 q 是资产价格上升或下降的主观概率, 在看涨期权价格公式中并没有出现. 由于 $u > R > d$, 参数 p 满足 $0 < p < 1$, 因此, p 可以解释为概率. 更进一步, 从关系式

$$puS + (1-p)dS = \frac{R-d}{u-d}\, uS + \frac{u-R}{u-d}\, dS = RS, \tag{2.1.22}$$

可以解释上述结果如下：资产以 p 作为上升概率的期望回报率等于无风险利率. 令 $S^{\Delta t}$ 表示在一个时期后资产价格的随机变量. 可以将 (2.1.22) 表示为

$$S = \frac{1}{R}E^*[S^{\Delta t}|S], \tag{2.1.23}$$

其中 E^* 表示在概率测度下的期望. 根据在 2.1.2 小节中给出的定义 (见式 (2.1.13b)), 可以认为 p 是**风险中性概率**(risk neutral probability). 类似地, 对看涨期权价格, 二叉树公式 (2.1.21) 可以表示为

$$c = \frac{1}{R}E^*[c^{\Delta t}|S], \tag{2.1.24}$$

其中 c 为看涨期权价格的现值, 随机变量 $c^{\Delta t}$ 表示一段时期后的期权价格.

作为一个总结, 当看涨期权通过存在的市场资产能被复制时, 在风险中性测度下, 它的现值通过贴现最终收益的期望给出. 在无套利定价的框架下, 对应于上升状态 ω_u 和下降状态 ω_d, 假设风险中性概率值 $Q(\omega_u)$ 和 $Q(\omega_d)$ 存在, 这些概率值可以通过求解下面的式子得到 (见式 (2.1.23)):

$$S = Q(\omega_u)\frac{uS}{R} + Q(\omega_d)\frac{dS}{R} \quad \text{和} \quad Q(\omega_u) + Q(\omega_d) = 1.$$

由此得到

$$Q(\omega_u) = 1 - Q(\omega_d) = \frac{R-d}{u-d} = p.$$

因此, 看涨期权的现值从对应的贴现期望公式中得到

$$c = Q(\omega_u)\frac{c_u}{R} + Q(\omega_d)\frac{c_d}{R} = \frac{pc_u + (1-p)c_d}{R},$$

它与 (2.1.21) 中的结果相同.

除了利用未定权益复制的原理以外, 二叉树期权定价公式也可以通过无风险对冲原理或状态价格的概念来导出 (见习题 2.17 和习题 2.18).

2.2　域流、鞅和多时段模型

在本节中, 将关于证券模型的讨论扩展到多时段情形, 这里有 $T+1(t=0,1,\cdots,T, T>1)$ 个交易时间. 类似于单时段模型, 有 K 个元素的有限样本空间 Ω, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_K\}$ 代表了所有可能的现实状态. 存在定义在样本空间上的概率测度 p, 并且对一切 $\omega \in \Omega$, $P(\omega) > 0$. 证券模型由价格过程是非负随机过程的 M 个风险证券组成, 记为 $S_m = \{S_m(t); t = 0,1,\cdots,T\}(m = 1,\cdots,M)$. 此外, 存在一个价格过程 $S_0(t)$ 是确定的无风险证券, $S_0(t)$ 是严格正的且关于 t 可能是非减的. 可以

认为 $S_0(t)$ 是货币市场存款, 数量为 $r_t = \dfrac{S_0(t) - S_0(t-1)}{S_0(t-1)}(t = 1, \cdots, T)$, 它可以看成是时间区间 $(t-1, t)$ 上的利率.

在本节中, 将套利机会的概念和风险中性定价从单时段模型推广到多时段模型中. 然而, 需要说明在多时段模型中, 投资者如何获得在中间交易时期的真实状态. 因此, 构造信息结构, 依据样本空间 Ω 的子空间模型, 如何将信息传递给投资者. 证明信息结构是如何根据域流来描述的, 以及如何理解证券价格过程与给定的域流是适应的. 接着引入鞅, 它在给定的域流和概率测度下作为 "公平赌博" 适应随机过程模型. 也讨论停止规则的概念、停时和停止过程. 著名的 Doob 最优样本定理论述了停止鞅仍然是一个鞅. 本节的亮点是**资产定价基本定理**(fundamental theorem of asset pricing) 的多时段版本. 本节的最后部分是关于期权定价的多时段二叉树模型.

2.2.1 信息结构和域流

考虑包含 10 个元素的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\}$, 能构造集合 Ω 的各种分割. Ω 的一个**划分**(partition) 是一个集族 $\mathcal{P} = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$, 使得 $B_j(j = 1, \cdots, n)$ 是 Ω 的子集且 $B_i \cap B_j = \varnothing(i \neq j)$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j = \Omega$. 这些集合 $B_1, \cdots, B_n$ 的每一个都称为划分的**元素**(atom). 例如, 可以给出 Ω 的划分形式如下:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_0 = \{\Omega\},\\
&\mathcal{P}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}\},\\
&\mathcal{P}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}, \{\omega_{10}\}\},\\
&\mathcal{P}_3 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}, \{\omega_9\}, \{\omega_{10}\}\}.
\end{aligned}$$

已经定义了 Ω 的划分的有限序列, 它们具有彼此连续加细嵌套的性质. 属于 $\mathcal{P}_k$ 的每个集合分成了 $\mathcal{P}_{k+1}$ 中元素更小的集合.

考虑一个三期证券模型, 它是由上述连续精细的划分序列构成的: $\{\mathcal{P}_k : k = 0, 1, 2, 3\}$. $(\Omega, \mathcal{P}_k)$ 称为**域流空间**(filtered space), 它由样本空间 Ω 和 Ω 的划分序列构成. 域流空间是用来通过时间给出信息的模型. 在时刻 $t = 0$, 投资者仅仅知道所有可能的现实状态, 因此, $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$. 在时刻 $t = 1$, 投资者获得更多的信息: 实际状态 Ω 不是 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ 就是 $\{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$. 在下一个交易日 $t = 2$, 显示了更多的信息, 如 ω 在集合 $\{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ 中. 在另一个交易日 $t = 3$ 有 $\mathcal{P}_3 = \{\{\omega_i\}, i = 1, \cdots, 10\}$. $\mathcal{P}_3$ 的每一个都由 Ω 的单个元素构成, 因此, 投资者拥有关于特别状态发生的完全信息. 在图 2.4 中的信息树给出了三时段证券模型的信息子模型.

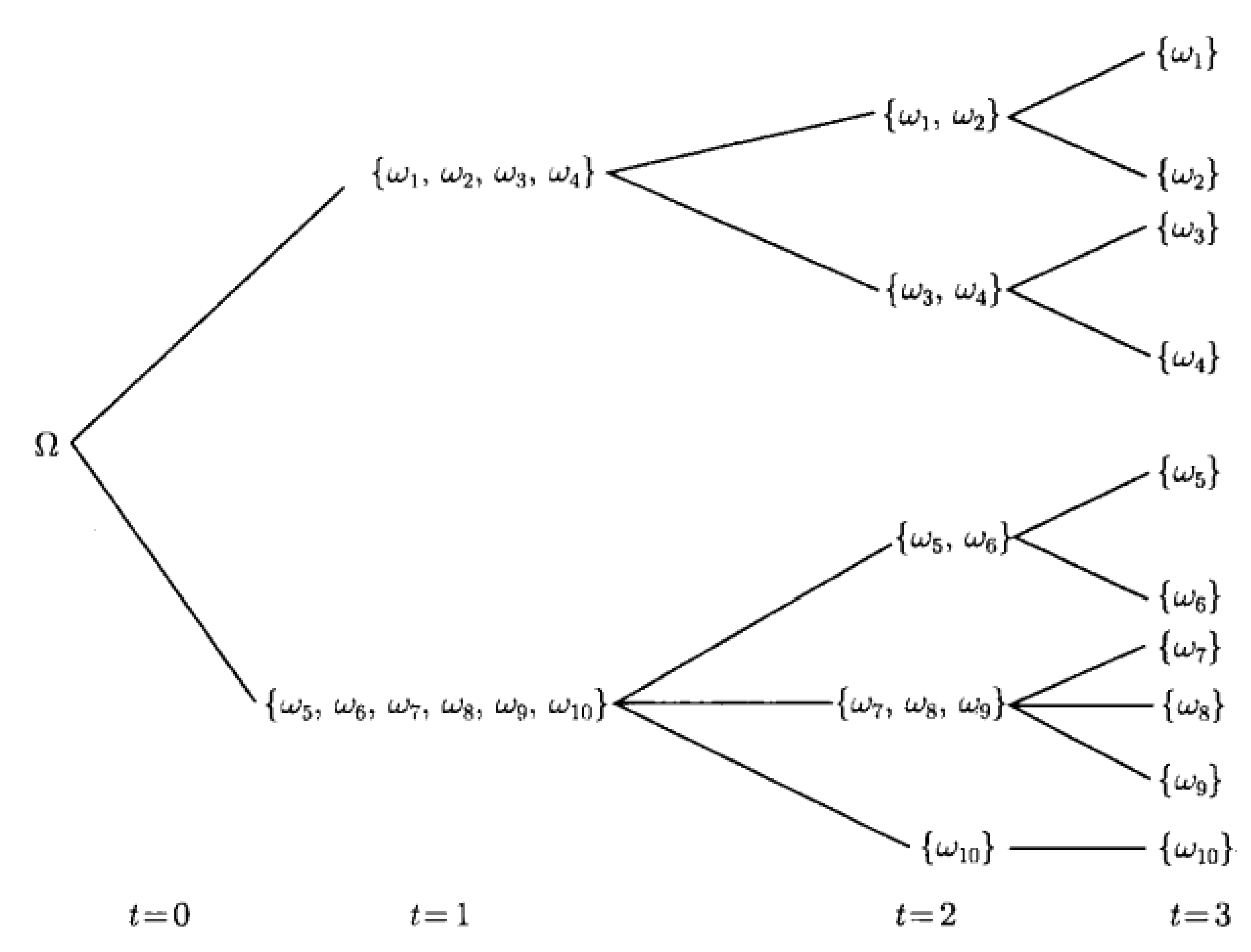


图 2.4　具有 10 个可能状态的三时段证券模型的信息树, 划分形成更精细划分的连续序列

1. 代数

令 Ω 是有限集, $\mathcal{F}$ 是 Ω 的子集构成的集合. 集合 $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的一个代数, 如果

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(ii) $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$;

(iii) $B_1, B_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$.

给出 Ω 上的代数 $\mathcal{F}$, 总能找到由互不相交的子集 B_n 构成的唯一集合, 使得每一个 $B_n \in \mathcal{F}$ 且这些子集的并等于 Ω. 由划分 $\mathcal{P} = \{B_1, \cdots, B_n\}$ 生成的代数 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的子集的集合. 实际上, 当 Ω 是一个有限的样本空间时, 在 Ω 的划分和 Ω 上的代数之间存在一一对应关系. 由划分序列定义的信息结构可以看成是代数序列. **定义域流**(filtration) $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_k; k = 0, 1, \cdots, T\}$ 是一个代数的嵌套序列, 满足 $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1}$. 作为一个例子, 给出代数 $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$, 相应的划分 $\mathcal{P}$ 为 $\{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}\}$. $\mathcal{P}$ 中的元素为 $B_1 = \{\omega_1\}, B_2 = \{\omega_2, \omega_3\}$ 和 $B_3 = \{\omega_4\}$. 通过 $\mathcal{P}$ 的出现来表明的一个非空事件的发生将可能是 $\mathcal{P}$ 中元素的并集. 例如, 事件 $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 是 B_1 和 B_2 的并集. 如果 $\mathcal{P}$ 中的 $B_2 = \{\omega_2, \omega_3\}$ 发生, 那么就能决定是否 A 或它的补集 A^c 已经发生. 然而, 对另一个事件 $\widetilde{A} = \{\omega_1, \omega_2\}$, 即使知道 B_2 已经发生, 也不能确定是否 A 或 A^c 已经发生.

此外, 可以定义在一个代数 $\mathcal{F}$ 上的概率测度 P. 概率测度 P 是一个函数

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1],$$

满足

(1) $P(\Omega)=1$;

(2) 如果 $B_1, B_2, \cdots$ 是属于 $\mathcal{F}$ 的两两互不相交的集合, 则

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots) = P(B_1) + P(B_2) + \cdots .$$

由于有了概率测度, $\mathcal{F}$ 中的元素称为可测事件. 对给定的样本空间 Ω, 定义在 Ω 上的一个代数 $\mathcal{F}$ 和概率测度 P, 三元组合 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及域流 $\mathbb{F}$ 被称为**带域流的概率空间**(filtered probability space).

2. 等价测度

P 和 P' 是定义在相同可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的两个已知概率测度. 假设对所有的 $\omega \in \Omega$,

$$P(\omega) > 0 \Leftrightarrow P'(\omega) > 0,$$

就说 P 和 P' 是等价测度. 换句话说, 虽然这两个等价的测度对个别事件的概率值不同, 至于是可能事件或是不可能事件, 但它们总是一致的.

3. 随机变量的可测性

考虑由划分 $\mathcal{P} = \{B_1, \cdots, B_n\}$ 生成的代数 $\mathcal{F}$, 如果对所有的 $\omega \in B_i$, 其中 B_i 为 $\mathcal{P}$ 的任意元素, $X(\omega)$ 为一个常数, 则称随机变量 X 关于 $\mathcal{F}$ 为可测的 (记为 $X \in \mathcal{F}$). 例如, 考虑由 $\mathcal{P}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}\}$ 生成的代数 $\mathcal{F}_1$. 如果 $X(\omega_1)=3$, $X(\omega_4)=5$, 则 X 关于 $\mathcal{F}_1$ 是不可测的, 因为 ω_1 和 ω_4 属于相同的元素, 但 $X(\omega_1)$ 和 $X(\omega_4)$ 有不同的值.

考虑一个例子, 其中 $\mathcal{P} = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5\}\}$ 并且 X 关于由 $\mathcal{P}$ 生成的代数 $\mathcal{F}$ 是可测的. 令 $X(\omega_1)=X(\omega_2)=3, X(\omega_3)=X(\omega_4)=5$ 和 $X(\omega_5)=7$. 假设关于随机变量 X 的随机试验发生, 取值为 $X=5$. 这也就告诉我们信息事件 $\{\omega_3, \omega_4\}$ 已经发生. 从这个意义上来说, 由随机试验结果的信息通过随机变量 X 得到. 可以说, $\mathcal{F}$ 是由 X 生成的.

如果随机变量 $S_m(t)$ 对每个 $t=0,1,\cdots,T$ 都是 $\mathcal{F}_t$ 可测的, 则随机过程 $S_m = \{S_m(t); t=0,1,\cdots,T\}$ 称为**适应域流**(adapted to the filtration) $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t=0,1,\cdots,T\}$. 对货币市场存款过程 $S_0(t)$, 利率在期初一般是已知的, 因此, $S_0(t)$ 是 $\mathcal{F}_{t-1}(t=1,\cdots,T)$ 可测的. 在这种情况下, 称过程 $S_0(t)$ 为**可料的**(predictable).

2.2.2 条件期望与鞅

1. 条件期望

考虑带域流 $\mathbb{F}$ 的三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 所定义的带域流的概率空间. 回想随机变量是一个 $\omega \to X(\omega)$ 的映射, 使得对每个 $\omega \in \Omega$, 对应一个实数 $X(\omega)$. 一个随机变量

被称为简单的, 如果 X 能够被分解成如下形式:

$$X(\omega)=\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{1}_{B_j}(\omega), \tag{2.2.1}$$

其中 $\{B_1,\cdots,B_n\}$ 关于每个 $B_j\in\mathcal{F}$ 为 Ω 的有限划分, B_j 的示性函数定义为

$$\mathbf{1}_{B_j}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in B_j,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

关于概率测度 P 的 X 的期望定义为

$$E[X]=\sum_{j=1}^{n}a_jE[1_{B_j}(\omega)]=\sum_{j=1}^{n}a_jP(B_j), \tag{2.2.2}$$

其中 $P(B_j)$ 为包含在 B_j 中的状态 ω 发生的概率. 给出事件 B 已发生的 X 的条件期望定义为

$$\begin{aligned}E[X|B]&=\sum_{x}xP(X=x|B)\\&=\sum_{x}xP(X=x,B)/P(B)\\&=\frac{1}{P(B)}\sum_{\omega\in B}X(\omega)P(\omega).\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

作为一个数值例子, 考虑样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, 代数由划分 $\mathcal{P}=\{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\}\}$ 生成. 状态发生的概率为 $P(\omega_1)=0.2, P(\omega_2)=0.3, P(\omega_3)=0.35, P(\omega_4)=0.15$. 考虑双时段价格过程 S, 其值为

$$S(1;\omega_1)=3,\quad S(1;\omega_2)=3,\quad S(1;\omega_3)=5,\quad S(1;\omega_4)=5,$$

$$S(2;\omega_1)=4,\quad S(2;\omega_2)=2,\quad S(2;\omega_3)=4,\quad S(2;\omega_4)=6,$$

其中树形图如图 2.5 所示.

$S(0;\Omega)=4$
$S(1;\Omega_1,\Omega_2)=3$
$S(2;\Omega_1)=4$
$S(2;\Omega_2)=2$
$S(1;\Omega_4,\Omega_5)=5$
$S(2;\Omega_3)=4$
$S(2;\Omega_4)=6$

图 2.5　在双时段证券模型中, 资产价格过程的树表示

条件期望为

$$E[S(2)|S(1)=3] \quad 和 \quad E[S(2)|S(1)=5].$$

用式 (2.2.3) 计算得

$$\begin{aligned} E[S(2)|S(1)=3] &= \frac{S(2;\omega_1)P(\omega_1)+S(2;\omega_2)P(\omega_2)}{P(\omega_1)+P(\omega_2)} \\ &= (4\times 0.2+2\times 0.3)/0.5 = 2.8; \\ E[S(2)|S(1)=5] &= \frac{S(2;\omega_3)P(\omega_3)+S(2;\omega_4)P(\omega_4)}{P(\omega_3)+P(\omega_4)} \\ &= (4\times 0.35+6\times 0.15)/0.5 = 4.6. \end{aligned}$$

$E[X|\mathcal{F}]$ 的解释

通常要考虑形式为 $E[X|B]$ 的所有条件期望, 其中事件 B 通过代数 $\mathcal{F}$ 运行. 令 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是代数 $\mathcal{F}$ 中的元素. 定义数量 $E[X|\mathcal{F}]$ 为

$$E[X|\mathcal{F}] = \sum_{j=1}^{n} E[X|B_j]\mathbf{1}_{B_j}. \tag{2.2.4}$$

可以看到 $E[X|\mathcal{F}]$ 实际上是一个关于代数 $\mathcal{F}$ 可测的随机变量. 在以上的数值例子中,

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \{\omega_1,\omega_2\}, \{\omega_3,\omega_4\}, \Omega\},$$

$\mathcal{F}_1$ 的元素为 $B_1=\{\omega_1,\omega_2\}$, $B_2=\{\omega_3,\omega_4\}$. 因为

$$E[S(2)|S(1)=3]=2.8 \quad 和 \quad E[S(2)|S(1)=5]=4.6,$$

所以

$$E[S(2)|\mathcal{F}_1] = 2.8\mathbf{1}_{B_1} + 4.6\mathbf{1}_{B_2}.$$

塔性质

由于 $E[X|\mathcal{F}]$ 是一个随机变量, 通过计算它的期望. 可以看到

$$\begin{aligned} E[E[X|\mathcal{F}]] &= \sum_{B\in\mathcal{F}} E[X|B]P(B) = \sum_{B\in\mathcal{F}}\sum_{\omega\in B} X(\omega)(P[\omega]/P(B))P(B) \\ &= \sum_{B\in\mathcal{F}}\sum_{\omega\in B} X(\omega)P(\omega) = E[X]. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

以上结果可由下式产生: 如果 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2$, 则

$$E[E[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1] = E[X|\mathcal{F}_1]. \tag{2.2.6}$$

如果首先取到关于 $\mathcal{F}_2$ 上信息的条件期望, 然后再取最初时刻关于 $\mathcal{F}_1$ 上信息的条件期望, 则这个期望和最初取 $\mathcal{F}_1$ 上的条件期望值是一样的. 这就称为条件期望的**塔性质**(tower property).

假设随机变量 X 是 $\mathcal{F}$ 可测的, 可以证明对任何随机变量 Y, $E[XY|\mathcal{F}] = XE[Y|\mathcal{F}]$ 成立. 利用 (2.2.1), 可以写出 $X = \sum_{B_j \in \mathcal{P}} a_j \mathbf{1}_{B_j}$, 其中 $\mathcal{P}$ 为对应于代数 $\mathcal{F}$ 的划分. 根据式 (2.2.4), 得到

$$
\begin{aligned}
E[XY|\mathcal{F}] &= \sum_{B_j \in \mathcal{P}} E[XY|B_j]\mathbf{1}_{B_j} = \sum_{B_j \in \mathcal{P}} E[a_j Y|B_j]\mathbf{1}_{B_j} \\
&= \sum_{B_j \in \mathcal{P}} a_j E[Y|B_j]\mathbf{1}_{B_j} = XE[Y|\mathcal{F}].
\end{aligned} \tag{2.2.7}
$$

当取关于域流 $\mathcal{F}$ 的条件期望时, 如果关于 $\mathcal{F}$ 提供的信息 X 是已知的, 则可以认为 X 是常数. 关于条件期望其他性质的证明将作为练习 (见习题 2.20).

2. 鞅

术语 “鞅” 起源于赌博, 它意指当处于损失状态时为了自救采取加倍的赌博策略. 在随机过程的文献中, 鞅被认为与适应的随机过程有关. 考虑一个带域流 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t = 0, 1, \cdots, T\}$ 的概率空间, 一个适应的随机过程 $S = \{S(t); t = 0, 1, \cdots, T\}$. 如果对 $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant T$ 满足

$$
E[S(u)|\mathcal{F}_t] = S(t), \tag{2.2.8}
$$

则称 S 为鞅. 如果对 $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant T$ 有

$$
E[S(u)|\mathcal{F}_t] \leqslant S(t), \tag{2.2.9a}
$$

则称适应的随机过程 S 为一个上鞅. 如果对 $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant T$ 有

$$
E[S(u)|\mathcal{F}_t] \geqslant S(t), \tag{2.2.9b}
$$

则称适应的随机过程 S 为一个下鞅. 可以直接推得下列性质:

(1) 所有鞅都是上鞅, 反之则不成立. 同样的结论可应用到下鞅中.

(2) 一个适应的随机过程 S 是一个下鞅当且仅当 $-S$ 是一个上鞅; S 是鞅当且仅当它既是上鞅, 又是下鞅.

鞅是关于公平赌博的模型. 例如, 令 X_n 表示赌博者在 n 阶段所拥有的钱数. 当 $X_n = \alpha_n$ 时, 鞅性质表示赌博者在 $n+1$ 阶段的钱数也应该等于 α_n, 与他之前的财富无关. 因为赌博者更多可能是输钱而不是赢钱 (赢钱而不是输钱), 所以一个上鞅 (下鞅) 可以被用来刻画不利 (有利) 的赌博.

必须强调的是, 鞅的定义与域流 (信息集) 和概率测度有关. 在期权定价理论中, 风险中性定价方法与鞅理论有密切的关系. 在 2.2.4 小节中, 将证明在证券模型中存在无套利机会的充分必要条件是存在由资产价格过程的鞅性质构造的风险中性定价测度.

3. 鞅变换

假设 S 是一个鞅, H 是一个关于域流 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t;t=0,1,\cdots,T\}$ 的可料过程, 定义过程

$$G_t=\sum_{u=1}^{t}H_u\Delta S_u, \tag{2.2.10}$$

其中 $\Delta S_u=S_u-S_{u-1}$. 因此, 推得 $\Delta G_u=G_u-G_{u-1}=H_u\Delta S_u$. 如果 S 和 H 分别表示资产的价格过程和交易策略, 则 G 可被看成是收益过程. 注意到交易策略 H 是一个可料过程, 即 H_t 是 $\mathcal{F}_{t-1}$ 可测的. 这是因为对每个证券持有的份额在交易初期就被决定了, 它是通过将所有有效的信息在当时都加入到总额中.

称 G 为 S 通过 H 的鞅变换, G 本身也是一个鞅. 为了证明这个结论, 只要证明当 $t\geqslant 0,s\geqslant 0$ 时, $E[G_{t+s}|\mathcal{F}_t]=G_t$ 就可以了. 为此, 考虑

$$\begin{aligned}E[G_{t+s}|\mathcal{F}_t]&=E[G_{t+s}-G_t+G_t|\mathcal{F}_t]\\&=E[H_{t+1}\Delta S_{t+1}+\cdots+H_{t+s}\Delta S_{t+s}|\mathcal{F}_t]+E[G_t|\mathcal{F}_t]\\&=E[H_{t+1}\Delta S_{t+1}|\mathcal{F}_t]+\cdots+E[H_{t+s}\Delta S_{t+s}|\mathcal{F}_t]+G_t.\end{aligned}$$

考虑典型项 $E[H_{t+u}\Delta S_{t+u}|\mathcal{F}_t]$, 根据条件期望的塔性质, 可以将其表示成 $E[E[H_{t+u}\Delta S_{t+u}|\mathcal{F}_{t+u-1}]]$. 更进一步, 由于 H_{t+u} 是 $\mathcal{F}_{t+u-1}$ 可测的, 并且 S 是一个鞅, 于是利用式 (2.2.7), (2.2.8) 有

$$E[H_{t+u}\Delta S_{t+u}|\mathcal{F}_{t+u-1}]=H_{t+u}E[\Delta S_{t+u}|\mathcal{F}_{t+u-1}]=0.$$

结合所有的计算, 就得到所需要的结果.

2.2.3 停时和停止过程

给定带域流的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 和适应过程 X_t. 考虑一个赌博游戏, 赌博者既有权利继续这个游戏, 也有权利放弃得到报酬 X_t. 停止规则定义为在事先给出当时的有效信息的情况下, 使得赌博者知道在每个时间 t 是继续还是放弃赌博. 停时 τ 是一个随机变量, $\Omega\to\{0,1,\cdots,T\}$, 使得

$$\{\tau=t\}=\{\tau(\omega)=t;\omega\in\Omega\}\in\mathcal{F}_t, \tag{2.2.11}$$

即只要给出在 t 时刻关于信息 $\mathcal{F}_t$ 的条件, 就能确定事件 $\{\tau=t\}$ 是发生还是没有发生. 这也就证明了 τ 是一个停时当且仅当 $\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$ (见习题 2.23). 例如, 在

图 2.5 中, 考虑定义在两时段模型中的适应过程 S_t. 假设 S_t 的值等于 3, 定义 τ 是首次时间, 即

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : S_t = 3\}.$$

在关于 $\mathcal{F}_t(t=0,1,2)$ 的条件下, 因为能确定事件 $\{\tau = t\}$ 是否会发生, 所以它被认为是停时. 另一方面, 因为随机时间依赖于关于将来的信息, 所以由

$$\tau = \sup\{t \geqslant 0 : S_t = 3\}$$

定义的随机时间不是一个停时.

停止 (抽样) 过程

已知一个适应过程 S_t, 关于停时 τ 的停止 (抽样) 过程 $S_t^\tau(\omega)$ 定义为

$$S_t^\tau(\omega) = \begin{cases} S_t(\omega), & t \leqslant \tau(\omega), \\ S_{\tau(\omega)}(\omega), & t \geqslant \tau(\omega). \end{cases} \tag{2.2.12}$$

在离散的多期模型中, $S_t^\tau(\omega)$ 能表示为

$$S_t^\tau(\omega) = \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t\}} S_t + \sum_{u=0}^{t-1} \mathbf{1}_{\{\tau = u\}} S_u.$$

因为 $\mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t\}} S_t$ 和 $\mathbf{1}_{\{\tau = u\}} S_u (u = 0, 1, \cdots, t-1)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的, 因此, 停止过程 $S_t^\tau(\omega)$ 也是适应的. 更有趣的是, 如果根据停止规则停止一个鞅, 则停止过程仍然是一个鞅. 也就是说, 假设 M_t 是一个鞅, 则

$$E\left[M_{t+s}^\tau\right] = M_t, \quad s = 1, 2, \cdots. \tag{2.2.13}$$

这个结论就是著名的**Doob 可选样本定理**(Doob optional sampling theorem). 实际上, 即使用上鞅或下鞅来代替鞅, 定理的结论仍然是成立的.

在证明的步骤中, 容易看到定理对上鞅或下鞅的正确性. 一旦建立了关于上鞅或下鞅的结果, 并且注意到一个鞅既是上鞅又是下鞅, 则结论对鞅也是成立的. 令 X_t 是一个下鞅. 注意到 $\{\tau = s\}(s = 0, 1, \cdots, t)$, $\{\tau \geqslant t+1\}$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的, 因此,

$$E[\mathbf{1}_{\{\tau = s\}} X_s | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau = s\}} X_s, \quad s = 0, 1, \cdots, t.$$

借助下鞅的性质有

$$E\left[\mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t+1\}} X_{t+1} | \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t+1\}} E[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] \geqslant \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t+1\}} X_t.$$

进一步, 考虑

$$E[X_{t+1}^\tau | \mathcal{F}_t] = E\left[\mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t+1\}} X_{t+1} | \mathcal{F}_t\right] + \sum_{s=0}^{t} E\left[\mathbf{1}_{\{\tau = s\}} X_s | \mathcal{F}_t\right]$$

$$\geqslant \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant t+1\}} X_t + \sum_{s=0}^{t} \mathbf{1}_{\{\tau = s\}} X_s = X_t^{\tau},$$

所以停止下鞅仍然是一个下鞅. 因此, 对下鞅结果仍然成立. 对上鞅可以类似地证明.

停止过程的最终值是 $S_{\tau(\omega)}(\omega)(\omega \in \Omega)$. 一个最优停止规则定义为停时的最优选择使得期望最终值是最大的. 如果

$$E[S_{\tau^*}] = \max_{\tau \in \{0,1,\cdots,T\}} E[S_\tau], \tag{2.2.14}$$

则停时 τ^* 称为最优的. 美式期权的提前实施时间是与最优停时有关的, 详细的内容可以在 5.2 节中找到.

2.2.4 多时段证券模型

现在已经有了域流、适应随机过程和鞅的知识. 接着, 讨论多时段证券模型的金融经济学的基本原理. 特别地, 考虑不存在套利机会和存在鞅测度 (风险中性概率测度) 的关系.

从带有 M 个风险证券的离散 n 期证券模型开始. 类似于离散的单时段模型, 存在 K 种可能现实状态的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_K\}$. 资产价格过程 $\mathbf{S}(t) = (S_1(t),\ S_2(t), \cdots, S_M(t))(t = 0, 1, \cdots, n)$ 是行向量, 其元素是证券价格. 又存在货币市场存款过程 $S_0(t)$, 其值为

$$S_0(t) = (1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_t),$$

其中 r_u 为一个时段 $(u-1, u)(u = 1, \cdots, t)$ 中的利率. 通常假设在开始的时间段 $(t-1, t)$ 中, r_t 是已知的, 并且 r_t 是 $\mathcal{F}_{t-1}$ 可测的. 交易策略是投资者采取的规则, 它根据在每一个时刻和每一个证券中, 并且在由域流提供的有效信息的基础上来指定投资者的位置. 因此, 可以把每一个交易策略看成是一个适应的随机过程. 用一个向量的随机过程 $\mathbf{h}(t) = (h_0(t),\ h_1(t),\ h_2(t), \cdots, h_M(t))^{\mathrm{T}}(t = 1, 2, \cdots, n)$ (代表一个列向量) 来描述一个交易策略, 其中 $h_m(t)$ 为从 $t-1$ 时刻到 t 时刻投资组合中对第 m 个证券持有的份额. 因此, $h_m(t)(m = 0, 1, \cdots, M)$ 是 $\mathcal{F}_{t-1}$ 可测的.

投资组合的价值是由下式给出的随机过程:

$$V(t) = h_0(t) S_0(t) + \sum_{m=1}^{M} h_m(t) S_m(t), \quad t = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.2.15}$$

在观察到资产价格后, 但在投资组合中权重改变之前, 式 (2.2.15) 右边给出了当前投资组合的价值.

记 $\Delta S_m(t) = S_m(t) - S_m(t-1)$ 为第 m 个证券在时刻 $t-1$ 和 t 之间一个单位价值的改变量. 在第 m 个证券中, 从时刻 0 到时刻 t, 有关投资累计收益为

$$\sum_{u=1}^{t} h_m(u)\Delta S_m(u).$$

在持有到时间 t 为止的 M 个风险证券和货币市场存款组成的投资组合中, 定义该投资组合的收益过程 $G(t)$ 是总的累计收益. $G(t)$ 的价值如下:

$$G(t) = \sum_{u=1}^{t} h_0(u)\Delta S_0(u) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{u=1}^{t} h_m(u)\Delta S_m(u), \quad t = 1, 2, \cdots, n.$$

如果定义贴现价格过程 $S_m^*(t)$ 为

$$S_m^*(t) \doteq S_m(t)/S_0(t), \quad t = 0, 1, \cdots, n,\ m = 1, 2, \cdots, M,$$

并且记 $\Delta S_m^*(t) = S_m^*(t) - S_m^*(t-1)$, 则贴现价值过程 $V^*(t)$ 和贴现收益过程 $G^*(t)$ 分别为

$$V^*(t) = h_0(t) + \sum_{m=1}^{M} h_m(t)S_m^*(t), \quad t = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.2.16a}$$

$$G^*(t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{u=1}^{t} h_m(u)\Delta S_m^*(u), \quad t = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.2.16b}$$

一旦投资者知道资产价格 $S_m(t)(m = 1, 2, \cdots, M)$, 作为回应, 他可以根据得到的新信息, 将交易策略 $\mathbf{h}(t)$ 改变为 $\mathbf{h}(t+1)$. 令 t^+ 表示在 t 时刻调整投资组合后瞬间时刻. 因为投资组合中持有的资产从 $\mathbf{h}(t)$ 变到 $\mathbf{h}(t+1)$, 所以在 t^+ 时刻, 新的投资组合价值为

$$V(t^+) = h_0(t+1)S_0(t) + \sum_{m=1}^{M} h_m(t+1)S_m(t). \tag{2.2.17}$$

假设采取自融资的交易策略, 使得在投资组合内通过出售其他的证券来融资购买一个额外份额的特殊证券, 由于从投资组合中没有增加或撤走资金, 所以 $V(t) = V(t^+)$. 结合方程 (2.2.15) 和 (2.2.17), 在自融资的条件下, 投资组合从 $\mathbf{h}(t)$ 到 $\mathbf{h}(t+1)$ 的变化必定为

$$[h_0(t+1) - h_0(t)]S_0(t) + \sum_{m=1}^{M}[h_m(t+1) - h_m(t)]S_m(t) = 0. \tag{2.2.18}$$

如果在所有交易时间没有增加或撤走资金, 那么投资组合价值 $V(t) - V(0)$ 的累计改变应该等于在所有交易日与证券价格改变有关的收益 $G(t)$. 因此, 一个交易策略

H 是自融资的当且仅当

$$V(t) = V(0) + G(t) = V(0) + \sum_{u=1}^{t} h_0(u)\Delta S_0(u) + \sum_{u=1}^{t}\sum_{m=1}^{M} h_m(u)\Delta S_m(u). \tag{2.2.19a}$$

用类似的方法, 利用方程 (2.2.16a), (2.2.16b) 可以证明 H 是自融资的交易策略当且仅当

$$V^*(t) = V^*(0) + G^*(t). \tag{2.2.19b}$$

1. *无套利原理*

将单时段证券模型的无套利机会的定义推广到多时段模型. 交易策略 H 表示一个套利机会当且仅当价值过程 $V(t)$ 和 H 满足下列性质:

(i) $V(0) = 0$;

(ii) $V(T) \geqslant 0$ 且 $E[V(T)] > 0$;

(iii) H 是自融资的,

其中 E 为在实际概率测度下的期望. 等价地, 自融资交易策略 H 存在一个套利机会当且仅当① $G^*(T) \geqslant 0$ 和② $E[G^*(T)] > 0$. 类似于单时段模型, 存在无套利机会当且仅当存在风险中性概率测度. 在多时段模型中, 风险中性概率是根据鞅来定义的.

2. *鞅测度*

如果测度 Q 满足下面的性质, 则称 Q 为鞅测度 (或称为风险中性概率测度):

(1) 对所有 $\omega \in \Omega$, $Q(\omega) > 0$;

(2) 在证券模型中, 每一个贴现价格过程 $S_m^*(m = 1, 2, \cdots, M)$ 在 Q 下都是一个鞅, 即对 $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant T$,

$$E_Q[S_m^*(u)|\mathcal{F}_t] = S_m^*(t),$$

因此, 称贴现价格过程 $S_m^*(t)$ 为一个 Q 鞅.

鞅概率价格的计算

作为一个数值例子, 确定如图 2.5 所示的、与双时段证券模型有关的鞅测度 Q. 设 $r \geqslant 0$ 为某一时段上的常数无风险利率, 并且记 $Q(\omega_j)$ 为与状态 $\omega_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 有关的鞅测度. 利用 S_t 的鞅性质, 对 $Q(\omega_1), \cdots, Q(\omega_4)$ 得到下列等式:

(i) $t = 0$ 和 $u = 1$,

$$4 = \frac{3}{1+r}[Q(\omega_1) + Q(\omega_2)] + \frac{5}{1+r}[Q(\omega_3) + Q(\omega_4)]; \tag{2.2.20a}$$

(ii) $t=0$ 和 $u=2$,

$$\begin{aligned}4=&\frac{4}{(1+r)^2}Q(\omega_1)+\frac{2}{(1+r)^2}Q(\omega_2)\\&+\frac{4}{(1+r)^2}Q(\omega_3)+\frac{6}{(1+r)^2}Q(\omega_4);\end{aligned}\tag{2.2.20b}$$

(iii) $t=1$ 和 $u=2$,

$$3=\frac{4}{1+r}\frac{Q(\omega_1)}{Q(\omega_1)+Q(\omega_2)}+\frac{2}{1+r}\frac{Q(\omega_2)}{Q(\omega_1)+Q(\omega_2)},\tag{2.2.20c}$$

$$5=\frac{4}{1+r}\frac{Q(\omega_3)}{Q(\omega_3)+Q(\omega_4)}+\frac{6}{1+r}\frac{Q(\omega_4)}{Q(\omega_3)+Q(\omega_4)}.\tag{2.2.20d}$$

求解上述联立方程是冗长的过程. 沿着从在 $t=0$ 时的节点到 $t=2$ 时的节点 ω_j, 根据条件概率的乘积, $Q(\omega_j)$ 是已知的, 故观察分析计算过程可以适当简化. 首先, 从与上一个分支 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 有关的条件概率 p 开始. 对应的条件概率 p 满足

$$4=\frac{3}{1+r}p+\frac{5}{1+r}(1-p),$$

从而 $p=\frac{1-4r}{2}$. 类似地, 来自节点 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 与分支 $\{\omega_1\}$ 有关的条件概率 p' 满足

$$3=\frac{4}{1+r}p'+\frac{2}{1+r}(1-p'),$$

从而 $p'=\frac{1-3r}{2}$. 用类似的方法, 来自节点 $\{\omega_3,\omega_4\}$ 与分支 $\{\omega_3\}$ 有关的条件概率 p'' 是 $\frac{1-5r}{2}$. 因此, 鞅概率为

$$\begin{aligned}Q(\omega_1)&=pp'=\frac{1-4r}{2}\frac{1-3r}{2},\\Q(\omega_2)&=p(1-p')=\frac{1-4r}{2}\frac{1+3r}{2},\\Q(\omega_3)&=(1-p)p''=\frac{1+4r}{2}\frac{1-5r}{2},\\Q(\omega_4)&=(1-p)(1-p'')=\frac{1+4r}{2}\frac{1+5r}{2}.\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

可以证明这些鞅概率满足方程 (2.2.20a)~(2.2.20d). 为了使鞅概率保持为正的, 必须加上限制条件 $r\geqslant 0.2$. 可以证明当 $r\geqslant 0.2$ 时, 证券模型存在套利机会 (见习题 2.25).

作为一个注记, 在任何单时段模型中的套利机会都能导出在整个多时段模型中的套利机会. 这是因为在某个特殊的单时段遵循的套利交易策略, 在所有其他的时段内也同样遵循, 因此, 在多时段模型中套利发生.

价值过程的鞅性质

假设 H 是一个自融资的交易策略, Q 是关于域流 $\mathcal{F}$ 的鞅测度, 那么价值过程 $V(t)$ 是 Q 鞅. 因为 H 是自融资的, 为了证明这个结论, 利用关系式 (2.2,19b) 得到

$$\begin{aligned} V^*(t+1) - V^*(t) &= G^*(t+1) - G^*(t) \\ &= [\mathbf{S}^*(t+1) - \mathbf{S}^*(t)]\mathbf{h}(t+1). \end{aligned}$$

由于 H 是一个可料过程, 于是 $V^*(t)$ 是 Q 鞅 $\mathbf{S}^*(t)$ 的鞅变换. 因此, $V^*(t)$ 自身也是一个 Q 鞅.

3. *资产定价 (多时段模型) 的基本定理*

上述结果可以用来证明鞅测度 Q 的存在性蕴涵了无套利机会. 为了证明这个结论, 假设 H 是关于 $V^*(T) \geqslant 0$ 和 $E[V^*(T)] > 0$ 的自融资交易策略, 其中 E 为在实际概率测度 P 下的期望且 $P(\omega) > 0$, 同时说明 $V^*(T)$ 对某个实际状态是严格正的. 由于 $Q(\omega) > 0$, 所以有 $E_Q[V^*(T)] > 0$. 然而, 由于 $V^*(t)$ 是一个满足条件 $V^*(0) = E_Q[V^*(T)]$ 的 Q 鞅, 借助于 $E_Q[V^*(T)] > 0$, 总能得到 $V^*(0) > 0$. 因此, 当 $V^*(0) = 0$ 时, 不可能有 $V^*(T) \geqslant 0$ 和 $E[V^*(T)] > 0$. 因此, 自融资交易策略 H 不可能是一个套利机会.

与上述相反的结论也是正确的, 也就是说, 无套利机会蕴涵了鞅测度的存在性. 在上述证明的基础上, 可以直觉地略述如下: 如果在多时段模型中不存在套利机会, 那么在任意的单时段中将不存在套利机会. 因为在每个单时段不允许套利机会, 所以就能构造单时段的风险中性条件概率. 因此, 沿着路径从 $t = 0$ 时的节点到最后节点 (T, ω), 将所有风险中性条件概率相乘, 就得到鞅概率测度 $Q(\omega)$. 基于上述论证构造的严格证明是相当有技巧的, 在 Harrison 和 Kreps (1979) 以及 Bingham 和 Kiesel (2004) 的文献中可以见到详细的证明过程.

将上述结论总结在下面的定理中.

定理 2.3 一个多时段证券模型是无套利的当且仅当存在一个概率测度 Q, 使得贴现资产价格过程是 Q 鞅.

4. *未定权益的计算*

关于未定权益在单时段模型中的绝大部分结论可以扩展到多时段模型中. 首先, 鞅测度是唯一的当且仅当多时段证券模型是完全的, 这里完全性意味着所有的未定权益 ($\mathcal{F}_T$ 可测随机变量) 均可由自融资的交易策略所复制. 在一个无套利的完全市场中, 一个可达未定权益的套利价格可以在复制未定权益的投资组合价值的鞅测度下由贴现的期望值给出. 令 Y 为在到期日 T 的未定权益, 而 $V(t)$ 表示在 $t(t < T)$ 时刻未定权益的套利价格. 因此, 利用 Q 鞅性质有

$$V^*(t) = E_Q[V^*(T)|\mathcal{F}_t] = E_Q[Y^*|\mathcal{F}_t].$$

对确定的利率得到

$$V(t) = \frac{S_0(t)}{S_0(T)} E_Q[Y|\mathcal{F}_t], \tag{2.2.22}$$

其中 $S_0(t)$ 为无风险资产在时刻 t 的价格, 比率 $S_0(t)/S_0(T)$ 为从 t 到 T 的时段上的贴现因子.

2.2.5　多时段二叉树模型

将单时段二叉树模型扩展到多时段二叉树模型. 首先从两时段的二叉树模型开始. 资产价格以及看涨期权价格二叉树过程的相应动态如图 2.6 所示. 假设资产价格跳跃的比率 u 和 d 在整个二叉树过程中有相同的值.

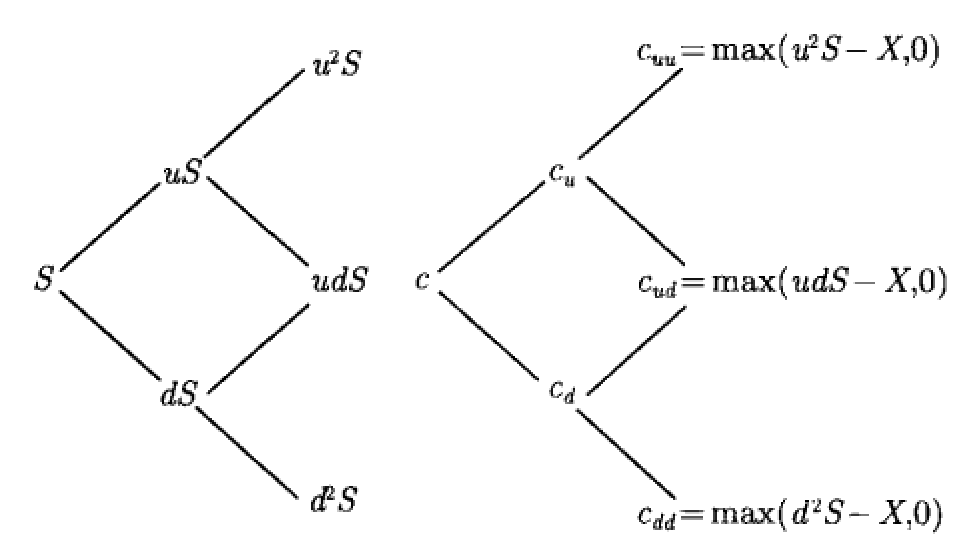


图 2.6　在两时段的二叉树模型中资产价格以及看涨期权价格的动态

令 c_{uu} 表示在当前时间后经过两个时段资产价格连续上升两次的看涨期权价格. 对于 c_{ud} 和 c_{dd} 也有相同的符号解释. 基于方程 (2.1.21) 描述的类似关系, 看涨期权的价值 c_u, c_d 与 c_{uu}, c_{ud}, c_{dd} 的关系如下:

$$c_u = \frac{pc_{uu} + (1-p)c_{ud}}{R} \quad 和 \quad c_d = \frac{pc_{ud} + (1-p)c_{dd}}{R},$$

其中 $p = \dfrac{R-d}{u-d}$ 和 $R = e^{r\Delta t}$. 其次, 把上述结果代入方程 (2.1.21), 从期末到当前时间为两期时的看涨期权价值为

$$c = \frac{p^2c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2c_{dd}}{R^2},$$

其中相应的最终收益价值为

$$c_{uu} = \max(u^2S - X, 0), \quad c_{ud} = \max(udS - X, 0), \quad c_{dd} = \max(d^2S - X, 0).$$

注意到系数 $p^2, 2p(1-p)$ 和 $(1-p)^2$ 分别表示在两个时段二叉树资产价格过程中有两次上升、一次上升和一次下降以及两次都下降的风险中性概率. 二叉树模型扩展

到 n 时段的情况是相当简单的. 在 n 次二项步骤后, j 次上升和 $n-j$ 次下降的风险中性概率为 $C_j^n p^j(1-p)^{n-j}$, 其中 $C_j^n = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ 为从 n 次二项步骤中选取 j 次上升的次数. j 次上升以及 $n-j$ 次下降时的相应最终收益为 $\max(u^j d^{n-j}S - X, 0)$. 因此, n 时段二叉树模型的看涨期权价值为

$$c = \frac{\sum_{j=0}^{n} C_j^n p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S - X, 0)}{R^n}. \tag{2.2.23}$$

定义 k 为满足 $u^k d^{n-k} S \geqslant X$ 的最小非负整数, 即 $k \geqslant \dfrac{\ln \dfrac{X}{Sd^n}}{\ln \dfrac{u}{d}}$, 从而得到

$$\max(u^j d^{n-j} S - X, 0) = \begin{cases} 0, & j < k, \\ u^j d^{n-j} S - X, & j \geqslant k. \end{cases} \tag{2.2.24}$$

为使看涨期权在到期日处于实值状态, 整数 k 给出了在多时段二叉树过程中资产价格所需要上升次数的最小数目. 因此, 在方程 (2.2.23) 中, 看涨期权的公式可简化为

$$c = S \sum_{j=k}^{n} C_j^n p^j (1-p)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{R^n} - XR^{-n} \sum_{j=k}^{n} C_j^n p^j (1-p)^{n-j}. \tag{2.2.25}$$

式 (2.2.25)的最后一项可以认为是在风险中性测度下, 持有者在到期日获得的贴现因子为 R^{-n} 的收益的期望值, 并且 $\sum\limits_{j=k}^{n} C_j^n p^j (1-p)^{n-j}$ 可以看成是看涨期权在到期日处于实值的风险中性概率. 上述概率值与定义为

$$\Phi(n, k, p) = \sum_{j=k}^{n} C_j^n p^j (1-p)^{n-j} \tag{2.2.26}$$

的**互补二叉树分布函数**(complementary binomial distribution function) 有关. 注意到 $\Phi(n,k,p)$ 给出了在 n 次二叉树试验中至少有 k 次成功的概率, 其中 p 表示在每次试验中成功的概率. 此外, 如果记 $p' = \dfrac{up}{R}$ 和 $1 - p' = \dfrac{d(1-p)}{R}$, 则对于 n 时段的二叉树模型看涨期权价格公式可以表达为

$$c = S\Phi(n, k, p') - XR^{-n}\Phi(n, k, p). \tag{2.2.27}$$

式 (2.2.27) 的第一项给出了看涨期权在期末处于实值时资产价格在到期日的贴现期望值, 第二项给出了通过实施看涨期权后期望成本的现值, 其中期望是在风险中性测度下取的.

利用在风险中性测度下未定权益收益的贴现期望的论证, 对于 n 期二叉树模型的看涨期权价格可以用下述经典形式表达:

$$c = \frac{1}{R^n}E^*[c_T] = \frac{1}{R^n}E^*[\max(S_T - X, 0)], \quad T = t + n\Delta t, \tag{2.2.28}$$

其中 $c_T = \max(S_T - X, 0)$ 表示看涨期权在到期日 T 时的收益, $\frac{1}{R^n}$ 表示在 n 期的贴现因子, 期望算子 E^* 是在风险中性测度下, 而不是在与实际 (主观的) 资产价格过程相关联的真实概率测度下取的.

数值实现

n 期的二叉树模型可以用 n 阶树结构图表示出来 (三阶树如图 2.7 所示). 如果 $ud = 1$, 则二叉树关于 S 是对称的; 如果 $ud > 1$, 则向上偏斜; 如果 $ud < 1$, 则向下偏斜. 在二叉树中, 从当前时刻向前 m 步时, 有 $m + 1$ 个节点. 通过 j 次上升和 $m - j$ 次下降, 节点上的资产价格为 $Su^jd^{m-j}(j = 0, 1, \cdots, m)$. 由于在期权合约中给出了到期日的收益函数, 因此, 在到期日期权的可能价值是已知的. 不用多时段的二叉树公式 (2.2.31), 下述逐步回推过程在数值实现中是更有效的: 首先用二叉树公式 (2.1.21) 计算出到期日前一期节点上的期权价格. 一旦已知到期日前一期的期权价格, 重复同样的计算过程, 就可以求出到期日前两期的期权价格. 在树中进行 n 步后, 就到达初始节点 (树的顶端), 从而得到期权的价格.

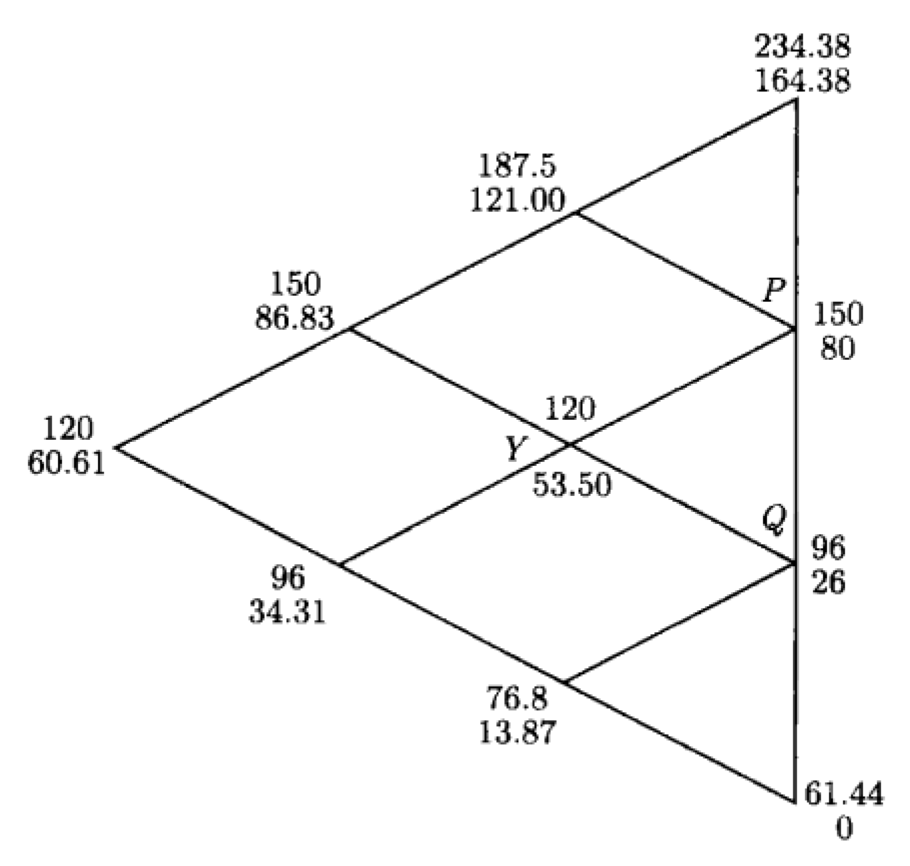


图 2.7　阐述了敲定价格为 $X = 70$ 的三时段二叉树计算方法, 上方的数字表示资产价格, 下方的数字表示期权价格

作为一个计算例子, 假设已经选择下述二叉树参数的值: $u = 1.25, d = 0.8$, 每

个时段的贴现因子为 $1/R = 0.95$. 根据 (2.1.21) 有

$$p = \frac{R-d}{u-d} = \left(\frac{1}{0.95} - 0.8\right) \Big/ (1.25 - 0.8) = 0.5614.$$

看涨期权的敲定价格为 70, 资产价格的现值为 120. 图 2.7 给出了三时段的二叉树图, 节点上方与下方的数字分别表示资产价格和期权价格. 例如, 在节点 P 和 Q 上的期权价格分别为 $\max(150-70,0) = 80$ 和 $\max(96-70,0) = 26$. 节点 Y 上的期权价格为

$$\begin{aligned} c_Y &= \frac{1}{R}[p\, c_P + (1-p)c_Q] \\ &= 0.95(0.5614 \times 80 + 0.4386 \times 26) \\ &= 53.50\ (\text{保留小数点后 2 位}). \end{aligned}$$

从到期日到当前时刻倒推三步, 得到当 $S = 120$ 时期权的当前价格为 60.61(图 2.7).

2.3 资产价格运动和随机过程

在本节中, 讨论模拟资产价格运动的随机模型. 如果资产价格随时间以不确定的方式改变, 那么这个资产价格运动被称为遵循一个**随机过程**(stochastic process). 随机过程的研究与随机变量 X_t 簇的结构研究有关, 其中 t 为取自某个指标集 $\mathcal{T}$ 中的参数 (t 通常被理解为时间参数). 如果指标集 $\mathcal{T}$ 是离散的, 那么随机过程 $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ 被称为离散的随机过程. 对连续的指标集 $\mathcal{T}$, 称为连续的随机过程. 换言之, 资产价格的离散时间随机过程表示资产价格可在某个离散的固定时间点变化. 另一方面, 遵循连续时间的随机过程可以在任何时间改变其价值, 而且随机变量 X_t 的取值可以是离散的, 也可以是连续的, 相应的随机过程分别被称为离散值和连续值. 事实上, 股价仅可在离散值和股票交易所开放日发生变化. 为了利用随机分析中的分析工具, 在后面的章节中假设资产价格过程是连续值的连续时间随机过程. **马尔可夫过程**(Markovian process) 是一个给出了 X_s 和 $X_t(t > s)$ 的值的随机过程, 它仅依赖于 X_s, 而不依赖于 $X_u(u < s)$ 的取值. 如果资产价格服从一个马尔可夫过程, 那么仅当前的资产价格与预测它的将来价值有关. 资产价格过程的这个马尔可夫性质与**弱型市场有效性**(weak form of market efficiency) 是一致的, 即假设资产价格的当前价值已经包含了过去价格的所有信息, 并且与达到现值的资产价格所取的特定路径是不相关的. 如果确实与过去的历史有关, 即某个特定模式有使资产价格上升的更多机会, 那么当这种模式出现时投资者必定哄抬资产价格, 并且有利可图的优势将被消除.

从离散随机游动模型的讨论开始, 随后推导了它的连续极限, 得到了生成连续随机游动的概率密度函数的 Fokker-Planck 方程. 然后给出了布朗过程的正式定义,

并讨论了布朗过程的一些性质.

2.3.1 随机游动模型

本小节来描述无约束的一维离散随机游动, 并考虑用离散随机游动的连续极限来建立连续的随机游动模型. 假设一个粒子从 x 轴的原点出发, 向左或向右跳动相同长度 δ. 当粒子在第 i 步时分别向左或向右移动, 定义 x_i 是一个取值为 δ 或 $-\delta$ 的随机变量. 假设跳跃的概率是不变的, 即这些概率在所有时间段都是一样的, 那么写出概率为

$$P(x_i = \delta) = p, \quad P(x_i = -\delta) = q, \tag{2.3.1}$$

其中 $p + q = 1$, p, q 与 i 无关. 个体的跳动假设是相互独立的, 所以随机变量 $x_i (i = 1, 2, \cdots)$ 是独立的. 这个离散随机游动问题就是一个离散的马尔可夫过程 (图 2.8).

图 2.8　离散随机游动模型的图形表示, 假设在 $i-1$ 步后粒子处于 $x = k\delta (|k| \leqslant i-1)$ 的位置, 在第 i 步, 它依概率 p 移动到右边或依概率 q 移动到左边

定义离散总和过程为

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \tag{2.3.2}$$

它给出了在第 n 步后粒子的位置. 由于 x_i 的期望值为

$$E[x_i] = \delta p - \delta q = (p-q)\delta, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

因此,

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i] = (p-q)\delta n. \tag{2.3.3}$$

因为 x_i 是相互独立的, 所以有

$$\mathrm{var}(X_n) = n \ \mathrm{var}(x_i).$$

x_i 的方差为

$$\mathrm{var}(x_i) = [\delta^2 p + (-\delta)^2 q] - (E[x_i])^2 = \delta^2 - (p-q)^2\delta^2 = 4pq\delta^2,$$

所以

$$\mathrm{var}(X_n) = 4pq\delta^2 n. \tag{2.3.4}$$

称 $X_{n+1} - X_n$ 为离散随机游动模型的一个增量. 因为 X_n 是一个独立同分布 (iid) 随机变量的总和过程, 所以可以观察到稳定和独立增量的性质.

连续极限

下面用上述离散模型极小步长的连续极限来生成连续的随机游动模型. 假设每单位时间有 r 步, 那么根据 (2.3.3), (2.3.4), 每单位时间 μ 粒子的平均位移是 $(p-q)\delta r$, 并且在每单位时间 σ^2 内平均值附近观察到的位移方差是 $4pq\delta^2 r$. 令 $\lambda = 1/r$ 为两个连续步间的时间区间, 并且令 $u(x,t)$ 表示 t 时粒子在 x 位置的概率. 现在, 记 $X_n = x$, $n\lambda = t$, 于是在 $t = n\lambda$ 时有

$$u(x,t) = P(X_n = x). \tag{2.3.5}$$

为了在 $t+\lambda$ 时到达位置 x, 粒子在 t 时刻必定位于 $x-\delta$ 或 $x+\delta$. 在 $x-\delta$ (或 $x+\delta$) 处粒子依概率 p (或 q) 在下一个时间段移动到 x. 因此, 概率函数 $u(x,t)$ 满足如下递推关系:

$$u(x,t+\lambda) = pu(x-\delta,t) + qu(x+\delta,t). \tag{2.3.6}$$

在连续极限中, 令 $\delta \to 0$ 和 $r \to \infty$, 则 $\lambda \to 0$. 现在考虑关系式 (2.3.6) 的泰勒展开:

$$\begin{aligned}
&u(x,t)+\lambda\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + O(\lambda^2) \\
=&p\left[u(x,t) - \delta\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + O(\delta^3)\right] \\
&+q\left[u(x,t) + \delta\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\delta^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + O(\delta^3)\right].
\end{aligned}$$

简化上式得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[(q-p)\frac{\delta}{\lambda}\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\lambda) + O\left((q-p)\frac{\delta^3}{\lambda}\right). \tag{2.3.7}$$

当 $\delta, \lambda \to 0$ 时, 取极限, 于是每单位时间的平均位移和方差分别为

$$(p-q)\frac{\delta}{\lambda} = \mu \quad 和 \quad 4pq\frac{\delta^2}{\lambda} = \sigma^2, \tag{2.3.8}$$

其中 μ 和 σ^2 为有限量. 如果 p 和 q 为无穷小量, 则离散随机游动模型就没有意义了. 换句话说, 必须使 $p = O(1), q = O(1)$ 和 $p + q = 1$. 因此, 可以从 $4pq\frac{\delta^2}{\lambda} = \sigma^2$ 中推出 $\frac{\delta^2}{\lambda} = O(1)$ 或 $\frac{\delta}{\lambda} = O\left(\frac{1}{\delta}\right)$. 更进一步, 从 $(p-q)\frac{\delta}{\lambda} = \mu$ 和 $p+q=1$ 中推导出对某些确定的 k, p 和 q 渐近展开到 $O(\delta)$ 式子必须符合下述形式:

$$p \approx \frac{1}{2}(1+k\delta) \quad 和 \quad q \approx \frac{1}{2}(1-k\delta).$$

因此, 有 $4pq \approx 1$ 和

$$\lim_{\delta,\lambda\to 0}\frac{\delta^2}{\lambda}=\sigma^2. \tag{2.3.9}$$

最后, 从 $(p-q)\dfrac{\delta}{\lambda}=\mu$ 和条件 (2.3.9) 推得出 $p-q\approx\dfrac{\mu}{\sigma^2}\delta$, 因此, $k=\dfrac{\mu}{\sigma^2}$. 于是 p 和 q 的渐近展开式为

$$p\approx\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma^2}\delta\right)\quad 且\quad q\approx\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu}{\sigma^2}\delta\right). \tag{2.3.10}$$

注意到当渐近极限 $\delta\to 0$ 时, $p\to\dfrac{1}{2}$ 和 $q\to\dfrac{1}{2}$. 如果这种情况不发生, 则漂移率将是无限的. 由于 $\dfrac{\delta^2}{\lambda}=O(1)$, 所以在 (2.3.7) 中的最后一项为 $O(q-p)\dfrac{\delta^3}{\lambda}=O(\lambda)$. 因此, 对带漂移率的连续随机游动的概率密度函数 $u(x,t)$, 在 (2.3.7) 中取极限 $\delta,\lambda\to 0$, 就得到下面的偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.3.11}$$

偏微分方程 (2.3.11) 称为**向前 Fokker-Planck 方程**(forward Fokker-Planck equation). 漂移率为 μ, 扩散率为 σ^2. 在时刻 t, 粒子的平均位移率为 μt, 在平均位置附近观测到位移的方差为 $\sigma^2 t$.

根据概率论中的中心极限定理, 能证明在式 (2.3.2) 中定义的离散随机变量 X_n 的概率密度的连续极限趋向于一个有着相同期望和方差的正态随机变量. 期望为 μt 且方差为 $\sigma^2 t$ 的正态随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right). \tag{2.3.12}$$

由偏微分方程理论, $f_X(x,t)$ 满足以下初值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty<x<\infty,\ t>0, \tag{2.3.13}$$

初始条件为 $u(x,0^+)=\delta(x)$, 其中 $u(x,0^+)$ 表示 $\lim\limits_{t\to 0^+}u(x,t)$, $\delta(x)$ 表示满足下列性质的 Dirac 函数:

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0\end{cases}\qquad 和\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.$$

以上结果有如下概率上的解释: 在粒子最初从位置 $x=0$ 开始的事件假设下, $f_X(x,t)\Delta x$ 给出了在将来某个时间 t, 粒子停留在 $[x,x+\Delta x]$ 中的概率. 这就是

为什么 $f_X(x,t)$ 通常被称为**转移密度函数**(transition density function) 的原因. 初始条件 $u(x,0^+)=\delta(x)$ 表示粒子几乎必然在 $x=0$ 处. 同时, 连续随机游动模型从离散随机游动模型中继承了平稳和独立增量的性质.

2.3.2 布朗过程

布朗运动(Brownian motion) 是指一个小粒子在液体或气体中无休止和不规则的随机运动, 它是由 R.Brown 在 1827 年观察到的现象. 这种现象被解释为粒子与周围媒介中的分子不停地碰撞. 与布朗运动有关的随机过程称为**布朗过程**(Brownian process) 或**Wiener 过程**(Wiener process).

下面给出带有漂移率的布朗过程的正式定义.

定义 **带有漂移率的布朗过程**(Brownian process with drift) 是一个具有以下性质的随机过程 $\{X(t);t\geqslant 0\}$:

(i) 每个增量 $X(t+s)-X(s)$ 是期望为 μt 且方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布, 其中 μ 和 σ 为固定参数;

(ii) 对每个 $t_1<t_2<\cdots<t_n$, 增量 $X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ 是独立随机变量, 它具有在 (i) 中给出的分布;

(iii) $X(0)=0$ 和 $X(t)$ 的样本路径是连续的.

注意到 $X(t+s)-X(s)$ 是与随机路径的过去历史无关的, 即对 $\tau<s$, $X(\tau)$ 的信息对 $X(t+s)-X(s)$ 的概率分布是没有影响的. 准确地说, 这就是布朗过程的马尔可夫特征.

标准布朗过程

对于特殊情形 $\mu=0$ 和 $\sigma^2=1$, 布朗运动被称为**标准布朗过程**(standard Brownian process) (或**标准 Wiener 过程**(standard Wiener process)). 对标准布朗过程 $\{Z(t);t\geqslant 0\}$, 相应的概率分布为 (见式 (2.3.12))

$$\begin{aligned}P(Z(t)\leqslant z|Z(t_0)=z_0)&=P(Z(t)-Z(t_0)\leqslant z-z_0)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\int_{-\infty}^{z-z_0}\exp\left(-\frac{x^2}{2(t-t_0)}\right)dx\\&=N\left(\frac{z-z_0}{\sqrt{t-t_0}}\right),\end{aligned}\tag{2.3.14}$$

其中

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt$$

为累积正态分布函数. 期望为 0 且方差为 1 的标准正态随机变量的密度函数为

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

一些有用的性质:

(a) $E[Z(t)^2] = \mathrm{var}(Z(t)) + E[Z(t)]^2 = t$;

(b) $E[Z(t)Z(s)] = \min(t, s)$.

为了证明 (b) 中的结果, 假设 $t > s$ (不失一般性), 考虑

$$\begin{aligned} E[Z(t)Z(s)] &= E[\{Z(t) - Z(s)\}Z(s) + Z(s)^2] \\ &= E[\{Z(t) - Z(s)\}Z(s)] + E[Z(s)^2]. \end{aligned}$$

由于 $Z(t) - Z(s)$ 和 $Z(s)$ 是独立的, 并且 $Z(t) - Z(s)$ 和 $Z(s)$ 的期望值为 0, 所以

$$E[Z(t)Z(s)] = E[Z(s)^2] = s = \min(t, s). \tag{2.3.15}$$

重叠的布朗增量

当 $t > s$ 时, 两个重叠的布朗增量 $Z(t)$ 和 $Z(s)$ 之间的相关系数 ρ 为

$$\rho = \frac{E[Z(t)Z(s)]}{\sqrt{\mathrm{var}(Z(t))}\sqrt{\mathrm{var}(Z(s))}} = \frac{s}{\sqrt{st}} = \sqrt{\frac{s}{t}}. \tag{2.3.16}$$

布朗增量 $Z(t)$ 和 $Z(s)$ 是期望为 0, 方差分别为 t 和 s 的二维正态分布, 并且它们的相关系数为 $\sqrt{s/t}$. 如果定义 $X_1 = Z(t)/\sqrt{t}$ 和 $X_2 = Z(s)/\sqrt{s}$, 则 X_1 和 X_2 就成为标准正态随机变量. $Z(t)$ 和 $Z(s)$ 的联合分布为

$$\begin{aligned} P(Z(t) \leqslant z_t, Z(s) \leqslant z_s) &= P(X_1 \leqslant z_t/\sqrt{t}, X_2 \leqslant z_s/\sqrt{s}) \\ &= N_2(z_t/\sqrt{t}, z_s/\sqrt{s}; \sqrt{s/t}), \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

其中二维正态分布函数为

$$N_2(x_1, x_2; \rho) = \int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 - 2\rho\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) d\xi_1 d\xi_2.$$

几何布朗过程

令 $X(t)$ 表示漂移率参数为 $\mu \geqslant 0$ 且方差参数为 σ^2 的布朗过程. 下面定义的随机过程:

$$Y(t) = e^{X(t)}, \quad t \geqslant 0 \tag{2.3.18}$$

称为**几何布朗过程**(geometric Brownian process). 显然, $Y(t)$ 的取值是非负的. 由于 $X(t) = \ln Y(t)$ 是一个布朗过程, 由性质 (i) 和 (ii), 可以推得 $\ln Y(t) - \ln Y(0)$ 是均值为 μt 且方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布. 按通常的习惯, $\dfrac{Y(t)}{Y(0)}$ 称为对数正态分布. 根

据式 (2.3.12) 中给出的密度函数 $X(t)$, 推导出 $\frac{Y(t)}{Y(0)}$ 的密度函数为

$$f_Y(y,t) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right). \tag{2.3.19}$$

在 $Y(0) = y_0$ 的条件下, $Y(t)$ 的均值为

$$\begin{aligned}
&E[Y(t)|Y(0) = y_0]\\
=&y_0 \int_0^\infty y f_Y(y,t)\, dy\\
=&y_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)\, dx (x = \ln y),\\
=&y_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{[x - (\mu t + \sigma^2 t)]^2 - 2\mu t\sigma^2 t - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}\right)\, dx\\
=&y_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right).
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

类似地, 在 $Y(0) = y_0$ 的条件下, $Y(t)$ 的方差为

$$\begin{aligned}
&\operatorname{var}(Y(t)|Y(0) = y_0)\\
=&y_0^2 \int_0^\infty y^2 f_Y(y,t)\, dy - \left[y_0 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right]^2\\
=&y_0^2 \left\{\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{[x - (\mu t + 2\sigma^2 t)]^2 - 4\mu t\sigma^2 t - 4\sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}\right)\, dx\right.\\
&\left. - \left[\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right]^2\right\}\\
=&y_0^2 \exp(2\mu t + \sigma^2 t)[\exp(\sigma^2 t) - 1].
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

给出离散时间集 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 连续的比率 $Y(t_2)/Y(t_1), \cdots, Y(t_n)/Y(t_{n-1})$ 是独立随机变量, 也就是说, 在非重叠时间区间, 比率的改变是独立的.

2.4 随机分析: Itô引理和 Girsanov 定理

金融衍生产品的价格是标的资产价格的一个函数, 这里资产价格过程是由一个随机过程来刻画的. 为了建立衍生产品的定价模型, 必须利用演算工具, 以便进行数学运算, 如对随机变量的函数复合、微分、积分等. 在本节, 定义涉及布朗随机变量函数的随机积分和随机微分. 特别地, 导出了求随机状态变量函数微分的 Itô 微分法则, 导出了 Feynman-Kac 表示公式, 它给出了抛物型微分方程解的一个随机表示, 也讨论了 Radon-Nikodym 导数和影响等价概率测度改变的 Girsanov 定理.

2.4.1 随机积分

布朗过程是离散随机游动模型的连续极限. 直观上, 可以看到布朗路径是连续的 (虽然连续性的严格数学证明不是直观的). 然而, 布朗路径看起来是非光滑的. 事实上, 它们是不可微的. 通过证明布朗过程二次变差的有限性就能证明它的不可微性. 它来源于微分理论中的一个著名结果, 从可微性可以推出函数的二次变差为零.

1. 布朗过程的二次变差

假设根据离散点

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T,$$

对时间区间 $[0, T]$ 形成一个分划 π. 令 $\delta t_{\max} = \max_k (t_k - t_{k-1})$. 记 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, 并且定义相应的标准布朗过程 $Z(t)$ 的二次变差为

$$Q_\pi = \sum_{k=1}^{n} [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2. \tag{2.4.1}$$

在 $[0, T]$ 中, $Z(t)$ 的二次变差是非零的, 并且它的值为

$$Q_{[0,T]} = \lim_{\delta t_{\max} \to 0} Q_\pi = T. \tag{2.4.2}$$

为了证明上面的结论, 只需要证明

$$\lim_{\delta t_{\max} \to 0} E[Q_\pi] = T \quad \text{和} \quad \lim_{\delta t_{\max} \to 0} \mathrm{var}(Q_\pi - T) = 0. \tag{2.4.3}$$

首先, 考虑

$$\begin{aligned} E[Q_\pi] &= \sum_{k=1}^{n} E[\{Z(t_k) - Z(t_{k-1})\}^2] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(Z(t_k) - Z(t_{k-1}))(\text{因为} Z(t_k) - Z(t_{k-1}) \text{的均值为 } 0) \\ &= \mathrm{var}(Z(t_n) - Z(t_0))(\text{因为} Z(t_k) - Z(t_{k-1})(k = 1, \cdots, n) \text{是独立的}) \\ &= t_n - t_0 = T, \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

因此, 在 (2.4.3) 中的第一个式子成立. 其次, 考虑

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Q_\pi - T) =& E\left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \{[Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2 - \Delta t_k\}\right. \\ & \left. \times \{[Z(t_\ell) - Z(t_{\ell-1})]^2 - \Delta t_\ell\}\right]. \end{aligned}$$

由于增量 $[Z(t_k)-Z(t_{k-1})](k=1,\cdots,n)$ 是独立的, 所以在上面的级数中, 仅当 $k=\ell$ 时对应的项存在. 因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Q_\pi-T)&=E\left[\sum_{k=1}^n\left\{[Z(t_k)-Z(t_{k-1})]^2-\Delta t_k\right\}^2\right]\\&=\sum_{k=1}^n E\left[\{Z(t_k)-Z(t_{k-1})\}^4\right]\\&\quad-2\Delta t_k\sum_{k=1}^n E\left[\{Z(t_k)-Z(t_{k-1})\}^2\right]+\Delta t_k^2.\end{aligned}$$

因为 $Z(t_k)-Z(t_{k-1})$ 是期望为 0 且方差为 Δt_k 的正态分布, 所以它的四阶矩是已知的 (见习题 2.28),

$$E[\{Z(t_k)-Z(t_{k-1})\}^4]=3\Delta t_k^2,$$

于是

$$\mathrm{var}(Q_\pi-T)=\sum_{k=1}^n[3\Delta t_k^2-2\Delta t_k^2+\Delta t_k^2]=2\sum_{k=1}^n\Delta t_k^2. \tag{2.4.5}$$

当 $\delta t_{\max}\to 0$ 时取极限, 观察到 $\mathrm{var}(Q_\pi-T)\to 0$, 因此, 得到方程 (2.4.3) 中的第二个结果. 借助于 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{var}(Q_\pi-T)=0$, 称 T 为 Q_π 的**均方极限**(mean square limit).

注记 (1) 一般地, 在时间区间 $[t_1,t_2]$ 上, 方差为 σ^2 的布朗过程的二次变差为

$$Q_{[t_1,t_2]}=\sigma^2(t_2-t_1). \tag{2.4.6}$$

(2) 如果记 $dZ(t)=Z(t)-Z(t-dt)$, 其中 $dt\to 0$, 则由上述计算可以推导出

$$E[dZ(t)^2]=dt \quad 和 \quad \mathrm{var}(dZ(t)^2)=2\ dt^2. \tag{2.4.7}$$

因为 dt^2 是一个高阶无穷小量, 所以可以说随机量 $dZ(t)^2$ 是在**均方意义**(mean square sense) 下收敛到确定量 dt.

2. 随机积分的定义

设 $f(t)$ 是 t 的任意函数, $Z(t)$ 为标准布朗运动. 首先, 考虑随机积分 $\int_0^T f(t)\,dZ(t)$ 作为下列部分和极限的定义 (在通常的 Riemann-Stieltjes 意义下的定义):

$$\int_0^T f(t)\ dZ(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)[Z(t_k)-Z(t_{k-1})], \tag{2.4.8}$$

其中间隔点 $0<t_0<t_1<\cdots<t_n=T$ 形成区间 $[0,T]$ 的一个划分, 并且 ξ_k 为 t_{k-1} 与 t_k 之间的某个中间点. 极限是在均方意义下取的. 不幸的是, 极限依赖于如何选

取中间值. 例如, 假设取 $f(t) = Z(t)$, 对于所有的 k, 取 $\xi_k = \alpha t_k + (1-\alpha)t_{k-1}(0 < \alpha < 1)$. 考虑

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{k=1}^{n} Z(\xi_k)(Z(t_k) - Z(t_{k-1}))\right] &= \sum_{k=1}^{n} E\left[Z(\xi_k)Z(t_k) - Z(\xi_k)Z(t_{k-1})\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} [\min(\xi_k, t_k) - \min(\xi_k, t_{k-1})] (\text{见式 } (2.3.15)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - t_{k-1}) = \alpha \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \alpha T, \quad (2.4.9)\end{aligned}$$

因此, 在 $[t_{k-1}, t_k](k = 1, 2, \cdots, n)$ 中, 随机积分的期望值依赖于中间点 ξ_k 的选取.

如果一个函数在 t 时刻的价值是由直到 t 之前 $Z(t)$ 的路径历史所决定的, 则称该函数关于布朗运动 $Z(t)$ 为**不可料的**(non-anticipative). 在金融业中, 因为投资者总是在资产价格波动之前作出投资决定的, 所以投资者的行为自然是不可料的. 于是通过取 $\xi_k = t_{k-1}$(在每个子区间的左端点), 可以定义随机积分. 随机积分的Itô定义如下:

$$\int_0^T f(t)\ dZ(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})[Z(t_k) - Z(t_{k-1})], \qquad (2.4.10)$$

其中极限是在均方意义下取的, 并且 $f(t)$ 关于 $Z(t)$ 为不可料的.

作为一个例子, 考虑 Itô随机积分的估计式 $\int_0^T Z(t)\ dZ(t)$. 利用通常的积分法则, 一个自然的计算结果是

$$\int_0^T Z(t)\ dZ(t) = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}[Z(t)]^2\ dt = \frac{Z(T)^2 - Z(0)^2}{2}.$$

不幸的是, 上式给出的是一个错误的结果 (见下面的解释). 根据在 (2.4.10) 中的定义有

$$\begin{aligned}\int_0^T Z(t)\ dZ(t) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Z(t_{k-1})[Z(t_k) - Z(t_{k-1})] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\{Z(t_{k-1}) + [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]\}^2 \\ &\quad - Z(t_{k-1})^2 - [Z(t_k) - Z(t_{k-1})]^2)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}[Z(t_n)^2-Z(t_0)^2]-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[Z(t_k)-Z(t_{k-1})]^2$$

$$=\frac{Z(T)^2-Z(0)^2}{2}-\frac{T}{2}(\text{见式 (2.4.3)}). \tag{2.4.11}$$

重新排列一下, 可以重写上述结果为

$$2\int_0^T Z(t)\ dZ(t)+\int_0^T dt=\int_0^T \frac{d}{dt}[Z(t)]^2\ dt, \tag{2.4.12a}$$

或者以微分形式

$$2Z(t)\ dZ(t)+dt=d[Z(t)]^2. \tag{2.4.12b}$$

不像通常的微分法则, 这里有一个额外的项 dt. 因为 $|Z(t_k)-Z(t_{k-1})|$ 与 $\sqrt{\Delta t_k}$ 同阶, 并且 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[Z(t_k)-Z(t_{k-1})]^2$ 在取极限的同时是保持有限的, 所以它是由布朗过程二次变差的有限性引起的. 显然, 有必要去推广新的微分法则来处理随机函数微分的计算.

2.4.2 Itô引理和随机微分

一旦定义了随机积分, 就可以给出一类连续随机过程的正式定义, 称它为 Itô过程. 设 $\mathcal{F}_t$ 是通过对 $Z(t)$ 轨线的观察由布朗过程 $Z(t)$ 生成的自然滤流. 设 $\mu(t)$ 和 $\sigma(t)$ 适应 $\mathcal{F}_t$, 并且对所有的 T 满足 $\int_0^T|\mu(t)|\ dt<\infty$ 和 $\int_0^T\sigma^2(t)\ dt<\infty$ (几乎处处), 那么由下式定义的过程 $X(t)$:

$$X(t)=X(0)+\int_0^t\mu(s)\ ds+\int_0^t\sigma(s)\ dZ(s) \tag{2.4.13}$$

称为一个**Itô过程**(Itô process). 式 (2.4.13) 的微分形式为

$$dX(t)=\mu(t)\ dt+\sigma(t)\ dZ(t). \tag{2.4.14}$$

1. Itô引理

假设 $f(x,t)$ 是一个确定的二次连续可微函数, 随机过程 Y 定义为 $Y=f(X,t)$, 其中 $X(t)$ 为一个满足式 (2.4.14) 的 Itô 过程. 如何计算微分 $dY(t)$? 已经看到 $dZ(t)^2$ 以均方意义收敛到 dt (见式 (2.4.7)). 因此, 二阶项 dX^2 也等于微分 dY. 计算随机函数 $f(X,t)$ 微分的**Itô公式**(Itô formula) 为

$$dY = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X,t) + \mu(t)\frac{\partial f}{\partial x}(X,t) + \frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] dt + \sigma(t)\frac{\partial f}{\partial x}(X,t)\ dZ. \quad (2.4.15)$$

Itô 公式的严格证明要求相当高的数学技巧, 因此, 下面仅给出了一个证明的思路. 利用泰勒级数将 ΔY 展开到二阶项如下:

$$\Delta Y = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta X + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\Delta X \Delta t + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta X^2\right) + O(\Delta X^3, \Delta t^3).$$

在极限 $\Delta X \to 0$ 和 $\Delta t \to 0$ 中, 利用乘法法则, 其中 $dZ^2 = \sigma^2(t)\,dt, dZdt = 0, dt^2 = 0$, 因此,

$$dY = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt.$$

完整地写出 dZ 和 dt 的项, 就获得了 Itô 公式 (2.4.15).

作一个简单的验证, 当对 $f = Z^2$ 利用 Itô 公式时, 立即可得式 (2.4.12b) 中的结果. 作为另一个例子, 考虑指数布朗函数

$$S(t) = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z(t)}. \quad (2.4.16)$$

假设记

$$X(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z(t),$$

于是

$$X(t) = \ln\frac{S(t)}{S_0} \quad 或 \quad S(t) = S_0 e^{X(t)}.$$

现在, S 的偏导数分别为

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial X} = S \quad 和 \quad \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = S,$$

根据 Itô 引理得到

$$dS(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\right)S(t)\ dt + \sigma S(t)\ dZ(t)$$

或

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r\ dt + \sigma\ dZ(t), \quad (2.4.17)$$

其中 $S(0) = S_0$.

相反地, 可以看到在 (2.4.16) 中定义的 $S(t)$ 是随机微分方程 (2.4.17) 的解. 由于 $E[X(t)] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$, $\text{var}(X(t)) = \sigma^2 t$, 所以 $\ln \frac{S(t)}{S_0}$ 的期望和方差分别为 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ 和 $\sigma^2 t$.

2. 高维的 Itô引理

假设 $f(x_1, \cdots, x_n, t)$ 是一个多维的二次连续可微函数, 随机过程 Y_n 定义为

$$Y_n = f(X_1, \cdots, X_n, t), \tag{2.4.18a}$$

其中过程 $X_j(t)$ 服从 Itô过程

$$dX_j(t) = \mu_j(t)\ dt + \sigma_j(t)\ dZ_j(t), \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.4.18b}$$

假设标准布朗过程 $Z_j(t)$ 和 $Z_k(t)$ 是相关的, 相关系数为 ρ_{jk}, 于是 $dZ_j\ dZ_k = \rho_{jk}\ dt$. 用类似的方式, 将 ΔY_n 展开到 ΔX_j 的二阶项,

$$\begin{aligned}\Delta Y_n = &\frac{\partial f}{\partial t}(X_1, \cdots, X_n, t)\ \Delta t + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_1, \cdots, X_n, t)\ \Delta X_j \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X_1, \cdots, X_n, t)\ \Delta X_j\ \Delta X_k \\ &+ O(\Delta t \Delta X_j)\ +\ O(\Delta t^2).\end{aligned}$$

当极限 $\Delta X_j \to 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $\Delta t \to 0$ 时, 忽略 $O(\Delta t \Delta X_j)$ 和 $O(\Delta t^2)$ 中的高阶部分. 注意到 $dX_j\ dX_k = \sigma_j(t)\sigma_k(t)\rho_{jk}\ dt$. 因此, 得到下面 Itô 引理的高维形式:

$$\begin{aligned}dY_n = &\left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_1, \cdots, X_n, t) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_1, \cdots, X_n, t)\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_j(t)\sigma_k(t)\rho_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X_1, \cdots, X_n, t)\right] dt \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_1, \cdots, X_n, t)\ dZ_j.\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

2.4.3 Itô过程和 Feynman-Kac 表示公式

考虑以微分形式

$$dY(t) = \mu(t)\ dt + \sigma(t)\ dZ(t) \tag{2.4.20a}$$

或以积分形式

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)\ ds + \int_0^t \sigma(s)\ dZ(s) \tag{2.4.20b}$$

定义的 Itô 过程, 其中 $\mu(t)$ 为漂移项. 令

$$M(t) = \int_0^t \sigma(s)\ dZ(s),$$

并注意到

$$M(T) = M(t) + \int_t^T \sigma(s)\ dZ(s), \quad t < T.$$

假设取 $M(T)$ 的条件期望, 其中 $M(T)$ 给出了直到时间 t 的布朗路径的历史, 于是得到

$$E_t[M(T)] = M(t). \tag{2.4.21}$$

由于在式 (2.4.21) 中随机积分的条件期望为零, 因此, $M(t)$ 是一个鞅. 然而, 如果 $\mu(t)$ 不为零, 那么 $Y(t)$ 不是一个鞅. 作为另一个例子, 考虑下面的随机微分方程:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \sigma\, dZ(t) \quad 且 \quad S(0) = S_0. \tag{2.4.22}$$

它的积分形式在形式上可以表示为

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \sigma S(u) Z(u)\, du.$$

从方程 (2.4.16) 中的结果可以导出上述随机微分方程的闭式解为

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma Z(t)}.$$

希望用第一原理来证明 $S(t)$ 是一个鞅. 对 $u < t$, 考虑在域流 $\mathcal{F}_u$ 的条件下 $S(t)$ 的期望

$$\begin{aligned}
& E\left[S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma Z(t)\right) \middle| \mathcal{F}_u\right] \\
=& E\left[S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u + \sigma Z(u)\right) \exp(\sigma(Z(t) - Z(u))) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t-u)\right) \middle| \mathcal{F}_u\right] \\
=& S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u + \sigma Z(u)\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t-u)\right) E\left[\exp(\sigma(Z(t) - Z(u))) \middle| \mathcal{F}_u\right].
\end{aligned}$$

在 $\mathcal{F}_u$ 的条件下, 布朗增量 $Z(t) - Z(u)$ 是正态的, 方差为 $t - u$. 回顾随机变量 X 是期望为 m_X 且方差为 σ_X^2 的正态分布, 当且仅当对 α 的任意实值 X 的矩生成函数为

$$E[\exp(\alpha X)] = \exp\left(\alpha m_X + \frac{\alpha^2}{2}\sigma_X^2\right) \tag{2.4.23}$$

(见习题 2.28). 因此, 得到

$$E\left[\exp(\sigma(Z(t)-Z(u)))\Big|\mathcal{F}_u\right]=\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}(t-u)\right),$$

从而

$$E\left[S_0\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma Z(t)\right)\Big|\mathcal{F}_u\right]=S_0\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u+\sigma Z(u)\right),\quad u<t. \tag{2.4.24}$$

因此, $S(t)$ 是一个鞅.

假设考虑一个 Itô过程 $X(s)$ 的更一般的情况, 它满足下面的随机微分方程:

$$dX(s)=\mu(X(s),s)\ ds+\sigma(X(s),s)\ dZ(s),\quad t\leqslant s\leqslant T, \tag{2.4.25}$$

初始条件为 $X(t)=x$. 考虑一个光滑函数 $F(X(t),t)$, 根据 Itô 引理, 它的微分形式为

$$dF=\left[\frac{\partial F}{\partial t}+\mu(X,t)\frac{\partial F}{\partial X}+\frac{\sigma^2(X,t)}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right]dt+\sigma\frac{\partial F}{\partial X}\ dZ. \tag{2.4.26}$$

定义与 Itô过程 $X(t)$ 有关的无穷小生成元 $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}=\mu(X,t)\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\sigma^2(X,t)}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}. \tag{2.4.27}$$

假设 F 满足抛物型偏微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\mathcal{A}F=0, \tag{2.4.28}$$

终止条件为 $F(X(T),T)=h(X(T))$, 则 dF 变成

$$dF=\sigma\frac{\partial F}{\partial X}\ dZ.$$

假设 $\sigma\dfrac{\partial F}{\partial X}$ 关于布朗过程 $Z(t)$ 是非预测的, 就能将上述随机微分方程表述成下面的积分形式:

$$F(X(s),s)=F(X(t),t)+\int_t^s\sigma(X(u),u)\frac{\partial F}{\partial X}(X(u),u)\ dZ(u). \tag{2.4.29}$$

随机积分可以看成是期望为零的非齐次连续高斯增量的和, 因此, 它的条件期望为零. 取条件期望, 并令 $s=T$ 且 $F(X(T),T)=h(X(T))$, 那么就得到下列 Feynman-Kac 表示公式:

$$F(x,t)=E_{x,t}[h(X(T))],\quad t<T, \tag{2.4.30}$$

其中 $F(x,t)$ 满足偏微分方程 (2.4.28), $E_{x,t}$ 表示在 $X(t)=x$ 和 $\mathcal{F}_t$ 条件下所取的期望. 在固定点 x 和时间 t 初始化过程 $X(t)$, 并且它服从在式 (2.4.20) 中定义的Itô过程.

2.4.4 测度变换: Radon-Nikodym 导数和 Girsanov 定理

在风险中性测度下, 标的资产贴现价格是一个鞅. 在风险中性测度下, 未定权益的有效价值常常需要将带有漂移项的标的价格过程变换成鞅, 但需要在不同的测度下. 变换能通过利用 Girsanov 定理有效地实行. 在定理开始之前, 讨论与在两个等价概率测度之间转换有关的 Radon-Nikodym 导数. 考虑在测度 P 下的标准布朗过程 $Z_P(t)$. 增加漂移项 μt 到 $Z_P(t)$ 中, 其中 μ 为常数, 记

$$Z_{\widetilde{P}}(t)=Z_P(t)+\mu t. \tag{2.4.31}$$

因此, 在 P 下, $Z_{\widetilde{P}}(t)$ 是一个带漂移项的布朗过程. 怎样从测度 P 变到另一个测度 $\widetilde{P}$, 使得 $Z_{\widetilde{P}}(t)$ 是一个在 $\widetilde{P}$ 下具有漂移项为零的布朗过程呢? 形式上, 用因子 $\dfrac{d\widetilde{P}}{dP}$ 乘以 dP 得到 $d\widetilde{P}$. 因子 $\dfrac{d\widetilde{P}}{dP}$ 称为**Radon-Nikodym 导数**(Radon-Nikodym derivative). 对这种情况, 要求对应的 Radon-Nikodym 导数为

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP}=\exp\left(-\mu Z_P(t)-\frac{\mu^2}{2}t\right). \tag{2.4.32}$$

对固定的时间水平 T, 可以认为在 P 下 $Z_P(T)$ 的期望值为 0, 方差为 T, 其中

$$P\left(\xi-\frac{d\xi}{2}<Z_P(T)<\xi+\frac{d\xi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\ e^{-\xi^2/2T}\,d\xi. \tag{2.4.33}$$

为了证明结论的正确性, 只要证明在测度 $\widetilde{P}$ 下通过寻找 $Z_{\widetilde{P}}(T)$ 的对应矩生成函数, $Z_{\widetilde{P}}(T)$ 服从期望为 0, 方差为 T 的正态分布. 考虑

$$\begin{aligned}E_{\widetilde{P}}\left[\exp\left(\alpha Z_{\widetilde{P}}(T)\right)\right]&=E_P\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\exp\left(\alpha Z_P(T)+\alpha\mu T\right)\right]\\&=E_P\left[\exp\left((\alpha-\mu)Z_P(T)\right)\exp\left(\alpha\mu T-\frac{\mu^2}{2}T\right)\right]\\&=\exp\left(\frac{(\alpha-\mu)^2}{2}T+\alpha\mu T-\frac{\mu^2}{2}T\right)\\&=\exp\left(\frac{\alpha^2}{2}T\right),\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

它对 α 的任何实数值都是成立的. 根据式 (2.4.23), 得到所需要的结果. 当漂移率不为常数时, Girsanov 定理给出了下面在一般情况下求 Radon-Nikodym 导数的程序.

Girsanov 定理

当漂移率取为 $\mathcal{F}_t$ 适应的随机过程时, Radon-Nikodym 导数是什么? 下面阐述但不证明 Girsanov 定理, Girsanov 理论是在 Itô 过程中实现测度变化的一个有用工具. 对未定权益的定价在等价鞅测度的确定过程中 Girsanov 定理的应用将在 3.2 节中看到.

定理 2.4　令 $Z_P(t)$ 是在测度 P 下的布朗过程 (称为 P- 布朗过程). 令 $\mathcal{F}_t(t \geqslant 0)$ 是由 $Z(t)$ 生成的自然域流. 考虑一个 $\mathcal{F}_t$ 适应的随机过程 $\gamma(t)$, 它满足 Novikov 条件:

$$E[e^{\int_0^t \frac{1}{2}\gamma(s)^2\ ds}] < \infty. \tag{2.4.35}$$

考虑 Radon-Nikodym 导数

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \rho(t), \tag{2.4.36a}$$

其中

$$\rho(t) = \exp\left(\int_0^t -\gamma(s)\ dZ_P(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma(s)^2\ ds\right). \tag{2.4.36b}$$

在测度 $\widetilde{P}$ 下, Itô过程

$$Z_{\widetilde{P}}(t) = Z_P(t) + \int_0^t \gamma(s)\ ds \tag{2.4.37}$$

是一个 $\widetilde{P}$ 布朗过程.

2.5 习　题

2.1　证明占优交易策略存在的充分必要条件是存在一个交易策略满足 $V_0 < 0$ 且对所有的 $\omega \in \Omega$, $V_1(\omega) \geqslant 0$.

提示: 考虑占优交易策略 $\mathcal{H} = (h_0,\ h_1, \cdots, h_M)^{\mathrm{T}}$ 满足 $V_0 = 0$ 且对所有的 $\omega \in \Omega$, $V_1(\omega) > 0$. 取 $G^*_{\min} = \min\limits_{\omega} G^*(\omega) > 0$, 定义一个新的交易策略, 使得 $\widehat{h}_m = h_m (m = 1, \cdots, M)$ 且 $\widehat{h}_0 = -G^*_{\min} - \sum\limits_{m=1}^{M} h_m S^*_m(0)$.

2.2　考虑具有单个风险证券和无风险证券的投资组合. 假设在 0 时刻的风险资产价格是 4, 在 $t = 1$ 时的可能价格是 1.1, 2.2 和 3.3 (在单个交易时段的最后三种可能的现实状态). 设无风险利率 r 为 0.1, 它在 $t = 0$ 时刻与无风险证券的价格是一致的.

(a) 证明交易策略: $h_0 = 4$ 和 $h_1 = -1$ 是一个开始价值为零且最后有确定正收益的占优交易策略;

(b) 在单个交易的时段, 求贴现收益 G^*;

(c) 求一个开始价值为负且最后有非负确定收益的交易策略.

2.3 证明如果单价定律不成立, 则在资产扩张中, 每一个收益均能以任何价格买到.

2.4 建立一个证券模型, 使得它满足单价定律, 但不属占优交易策略.

提示: 当线性测度的非负性不成立时, 建立一个证券模型, 使得它的初始价格向量位于贴现最终收益矩阵 $\widehat{S}^*(1)$ 的行空间.

2.5 在资产扩张 $\mathcal{S}$ 中, 对某个 $\mathbf{h}$, 定义价格函数为 $F(\mathbf{x}) = \{y : y = \mathbf{S}^*(0)\mathbf{h}$, 使得 $\mathbf{x} = S^*(1)\mathbf{h}$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$. 证明如果单价定律成立, 则 F 是一个线性泛函.

2.6 给出贴现最终收益矩阵

$$\widehat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

和当前价格向量 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0) = (1, 3, 4)$.

(a) 提出一个反例, 证明对单期证券模型单价定律不成立;

(b) 应如何修改当前的价格向量, 使得在新的证券模型下单价定律成立?

2.7 给出贴现最终收益矩阵

$$\widehat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

和当前价格向量 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0) = (1, 2, 3)$, 求贴现收益为 $\mathbf{e}_k (k = 1, 2, 3)$ 的 Arrow 证券的状态价格. 证券模型符合占优交易策略吗? 如果是, 给出一个交易策略优于其他交易策略的例子.

2.8 考虑证券模型

$$\widehat{\mathbf{S}}^*(0) = (1, 2, 3, k) \quad 和 \quad \widehat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{pmatrix},$$

如何选取 k 的值, 使得单价定律成立. 在 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)$ 中, 当 k 取这样的特选值时, 证券模型符合占优交易策略吗? 如果属实, 求一个这样的占优交易策略.

2.9 证明如果存在占优交易策略, 则存在套利机会. 怎样构造一个证券模型, 使得存在一个套利机会, 但占优交易策略不存在?

2.10 证明 $\mathbf{h}$ 是一个套利的充分必要条件是贴现收益 G^* 满足① $G^* \geqslant 0$, ② $E[G^*] > 0$, 其中 E 为在实际概率测度 P 下的期望, 并且 $P(\omega) > 0$.

2.11 假设一个赌博游戏有三种可能结果. 如果一个赌徒对结果 i 打赌, 那么用美元打赌, 他就获得净利润 $d_i(i=1,2,3)$ 美元. 因此, 收益矩阵为下面的形式 (在打赌游戏中不必考虑贴现):

$$S(1;\Omega)=\begin{pmatrix} d_1+1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3+1 \end{pmatrix}.$$

求出关于 d_i 的条件, 使得在上面的打赌游戏中, 风险中性概率测度存在 (设想为投资模型).

2.12 考虑下面的证券模型:

$$S^*(1;\Omega)=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

风险中性测度存在吗? 如果不存在, 试解释相关原因; 如果存在, 求出所有风险中性测度的集合.

2.13 考虑下面的证券模型. 当 $t=1$ 时, 证券的贴现收益由贴现最终收益矩阵给出

$$\widehat{S}^*(1;\Omega)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

设最初价格向量 $\widehat{\mathbf{S}}^*(0)$ 是 $(1,3,5,9)$. 对这个证券模型单价定律成立吗? 证明具有贴现收益 $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ 的未定权益是可达的, 并且求出产生收益的所有可能的交易证券的集合. 能求出 $t=0$ 时这个未定权益的价格吗?

提示: 记证券的贴现收益向量为

$$\mathbf{S}_0^*(1)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{S}_1^*(1)=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\quad \mathbf{S}_2^*(1)=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\quad \mathbf{S}_3^*(1)=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

注意到

$$\mathbf{S}_2^*(1)=\mathbf{S}_0^*(1)+\mathbf{S}_1^*(1) \quad 和 \quad \mathbf{S}_3^*(1)=\mathbf{S}_0^*(1)+\mathbf{S}_2^*(1),$$

但最初价格为

$$S_2^*(0) \neq S_0^*(0) + S_1^*(0) \quad 和 \quad S_3^*(0) \neq S_0^*(0) + S_2^*(0).$$

2.14　假设对给定的证券模型, 风险中性测度集合是非空的, 证明如果证券模型是完全的, 则风险中性测度的集合一定是单元素集.

提示: 在市场是完全的情况下, $\widehat{S}(1;\Omega)$ 的列秩等于状态的个数. 因为列秩等于行秩, $\widehat{S}^*(1;\Omega)$ 的所有行都是独立的.

2.15　设 P 是实际概率测度, 并且 $P(\omega)$ 表示事件 ω 发生的实际概率. 定义**状态价格密度**(state price density) 为随机变量 $L(\omega) = Q(\omega)/P(\omega)$, 其中 Q 为风险中性测度. 用 R_m 表示风险证券 m 的收益率, 其中 $R_m = [S_m(1) - S_m(0)]/S_m(0)(m = 1, \cdots, M)$. 证明 $E_Q[R_m] = r(m = 1, \cdots, M)$, 其中 r 为一个周期中的利率. 设 $E_P[R_m]$ 表示在实际概率测度 P 下 R_m 的期望, 证明

$$E_P[R_m] - r = -\mathrm{cov}(R_m, L),$$

其中 cov 表示协方差算子.

2.16　假设在离散二叉树模型中 $u > d > R$. 证明一个投资者通过借入现金并尽可能多地购买资产, 在一个时期后卖出资产并还回贷款, 他就能锁定一个无风险收益. 当 $R > u > d$ 时, 为了获得套利, 他应该采用什么样的相应策略?

2.17　通过用**无风险对冲原理**(riskless hedging principle) 也能导出二叉树公式 (见 3.1.1 小节). 假设持有离到期日一个周期的看涨期权, 就可以构造一个由一单位标的资产多头和 m 单位看涨期权的短头组成的完全对冲投资组合. 令 c_u 和 c_d 分别表示对应于资产价格的向上和向下运动时在到期日看涨期权的收益. 证明在投资组合中, 为了能完全对冲投资组合, 卖空看涨期权的数量应该为

$$m = \frac{S(u-d)}{c_u - c_d}.$$

对冲投资组合应该获得无风险利率. 令 R 表示在一个周期内完全对冲无风险投资组合的增长因子, 证明对由无风险对冲原理, 导出的看涨期权的二叉树期权定价公式为

$$c = \frac{pc_u + (1-p)c_d}{R},$$

其中 $p = \dfrac{R-d}{u-d}$.

2.18　令 Π_u 和 Π_d 分别表示对应于资产价格上升和下降状态的状态价格. 状态价格也能解释为状态未定贴现率. 如果存在无套利机会, 则所有的证券 (包括债券、资产和看涨期权) 一定具有相同状态未定贴现率 Π_u 和 Π_d 的回报. 因此, 对货币市场存款, 资产价格和看涨期权的价格以及 Π_u 和 Π_d 各自的关系为

$$\begin{aligned}1 &= \Pi_u R + \Pi_d R,\\ S &= \Pi_u uS + \Pi_d dS,\\ c &= \Pi_u c_u + \Pi_d c_d.\end{aligned}$$

由前两个方程求出 Π_u 和 Π_d 代入到第三个方程中, 证明在一个周期内, 二叉树看涨期权的价格公式为

$$c = \frac{pc_u + (1-p)c_d}{R},$$

其中 $p = \dfrac{R-d}{u-d}$.

2.19　考虑样本空间 $\Omega = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ 和代数

$$\mathcal{F} = \{\phi, \{-3,-2\}, \{-1,1\}, \{2,3\}, \{-3,-2,-1,1\}, \{-3,-2,2,3\}, \{-1,1,2,3\}, \Omega\}.$$

对下列每个随机变量, 确定它是否是 $\mathcal{F}$ 可测的:

(i) $X(\omega) = \omega^2$;

(ii) $X(\omega) = \max(\omega, 2)$.

求一个 $\mathcal{F}$ 可测的随机变量.

2.20　设 $X, X_1, \cdots, X_n$ 是定义在带域流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量. 证明关于条件概率的下列性质:

(a) 对所有的 $B \in \mathcal{F}$, $E[XI_B] = E[I_B E[X|\mathcal{F}]]$;

(b) $E[\max(X_1, \cdots, X_n)|\mathcal{F}] \geqslant \max(E[X_1|\mathcal{F}], \cdots, E[X_n|\mathcal{F}])$.

2.21　令 $X = \{X_t; t = 0, 1, \cdots, T\}$ 是一个适应 σ 域流 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t = 0, 1, \cdots, T\}$ 的随机过程. 如果 X 满足 $E[X_{t+1} - X_t|\mathcal{F}_t] = 0 (t = 0, 1, \cdots, T-1)$, X 是一个鞅吗?

2.22　考虑一个二叉树试验, 成功概率为 $p (0 < p < 1)$. 令 N_k 表示在 k 次独立试验后成功的次数, 定义离散过程 Y_k 为 $N_k - kp$, 它是超过平均数 kp 之上的成功次数, 证明 Y_k 是一个鞅.

2.23　证明 τ 是一个停时当且仅当 $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

提示: $\{\tau \leqslant t\} = \{\tau = 0\} \cup \{\tau = 1\} \cup \cdots \cup \{\tau = t\}$ 和 $\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \cap \{\tau \leqslant t-1\}^c$.

2.24　假设 τ_1 和 τ_2 都是停时, 证明 $\max(\tau_1, \tau_2)$ 和 $\min(\tau_1, \tau_2)$ 也是停时.

2.25　考虑在图 2.5 中显示的两期证券模型. 假设无风险利率 r 违反限制 $r < 0.2$, 如 $r = 0.3$. 构造从证券模型中可产生的套利机会.

2.26　对 n 期二叉树模型, 推导到期收益为 $\max(X - S, 0)$ 的欧式看跌期权的价格公式.

2.27　在连续随机游动模型中, 假设粒子首先在 $x = a_0$ 处开始运动 (见 2.3.1 小节), 求粒子在 t 时刻停留在 $x = a$ 点的概率.

2.28 令 X 是一个均值为 m_X, 方差为 σ_X^2 的正态随机变量. 证明正态随机变量的高阶中心矩为

$$E[(X-m_X)^n]=\begin{cases}0, & n\text{为奇数},\\ (n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1\sigma_X^n, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

对对数正态随机变量 $Z=\exp(\alpha X)$, 其中 α 为一个实常数, 证明

$$E[Z]=\exp\left(\alpha m_X+\frac{\alpha^2}{2}\sigma_X^2\right).$$

2.29 假设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是标准布朗过程, 它的对应反射布朗过程定义为

$$Y(t)=|X(t)|,\quad t\geqslant 0.$$

证明 $Y(t)$ 也是一个马尔可夫过程并且它的均值和方差分别为

$$E[Y]=\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\quad\text{和}\quad \mathrm{var}(Y)=1-\frac{2}{\pi}t.$$

2.30 假设 $Z(t)$ 是标准布朗过程, 证明下面定义的过程:

$$X_1(t)=kZ(t/k^2),\quad k>0,$$

$$X_2(t)=\begin{cases}tZ(1/t), & t>0,\\ 0, & t=0\end{cases}$$

和

$$X_3(t)=Z(t+h)-Z(h),\quad h>0$$

也是布朗过程.

提示: 为了证明 $X_i(t)(i=1,2,3)$ 是一个布朗过程, 只要证明

$$X_i(t+s)-X_i(s)$$

是均值为零的正态分布, 并且

$$E[[X_i(t+s)-X_i(s)]^2]=t,$$

在不相交的时间区间上增量是独立的且 $X_i(0)=0$.

2.31 考虑带有漂移率的布朗过程为

$$X(t)=\mu t+\sigma Z(t),\quad X(0)=0,$$

其中 $Z(t)$ 为标准布朗过程. 求 $E[X(t)|X(t_0)]$, $\mathrm{var}(X(t)|\,X(t_0))$ 和 $\mathrm{cov}(X(t_1),X(t_2))$.

2.32 假设资产价格遵循几何布朗过程, 它的期望回报率为每年 10%, 波动率为每年 20%. 假设资产的当前价格是 100 美元, 求从现在起半年后资产价格的期望值和方差, 它的置信限为 90%.

2.33 设 $Z(t)$ 表示标准布朗过程. 证明

(a) 对任何正整数 n, $dZ(t)^{2+n} = 0$;

(b) 对任何正整数 n,

$$\int_{t_0}^{t_1} Z(t)^n \, dZ(t) = \frac{1}{n+1}[Z(t_1)^{n+1} - Z(t_0)^{n+1}] - \frac{n}{2}\int_{t_0}^{t_1} Z(t)^{n-1} \, dt;$$

(c) $E[Z^4(t)] = 3t^2$;

(d) $E[e^{\alpha Z(t)}] = e^{\alpha^2 t/2}$.

2.34 设随机过程 $X(t)(t \geqslant 0)$ 定义为

$$X(t) = \int_0^t e^{\alpha(t-u)} \, dZ(u),$$

其中 $Z(t)$ 为标准布朗过程. 证明

$$\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = \frac{e^{\alpha(s+t)} - e^{\alpha|s-t|}}{2\alpha}, \quad s \geqslant 0, \ t \geqslant 0.$$

2.35 设 $Z(t)(t \geqslant 0)$ 是标准布朗过程, $f(t)$ 和 $g(t)$ 是 $[a, b]$ 上的可微函数. 证明

$$E\left[\int_a^b f'(t)[Z(t) - Z(a)] \, dt \int_a^b g'(t)[Z(t) - Z(a)] \, dt\right]$$
$$= \int_a^b [f(b) - f(t)][g(b) - g(t)] \, dt.$$

提示: 交换期望和积分的次序, 并且注意到

$$E[[Z(t) - Z(a)][Z(s) - Z(a)]] = \min(t, s) - a.$$

2.36 设 $Z(t)(t \geqslant 0)$ 是标准布朗过程, 证明

$$\sigma \int_t^T [Z(u) - Z(t)] \, du$$

的期望值为 0, 方差为 $\sigma^2(T-t)^3/3$.

提示: 考虑

$$\begin{aligned}
&\operatorname{var}\left(\int_t^T [Z(u)-Z(t)]\,du\right) \\
=&E\left[\int_t^T\int_t^T [Z(u)-Z(t)][Z(v)-Z(t)]\,dudv\right] \\
=&\int_t^T\int_t^T E[\{Z(u)-Z(t)\}\{Z(v)-Z(t)\}]\,dudv \\
=&\int_t^T\int_t^T [\min(u,v)-t]\,dudv.
\end{aligned}$$

2.37　证明

$$N_2(a,b;\rho)+N_2(a,-b;-\rho)=N(a)$$

并且

$$N_2(a,b;\rho)=\int_{-\infty}^a n(x)N\left(\frac{b-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)dx.$$

2.38　假设随机状态变量 S_1 和 S_2 遵循几何布朗过程

$$\frac{dS_i}{S_i}=\mu_i\,dt+\sigma_i\,dZ_i,\quad i=1,2.$$

设 ρ_{12} 表示布朗过程 dZ_1 和 dZ_2 之间的相关系数. 令 $f=S_1S_2$, 证明 f 也是遵循如下形式:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{f}&=(\mu_1+\mu_2+\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)\,dt+\sigma_1\,dZ_1+\sigma_2\,dZ_2 \\
&=\mu\,dt+\sigma\,dZ_f
\end{aligned}$$

的几何布朗过程, 其中 $\mu=\mu_1+\mu_2+\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$, $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$. 类似地, 令 $g=\dfrac{S_1}{S_2}$, 证明

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{g}&=(\mu_1-\mu_2-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)\,dt+\sigma_1\,dZ_1-\sigma_2\,dZ_2 \\
&=\widetilde{\mu}\,dt+\widetilde{\sigma}\,dZ_g,
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\mu}=\mu_1-\mu_2-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2$, $\widetilde{\sigma}^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$.

提示: 注意到

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{S_2}\right)}{\dfrac{1}{S_2}}=-\mu_2\,dt+\sigma_2^2\,dt-\sigma_2\,dZ_2.$$

将 S_1/S_2 作为 S_1 和 $1/S_2$ 的积, 并利用关于几何布朗过程乘积所获得的结果.

2.39 假设函数 $F(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\mu(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\sigma^2(x,t)}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-rF=0,$$

终值条件为 $F(X(T),T)=h(X(T))$. 证明

$$F(x,t)=e^{-r(T-t)}E_t[h(X(T))|X(t)=x],\quad t<T,$$

其中 $X(t)$ 遵循 Itô 过程

$$dX(t)=\mu(X(t),t)\ dt+\sigma(X(t),t)\ dZ(t).$$

2.40 定义离散随机变量 X 为

$$X(\omega)=\begin{cases}2, & \omega=\omega_1,\\ 3, & \omega=\omega_2,\\ 4, & \omega=\omega_3,\end{cases}$$

其中样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}, P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=1/3$. 求一个新的概率测度 $\widetilde{P}$, 使得当方差保持不变时, 期望为 $E_{\widetilde{P}}[X]=3.5$. $\widetilde{P}$ 是唯一的吗?

2.41 假设过程 S_t 是一个几何布朗过程, 服从

$$\frac{dS_t}{S_t}=\mu\ dt+\sigma\ dZ_t,$$

其中 Z_t 为一个 P 布朗过程. 利用指定的 Radon-Nikodym 导数 $\dfrac{d\widetilde{P}}{dP}$, 求另一个测度 $\widetilde{P}$, 使得 S_t 在测度 $\widetilde{P}$ 下遵循

$$\frac{dS_t}{S_t}=\mu'\ dt+\sigma\ d\widetilde{Z}_t,$$

其中 $\widetilde{Z}_t$ 为一个 $\widetilde{P}$ 布朗过程, μ' 为新的漂移率.

2.42 设 $u^\mu(x,t)$ 表示下列偏微分方程的解:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty<x<\infty, t>0,$$

初始条件为 $u(x,0^+)=\delta(x)$. 根据方程 (2.3.12), 可以看到

$$u^\mu(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\ e^{-(x-\mu t)^2/2t}.$$

利用变量代换 $x=y+\mu t$, 证明上述方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad -\infty<y<\infty, t>0,$$

初始条件为 $u(y,0^+)=\delta(y)$. 新的解为

$$u^0(y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\ e^{-y^2/2t}.$$

注意到 $u^0(y,t)$ 和 $u^0(x,t)$ 之间有下列关系:

$$u^0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\ e^{-(y+\mu t)^2/2t}=e^{-\mu y-\frac{\mu^2}{2}t}u^0(y,t),$$

试说出上述结果与 Girsanov 定理的相关性.

2.43 设 P 和 Q 是在相同可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个概率测度. 令 $f=\dfrac{dQ}{dP}$ 表示 Q 关于 P 的 Radon-Nikodym 导数, 证明

$$E_Q[X|\mathcal{G}]=\frac{E_P[Xf|\mathcal{G}]}{E_P[f|\mathcal{G}]},$$

其中 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ 代数, X 为一个可测随机变量. 这个公式可被看成是**贝叶斯法则**(Bayes rule) 的推广.

第3章　期权定价模型：Black-Scholes-Merton 公式

在 20 世纪 70 年代早期，交易和衍生证券定价的变革就已经开始了. 虽然早年期权主要是通过金融机构在**场外交易市场**(over-the-counter markets) 有规律地进行交易，但是 1973 年芝加哥期权交易所就已经开始在交易所内进行期权交易了. 同一年，Black 和 Scholes (1973) 以及 Merton(1973) 发表了他们关于期权定价理论的奠基性文章. 从此以后，金融工程领域的发展是十分显著的. 由于从 Black-Scholes-Merton 模型中推导出的衍生产品定价公式是几个直接可观测到的参数的函数 (除波动率参数以外)，因此，期权定价理论的 Black-Scholes-Merton 风险中性公式是十分吸引人的. 即使标的资产市场价格风险是零，也能对衍生产品进行定价. 当根据解释经验数据的能力来判断时，期权定价理论不仅在金融上，而且在经济学的所有领域中都被公认为是最成功的理论. 为了表彰他们在衍生产品定价理论方面所作出的开创性和奠基性贡献，Scholes 和 Merton 获得了 1997 年的诺贝尔经济学奖.

在 3.1 节中，首先给出 Black 和 Scholes 是怎样运用无风险对冲原理推导出衍生证券价格所满足的微分方程，也讨论 Merton 通过以货币市场存款和风险标的资产的形式组成的无风险资产投资组合来动态地复制期权的方法. 构造复制投资组合的成本给出了期权的公平价格. 进一步，通过证明可知，如果可交易的证券能互相对冲，则它们有相同的风险市场价格，由此提出了风险中性定价方法的另一种方法.

在 3.2 节中，讨论了著名的期权鞅定价理论，从它对未定权益的定价中引出了风险中性定价方法. 在风险中性测度下，并且根据在这个测度下贴现证券的价格是鞅的性质，通过贴现到期收益的期望给出了证券的价格. 作为计价单位的货币市场存款的选择不是唯一的. 在与货币市场存款对应的计价单位测度和风险中性测度下，如果未定权益是可达的，则在选择的另一个计价单位测度下，它也是可达的. 也讨论计价单位技巧的多种变化，并检验怎样用它来影响期权价格计算的效果.

在 3.3 节中，求解几种类型的欧式标准期权所满足的 Black-Scholes 定价方程. 按照合同规定被转换成相应期权定价模型的一组适当的辅助条件. 最普遍的期权定价公式是欧式标准看涨和看跌期权的定价公式，其中标的资产价格服从漂移率及方差为常数的几何布朗运动，得到了期权模型中不同参变量定价公式的比较静态并讨论了它们的性质.

对于其他欧式类型衍生证券的期权定价方法的推广，如期货期权、选择期权、复合期权、外汇期权和双重货币期权等，将在 3.4 节中考虑，也会考虑 Black-Scholes-Merton 公式的扩展，包括红利、依赖于时间的利率和波动率等的影响. 此外，举例说明怎样利用未定权益方法来分析可违约债券的信用差价.

运用 Black-Scholes 模型的从业人员意识到它并不是十分完美的，主要的缺点在于其假设波动率为常数，并且资产价格过程是连续的，忽略了跳和在交易证券中的零交易费. 当试图使 Black-Scholes 期权价格与欧式看涨和看跌期权实际引入的市场价格相等时，对于不同到期日及不同敲定价格的期权，就必须使用不同的波动率 (称为隐含波动率). 在 3.5 节中，考虑存在隐含波动率中的波动率微笑现象. 将推出 Dupire 方程，它可以被看成是期权定价方程的拓展版本. 从 Dupire 方程中，能计算出局部波动率函数，该函数能给出与市场期权价格相同的理论上的 Black-Scholes 期权价格. 也考虑标的资产价格过程发生跳和包括在标的资产交易时发生交易费用影响的期权定价模型. 当公司或经济体系作为一个整体有突发信息时，资产价格就发生跳动. 在资产交易的过程中，交易费表示市场有摩擦. 将检查资产价格的跳跃和交易费用是如何融入到期权定价模型中的.

虽然大多数从业者都意识到 Black-Scholes 模型的局限性，但为什么它仍在交易场中如此流行呢? 一个简单的原因是：模型只涉及唯一一个在市场中不能直接观测到的参数，即波动率. 这就给期权交易者一个直接且简单的感觉：当波动率高时就卖出，当波动率低时就买入. 对像 Black-Scholes 模型这样简单的定价模型，交易者就能了解关于标的物的假设和限制，在必要时作出适当的调整. 对于许多欧式类型衍生产品，闭式定价公式很容易使用. 对于更为复杂的期权，虽然定价公式不存在，但存在一个有效的数值方法库来计算期权价格以及它们的比较静态.

3.1 Black-Scholes-Merton 公式

Black 和 Scholes(1973) 通过证明如何连续地对冲一个期权的空头敞口，创立了期权定价理论. 考虑一个带有风险资产的欧式看涨期权的出售者，如果资产价格上涨超过了敲定价格，那他将承担无限责任的风险. 为了保护他在看涨期权中的空头位置，他应该考虑买入一定数量的标的资产，从而能通过资产中的多头来弥补在看涨期权空头位置的损失. 以这种方式，他就将采取**对冲策略**(hedging procedure). 一份期权和其标的资产组成的对冲策略，可以达到使资产弥补期权损失或期权来弥补资产损失的目的. 这种风险控制策略在金融市场中经常被从业人员采用. 通过不断地调整投资组合中标的资产和期权的比例，Black 和 Schols 阐明了投资者能够创建**一个无风险的对冲投资组合**(riskless hedging portfolio)，其中排除了与随机资产价格相关的风险. 在一个不存在无风险套利机会的有效市场中，一个无风险的投资组

合必须获得一个与无风险利率相同的期望回报率.

读者可能对 Black 的文章 (Black, 1989) 有兴趣, 该文章讲述了 Black 和 Scholes 是如何提出一个无风险对冲投资组合想法的故事.

3.1.1 无风险对冲原理

本小节将阐明如何利用无风险对冲原理来推导出欧式看涨期权价格满足的偏微分方程. 在 Black 和 Scholes(1973) 的开创性论文中, 他们对金融市场作出了如下假设:

(i) 交易在时间上是连续发生的;

(ii) 无风险利率 r 为已知常数;

(iii) 资产不支付红利;

(iv) 买卖资产或期权时没有交易费用和无税收;

(v) 资产是完全可分割的;

(vi) 卖空不受到惩罚并允许继续下去;

(vii) 不存在无风险套利机会.

假设资产价格 S_t 的随机过程服从几何布朗运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \tag{3.1.1}$$

其中 μ 为期望回报率, σ 为漂移率, Z_t 为一个标准的布朗过程. 假设 μ 和 σ 都是常数, 考虑卖空一份欧式看涨期权和持有 Δ_t 份标的资产的投资组合. 在 t 时刻, 该投资组合的价值 $\Pi(S_t,t)$ 为

$$\Pi = -c + \Delta_t S_t,$$

其中 $c = c(S_t,t)$ 表示看涨期权的价格. 注意到 Δ_t 随时间 t 而变化, 反映了对冲的动态性质. 因为 c 是 S_t 的随机函数, 所以利用 Itô引理来计算它的微分如下:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}dS_t + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}dt.$$

因此,

$$\begin{aligned}
-dc + \Delta_t dS_t &= \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)dt + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t}\right)dS_t \\
&= \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t}\right)\mu S_t\right]dt + \left(\Delta_t - \frac{\partial c}{\partial S_t}\right)\sigma S_t\, dZ_t.
\end{aligned}$$

该投资组合在时刻 t 的累积财务收益为

$$G(\Pi(S_t,t)) = \int_0^t -dc + \int_0^t \Delta_u dS_u$$

$$= \int_0^t \left[-\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} S_u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} + \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \mu S_u \right] du$$
$$+ \int_0^t \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \sigma S_u dZ_u. \tag{3.1.2}$$

投资组合收益的随机部分来源于最后一项 $\int_0^t \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) \sigma S_u dZ_u$. 假设在任意时刻 $u < t$ 通过选取 $\Delta_u = \frac{\partial c}{\partial S_u}$ 采用动态对冲策略, 那么在任意时刻, 财务上的收益就是确定的. 由于无套利, 所以财务上的收益应该与价值等于 $-c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u}$ 的动态配置的无风险资产投资上的收益是相同的. 来自这个无风险资产动态配置的确定收益为

$$M_t = \int_0^t r \left(-c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} \right) du. \tag{3.1.3}$$

根据这两个确定收益 $G(\Pi(S_t, t))$ 和 M_t 相等, 于是对任何资产价格 S 有

$$-\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} S_u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} = r \left(-c + S_u \frac{\partial c}{\partial S_u} \right), \quad 0 < u < t,$$

其中 $c(S, t)$ 满足下列方程:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0. \tag{3.1.4}$$

抛物型偏微分方程 (3.1.4) 称为**Black-Scholes 方程**(Black-Scholes equation). 注意到参数 μ 是资产的期望回报率, 它在等式中没有出现.

为了完成期权定价模型的公式, 需要规定辅助条件. 敲定价格为 X 的欧式看涨期权在 T 时刻的最终收益对微分方程来说转化为下面的终值条件:

$$c(S, T) = \max(S - X, 0). \tag{3.1.5}$$

因为方程和辅助条件都不包含 μ, 所以能断定看涨期权的价格不依赖于资产价格的实际期望回报率. 期权定价模型涉及 5 个参数: S, T, X, r 和 σ. 除了波动率 σ 以外, 其他的参数都是可以直接观察到的. 关于 μ 在定价模型中的独立性是与**风险中性**(risk neutrality) 有关的概念. 在风险中性世界中, 就承担风险来说, 投资者不要求高于无风险利率的额外收益. 这就与通常的风险投资者形成相反的对比, 在他们的投资组合中, 就承担风险来说, 他们希望获得高于 r 的额外收益. 显然, 期权价格就是作为标的资产回报率且它也等于无风险利率. 如果能对冲来自持有标的资产和期权的风险, 那么从 Black-Scholes 无风险对冲论证中可以明显地看到, 这个风险中性定价方法是可行的. 在后面的章节中, 还将看到用不同的观点给出风险中性的概念.

欧式看跌期权所满足的方程可类似地导出同样的 Black-Scholes 方程. 设 $V(S,t)$ 表示依赖于 S 和 t 的衍生证券的价格, 可以验证 V 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0.$$

在衍生证券中, 一些特殊的衍生证券的价格可以通过求解满足与合约说明书一致的适当辅助条件的 Black-Scholes 方程获得.

注记 (1) Black 和 Scholes (1973) 最初推导出的偏微分方程主要集中在无风险对冲的金融产品上, 但它失去了对冲投资组合价值动态变化的精确分析. 在他们的衍生产品中, 矛盾来源于在对冲的投资组合中保持标的资产份额数瞬间是常数的假设. 他们取投资组合价值 Π 的不同变化为

$$d\Pi=-dc+\Delta_t dS_t,$$

因而失去了起源于 Δ_t 中不同变化的影响. 回顾微积分中的乘积法则为 $d(\Delta_t S_t)=\Delta_t dS_t+S_t d\Delta_t$. 这里, 在对冲投资组合中, 财务收益的观念用来补偿在最初的 Black-Scholes 推导中的不足 (Carr and Bandyopadhyay, 2000). 有趣的是, Black-Scholes 推导的 "实际" 方法导出了期权定价函数同样的微分方程. 实际上, $-dc+\Delta_t dS_t$ 可以看成是在瞬时 dt 时段关于投资组合的瞬时间的财务收益.

(2) 构造一个精确对冲投资组合的能力依赖于连续交易和连续资产价格路径的假设. Black-Scholes 定价模型中的这两个和其他的假设, 已经被后面衍生产品定价理论中的工作严格地验证了. 已经证实资产价格遵循几何布朗过程的假设不能真实地反映资产价格过程的实际行为. 在金融市场中, 资产价格由于突然发生的消息可以出现跳的现象.

(3) 利率被广泛认为随时间以不规则的方式而不是常数波动. 对一个风险资产的期权而言, 利率只以贴现因子出现, 因此, 常数或确定的利率假设对短期的期权是十分必要的.

(4) Black-Scholes 定价方法假设在所有时间都在连续对冲. 在有交易费用的实际市场中, 它将导致在对冲程序中无限大的交易费用.

即使有这些限制, Black-Scholes 模型仍然被认为是衍生产品定价理论中最基本的模型. 为了修正上述缺点, 提出了这个基本模型的各种修改形式. 这些定价模型的某些加强版本可在 3.5 节中找到.

3.1.2 动态复制策略

作为无风险对冲的另一种方法, Merton (1973, 第 1 章) 通过构造自融资策略和包含风险资产、期权和无风险资产 (以货币市场存款的形式存在) 的动态对冲投资组合推导出期权定价方程. 设 $Q_S(t)$ 和 $Q_V(t)$ 分别表示投资组合中资产和期权的

份额, $M_S(t)$ 和 $M_V(t)$ 分别表示 $Q_S(t)$ 份资产和 $Q_V(t)$ 份期权的美元价值. **自融资投资组合**(self-financing portfolio) 是建立在零初始净投资成本和无附加资金投入或抽出. 在投资组合中, 一个证券获得的额外份额完全是由于通过出售在同一个投资组合中的另一个证券来融资的. 由于投资组合中的组成部分允许随时间变化, 所以它被认为是**动态的**(dynamic). 为表述方便起见, 将 t 写在资产价格过程 S_t, 期权价值过程 V_t 和标准布朗过程 Z_t 等的下方. 在 t 时刻, 投资组合价值可以表述为

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= M_S(t) + M_V(t) + M(t)\\ &= Q_S(t)S + Q_V(t)V + M(t),\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

其中 $M(t)$ 为无风险货币市场存款中的无风险资产投资的美元价值. 假设资产价格过程满足随机微分方程, 那么利用 Itô引理得到期权价值 V 的微分如下：

$$\begin{aligned}dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt\\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dZ.\end{aligned}$$

假设能形式上写出 V 的随机动态

$$\frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_V dZ, \tag{3.1.7}$$

则 μ_V 和 σ_V 分别为

$$\mu_V = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial t} + \rho S\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}}{V}, \tag{3.1.8a}$$

$$\sigma_V = \frac{\sigma S\dfrac{\partial V}{\partial S}}{V}. \tag{3.1.8b}$$

上述投资组合的即时美元回报 $d\Pi(t)$ 是由于资产、期权和利率发生的不同价格变化, 以及持有的资产、期权和货币市场存款份额的变化所得到的. $\Pi(t)$ 的微分计算如下：

$$\begin{aligned}d\Pi(t) = &[Q_S(t)dS + Q_V(t)dV + rM(t)dt]\\ &+[SdQ_S(t) + VdQ_V(t) + dM(t)],\end{aligned}$$

其中 $rM(t)dt$ 表示在时段 dt 从货币市场存款中获得的利息数量, $dM(t)$ 表示在货币市场存款中由于出售投资组合中标的资产和期权所获得或损失的美元净值的变化. 因为投资组合是自融资的, 所以在上述方程中, 最后三项的和为零. 因此, 即时投资组合回报 $d\Pi(t)$ 可以表示为资产回报 $d\Pi(t)$,

$$d\Pi(t) = Q_S(t)dS + Q_V(t)dV + rM(t)dt$$

$$= M_S(t)\frac{dS}{S} + M_V(t)\frac{dV}{V} + rM(t)\ dt. \tag{3.1.9}$$

在式 (3.1.6), (3.1.9) 和表达式 dS/S, dV/V 的随机项中消去 $M(t)$, 得到

$$d\Pi(t) = [(\mu - r)M_S(t) + (\mu_V - r)M_V(t)]dt + [\sigma M_S(t) + \sigma_V M_V(t)]dZ. \tag{3.1.10}$$

怎样使上述自融资投资组合在当时是无风险的, 从而使其回报不是随机的呢? 可以通过选择适当的资产和期权的比例来得到,

$$\sigma M_S(t) + \sigma_V M_V(t) = \sigma S Q_S(t) + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}Q_V(t) = 0,$$

也就是在自融资投资组合中, 资产与期权的份额在任何时间都需要满足下述比率:

$$\frac{Q_S(t)}{Q_V(t)} = -\frac{\partial V}{\partial S}. \tag{3.1.11}$$

上述比率依赖于时间, 因此, 对投资组合的连续调整是必需的. 现有一个无风险且零初始净投资成本的动态复制投资组合, 因此, 非随机投资组合的回报 $d\Pi(t)$ 必须为零. 于是式 (3.1.10) 成为

$$0 = [(\mu - r)M_S(t) + (\mu_V - r)M_V(t)]dt.$$

将 (3.1.11) 代入上式得到

$$(\mu - r)S\frac{\partial V}{\partial S} = (\mu_V - r)V. \tag{3.1.12}$$

最后, 将式 (3.1.8a) 中的 μ_V 代入上式, 得到关于 V 相同的 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

假设在上述动态对冲自融资投资组合中, 取 $Q_V(t) = -1$, 也就是说, 该投资组合中期权总是少一个单位. 根据式 (3.1.11), 持有风险资产的份数应保持 $\frac{\partial V}{\partial S}$ 份, 并且随时间连续改变. 为了保持自融资对冲投资组合中期权始终少一个单位, 在投资组合中需要有标的资产和无风险资产 (货币市场存款). 在保持 $\frac{\partial V}{\partial S}$ 份风险资产的动态程序中, 买卖风险资产所产生的净现金流被抽走到货币市场存款.

复制投资组合

当选择 $Q_V(t) = -1$ 时有

$$0 = \Pi(t) = -V + \Delta S + M(t),$$

则期权的价值为

$$V = \Delta S + M(t), \tag{3.1.13}$$

其中 $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$. 式 (3.1.13) 意味着期权的头寸可以通过用风险资产和无风险资产 (货币市场存款) 的自融资动态交易策略来复制, 其对冲率 Δ 等于 $\dfrac{\partial V}{\partial S}$.

3.1.3　风险中性原理

本小节将通过能够解释与风险市场价格有关概念的**风险中性**(risk neutrality) 原理提出另一个观点 (Cox and Ross, 1976). 假设由期权价格 $V(S,t)$ 给出的随机过程遵循式 (3.1.7), 那么 μ_V 和 σ_V 由式 (3.1.8a), (3.1.8b) 给出. 通过重新安排式 (3.1.8a) 中的项, 得到 $V(S,t)$ 满足下列形式的方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu_V V = 0. \tag{3.1.14}$$

与 Black-Scholes 方程不同的是, 方程 (3.1.14) 中包含了参数 μ 和 μ_V. 为了求得期权价格, 需要确定 μ 和 μ_V, 或寻找其他的方法避免这样的麻烦. 无风险对冲投资组合的方式提供了思路.

通过构造无风险动态对冲投资组合, 已经知道 μ 和 μ_V 满足式 (3.1.12). 结合式 (3.1.8b) 和 (3.1.12), 可以得到

$$\frac{\mu_V - r}{\sigma_V} = \frac{\mu - r}{\sigma}. \tag{3.1.15}$$

式 (3.1.15) 有下面的金融解释: 数量 $\mu_V - r$ 和 $\mu - r$ 分别表示关于期权和资产超过无风险利率 r 的额外回报率. 当每个除以各自的波动率 (相关证券的风险测度) 时, 相同的比率称为**风险市场价格**(market price of risk). 风险市场价格可以解释为超过每份风险资产无风险利率的额外回报率. 式 (3.1.15) 揭示了两个对冲证券、期权和它的标的资产, 应该有相同的风险市场价格. 将式 (3.1.8a), (3.1.8b) 代入 (3.1.15) 中并整理, 得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

这正好就是 Black-Scholes 方程, 它可以通过在式 (3.1.14) 中令 $\mu_V = \mu = r$ 获得同样的方程. 关系 $\mu_V = \mu = r$ 意味着持有标的资产或期权具有零风险市场价格. 在

零风险市场价格的市场中, 因为投资者对持有风险资产不需要额外的收入, 所以他们被认为是风险中性的. 当期权的风险可以通过标的资产对冲时, 已经证明了风险中性原理成立, 并且风险对冲投资组合获得无风险利率作为它的期望回报率. 因此, 期权和标的资产的风险市场价格不出现在控制方程中. Black-Scholes 方程表明在风险中性世界中, 期权价值可以通过**人为地**(artificially) 取标的资产和期权的期望回报率 (即无风险利率) 来实现. 读者应该小心标的资产实际回报率将影响资产价格, 因此, 间接地影响**绝对的**(absolute) 衍生产品价格. 这里简单利用风险中性的便利性获得了与标的资产有关的衍生产品价格. 对投资者的风险偏好来说, 在衍生产品价格与资产之间的数学关系是不变的. 然而, 关于投资者风险中性的明显假设也是不必要的.

3.2 鞅定价理论

在多维离散证券模型下 (见 2.2.4 小节), 等价鞅测度的存在性与无套利是等价的. 如果所有未定权益都能被复制, 则称市场为完全的. 在完全的市场中, 如果等价鞅测度存在, 则它们是唯一的. 在一个无套利的完全市场中, 未定权益的套利价格可以利用在等价鞅测度下贴现最终收益的期望来给出. 市场的完全性可以在下述意义下得到解释, 即金融风险的所有来源使得定价是唯一的, 并且现实世界的所有未来状态都可以通过动态调整交易资产的投资组合被复制.

在本节中, 将离散证券模型推广到连续模型情形, 并在鞅定价测度的框架下讨论衍生产品的定价理论 (Harrison and Pliska, 1983). 在连续情形下, 证明等价鞅测度的存在性推出无套利是更直接的. 然而, 在连续模型中, 反之则不成立. 基于“无套利” 的交易策略的限制对等价鞅测度的存在性是不充分的. 为了建立等价鞅测度的存在性, 关于交易策略的附加技术条件是必需的 (Duffie and Huang, 1985; Bingham and Kiesel, 2004, 第二章).

计价单位定义了证券价格是可度量的单位. 例如, 如果交易证券 S 作为计价单位, 则其他证券 $S_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的价格相对于计价单位 S 来说为 S_j/S. 需要注意的是, 采用通常的约定, 这里 “计价单位” 既是指物理仪器, 又是指仪器的价格. 假如货币市场存款作为计价单位, 那么相对于货币市场存款来说, 证券价格简单地就是贴现证券价格. 如果对每个计价单位的选择, 存在唯一的等价鞅测度, 使得相对于该计价单位来说, 所有证券价格在该测度下都是鞅, 那么由交易证券和交易策略组成的连续时间金融市场是无套利和完全的. 当计算可达未定权益的价格时, 利用不同的鞅测度得到的结果是一致的. 也就是说, 衍生产品的价格与鞅定价测度的选取是无关的. 根据衍生产品定价模型的性质, 为了达到在分析计算步骤中的效果. 对给出的定价问题需要仔细地选择计价单位.

在 3.2.1 小节中, 将讨论无套利和等价鞅测度的概念, 并且给出在连续时间模型中可达未定权益的风险中性定价公式. 在连续证券模型中, 在由计价单位标准化后的证券价格是鞅的情况下, 无套利可由等价鞅测度的存在性推出, 从而在风险中性测度下, 根据可复制未定权益投资组合的贴现价格过程是鞅, 可以导出风险中性定价原理. 因此, 考虑在未定权益定价中通用的计价单位不变定理, 也将讨论有关计价单位的转换技巧, 论述怎样计算影响鞅测度变换的 Radon-Nikodym 导数.

在 3.2.2 小节中, 将再次回顾 Black-Scholes 模型, 证明鞅定价理论给出的欧式期权价格可作为在等价鞅测度下到期收益的贴现期望值. 假设期权价格函数满足 Black-Scholes 方程, 风险中性定价原理被认为与 Feynman-Kac 表示公式是一致的 (见 2.4.2 小节).

3.2.1 等价鞅测度和风险中性定价

在连续时间框架下, 允许投资者在金融市场上直到限定时间 T 前可以进行连续的交易. 在连续时间证券模型中, 大多数工具和结论都可以由离散多期模型的情形推广而得到. 在金融市场中, 不确定性可以由带域流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}, P)$ 来刻画, 其中 Ω 为样本空间, $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的 σ 代数, P 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, $\mathcal{F}_t$ 为域流, 并且 $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. 在证券模型中, 有 $M+1$ 个证券, 它们的价格过程可以由适应的随机过程 $S_m(t)(m=0,1,\cdots,M)$ 来刻画. 此外, 定义 $h_m(t)$ 为在投资组合中持有第 m 个证券的份数. 交易策略 $\mathbf{h}(t)$ 是向量随机过程 $(h_0(t), h_1(t), \cdots, h_M(t))^{\mathrm{T}}$, 由于根据投资者在时间 t 前获得的信息来确定投资组合的组成部分, 所以这里 $\mathbf{h}(t)$ 是 $M+1$ 维的可料过程.

与交易策略 $\mathbf{h}(t)$ 有关的价格过程定义为

$$V(t) = \sum_{m=0}^{M} h_m(t) S_m(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.2.1}$$

收益过程 $G(t)$ 定义为

$$G(t) = \sum_{m=0}^{M} \int_0^t h_m(u) dS_m(u), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.2.2}$$

类似于离散情形, $\mathbf{h}(t)$ 是自融资的当且仅当

$$V(t) = V(0) + G(t). \tag{3.2.3}$$

因为在初始时刻 $t=0$ 之后没有额外的现金流入或流出发生, 所以上述等式表明, 在投资组合中, 与自融资策略有关的价格变化仅仅来自于证券价格的变化.

用 $S_0(t)$ 表示货币市场存款过程, 并且它以无风险利率 $r(t)$ 增长, 即

$$dS_0(t) = r(t) S_0(t) dt. \tag{3.2.4}$$

贴现证券价格过程定义为

$$S_m^*(t) = S_m(t)/S_0(t), \quad m = 1, 2, \cdots, M. \tag{3.2.5}$$

贴现价值过程 $V^*(t)$ 可以用 $V(t)$ 除以 $S_0(t)$ 得到. 由金融上的直觉可以看到, 在计价单位变换后, 自融资投资组合仍然是自融资的 (见习题 3.5). 用 $S_0(t)$ 作为计价单位, 借助于式 (3.2.3), 推导出自融资策略的贴现收益过程 $G^*(t)$ 为

$$G^*(t) = V^*(t) - V^*(0). \tag{3.2.6}$$

如果贴现收益过程 $G^*(t)$ 是一个 Q 鞅, 则自融资交易策略称为 Q 容许的, 其中 Q 为风险中性测度. 因此, 对应的贴现投资组合价值 $V^*(t)$ 也是一个 Q 鞅.

1. *无套利原理和等价鞅测度*

一个自融资交易策略 $\mathbf{h}(t)$ 表示一个套利机会当且仅当① $G^*(T) \geqslant 0$, ② $E_P[G^*(T)] > 0$, 其中 P 为与证券模型有关的事件发生状况的实际概率测度. 在空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 中, 一个概率测度 Q 称为一个等价鞅测度, 如果满足

(i) Q 与 P 等价, 即 P 和 Q 有相同的零测集;

(ii) 贴现证券价格过程 $S_m^*(t)\,(m = 1, 2, \cdots, M)$ 在 Q 下是鞅, 即

$$E_Q[S_m^*(u)|\mathcal{F}_t] = S_m^*(t) \tag{3.2.7}$$

对所有的 $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant T$.

根据下面与在离散多期证券模型中类似的一个论证, 无套利可由等价鞅测度的存在性推出. 为了证明这个结论, 假设等价鞅测度存在, 并且 $\mathbf{h}$ 在 P 下是自融资交易策略, 因此, 它在 Q 下也是自融资交易策略. 由 $\mathbf{h}$ 生成的投资组合在时间 t 时的贴现价值 $V^*(t)$ 是一个 Q 鞅, 因此, $V^*(0) = E_Q[V^*(T)]$. 现在, 以 $V(0) = V^*(0) = 0$ 开始, 并且假设 $V^*(T) \geqslant 0$ 成立. 因为 $Q(\omega) > 0$, 并且能观察到 $E_Q[V^*(T)] = V^*(0) = 0$, 所以只能得到 $V^*(T) = 0$. 换句话说, 如果开始有 $V^*(0) = 0$, 那么 $V^*(T) \geqslant 0$ 且 $V^*(T)$ 在某个现实状态下不可能是严格正的. 因此, 不存在任何套利机会.

未定权益可由 $\mathcal{F}_T$ 可测随机变量来刻画. 如果存在至少一个容许交易策略 $\mathbf{h}$ 满足在 T 时刻投资组合价值 $V(T)$ 等于 Y, 则称未定权益 Y 为**可达的**(attainable). 因此, 就说 Y 是由 $\mathbf{h}$ 生成的. Y 的套利价格可以通过类似于在定理 3.1 中阐述的**风险中性定价方法**(risk neutral valuation approach) 获得.

定理 3.1 假设等价鞅测度 Q 存在. 令 Y 是由 Q 容许自融资交易策略 $\mathbf{h}$ 生成的可达未定权益, 则对每个时间 $t\,(0 \leqslant t \leqslant T)$, Y 的套利价格为

$$V(t; \mathbf{h}) = S_0(t) E_Q\left[\frac{Y}{S_0(T)}\bigg|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.2.8}$$

因为 Y 是由 Q 容许自融资交易策略 $\mathbf{h}$ 生成的, 所以贴现投资组合价格过程 $V^*(t;\mathbf{h})$ 在 Q 下是一个鞅, 从而容易看到定理 3.1 的正确性. 由此导出

$$V(t;\mathbf{h}) = S_0(t)V^*(t;\mathbf{h}) = S_0(t)E_Q[V^*(T;\mathbf{h})|\mathcal{F}_t].$$

更进一步, 通过观察 $V^*(T;\mathbf{h}) = Y/S_0(T)$, 因此, 风险中性定价公式 (3.2.8) 成立.

即使有两个由 Y 生成的复制投资组合, 上述风险中性定价公式证明了套利价格唯一地由贴现到期收益的期望确定, 与复制投资组合的选取无关. 这是单价定律的一个结果.

2. 计价单位的转换

风险中性定价公式 (3.2.8) 用无风险资产 $S_0(t)$ (货币市场存款) 作为计价单位. 为使风险中性定价公式成立, Geman 等 (1995) 证明了作为计价单位 $S_0(t)$ 的选择并不必是唯一的. 这将在 8.1 节中给出证明, 可以选取另一个计价单位, 如随机债券价格, 在随机利率下对分析期权定价模型的计算可能更方便. 下面的讨论总结了由 Geman 等 (1995) 在计价单位转换方面发展的强有力工具.

令 $N(t)$ 为计价单位, 并且假设存在等价鞅测度 Q_N, 使得关于 $N(t)$ 标准化后的所有证券价格是 Q_N 鞅. 此外, 如果未定权益 Y 在一对计价单位 —— 测度 $(S_0(t), Q)$ 下是可达的, 那么它在任选一对计价单位 —— 测度 $(N(t), Q_N)$ 下也是可达的. 由风险中性定价公式给出的任何证券的套利价格在两个测度下应该是一样的. 因此有

$$S_0(t)E_Q\left[\frac{Y}{S_0(T)}\bigg|\mathcal{F}_t\right] = N(t)E_{Q_N}\left[\frac{Y}{N(T)}\bigg|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.2.9}$$

为了求出 Radon-Nikodym 导数

$$L(t) = \left.\frac{dQ_N}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t}, \quad t \in [0,T],$$

它影响从 Q_N 到 Q 的测度变换, 利用贝叶斯法则 (见习题 2.43) 得到

$$E_{Q_N}\left[\frac{Y}{N(T)}\bigg|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{E_Q[L(T)|\mathcal{F}_t]}E_Q\left[\frac{Y}{N(T)}L(T)\bigg|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.2.10a}$$

由式 (3.2.9) 有

$$E_{Q_N}\left[\frac{Y}{N(T)}\bigg|\mathcal{F}_t\right] = \frac{N(0)S_0(t)}{N(t)}E_Q\left[\frac{Y}{N(0)S_0(T)}\bigg|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.2.10b}$$

回想关系式 $E_Q[L(T)|\mathcal{F}_t] = L(t)$. 现在, 如果定义 Radon-Nikodym 导数 $L(t)$ 为

$$L(t) = \left.\frac{dQ_N}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{N(t)}{N(0)S_0(t)}, \quad t \in [0,T], \tag{3.2.11}$$

则式 (3.2.10a) 和 (3.2.10b) 是一致的.

可以看到计价单位转换的技巧对分析金融衍生产品的定价是最强有力的工具之一. 一般地, 影响从一对计价单位 —— 测度 $(N(t), Q_N)$ 到另一对 $(M(t), Q_M)$ 测度变换的 Radon-Nikodym 导数 $L_{N,M}(t)$ 为

$$L_{N,M}(t) = \left.\frac{dQ_N}{dQ_M}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{N(t)}{N(0)} \Big/ \frac{M(t)}{M(0)}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.2.12}$$

3.2.2 Black-Scholes 模型回顾

在鞅定价框架下, 再一次回顾 Black-Scholes 期权定价模型. 当所有贴现价格过程是 Q 鞅时, 假设风险中性测度 Q 存在. 证券模型中有两个基本的可交易证券, 标的风险资产和以货币市场存款形式的无风险资产. 风险资产和无风险资产的价格过程在实际概率测度 P 下分别满足

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \tag{3.2.13a}$$

$$dM_t = rM_t dt, \tag{3.2.13b}$$

其中 Z_t 为 P 布朗过程. 假设取货币市场存款作为计价单位, 并且根据 $S_t^* = S_t/M_t$ 来定义贴现风险资产的价格. 根据 Itô引理, 价格过程 S_t^* 变为

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = (\mu - r)dt + \sigma dZ_t.$$

希望能够找到等价鞅测度 Q, 使得贴现的资产价格 S_t^* 是一个 Q 鞅. 根据 Girsanov 定理, 在 Radon-Nikodym 导数中 (见式 (2.4.32a), (2.4.32b)), 假设取 $\gamma(t)$ 满足

$$\gamma(t) = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

那么 $\widetilde{Z}_t$ 在概率测度 Q 下是一个布朗过程, 并且

$$d\widetilde{Z}_t = dZ_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt. \tag{3.2.14}$$

在 Q 测度下, S_t^* 的过程现在变为

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = \sigma d\widetilde{Z}_t. \tag{3.2.15a}$$

因为 $\widetilde{Z}_t$ 是 Q 布朗过程, 所以 S_t^* 是一个 Q 鞅. 将式 (3.2.14) 代入式 (3.2.13a) 中, 在 Q 测度下, 资产价格 S_t 满足

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma d\widetilde{Z}_t, \tag{3.2.15b}$$

其中漂移率等于无风险利率 r. 当货币市场存款作为计价单位时, 相应的等价鞅测度通常称为**风险中性测度**(risk neutral measure), 并且在 Q 测度下, S_t 的漂移率称为**风险中性漂移率**(risk neutral drift rate).

根据风险中性定价公式 (3.2.8), 衍生产品的套利价格为

$$V(S,t) = E_Q^{t,S}\left[\frac{M_T}{M_t}h(S_T)\right] = e^{-r(T-t)}E_Q^{t,S}[h(S_T)], \tag{3.2.16}$$

其中 $E_Q^{t,S}$ 为在风险中性测度 Q 下关于域流 $\mathcal{F}_t$ 当 $S_t = S$ 时的条件期望. 在利率 r 为常数的假设下, 贴现因子 $M_T/M_t = e^{-r(T-t)}$ 是常数, 因此, 它能从期望项中取出. 在以后的讨论中, 在不混淆的情况下, 选择用 E_Q 代替 $E_Q^{t,S}$. 衍生产品的到期收益是到期资产价格 S_T 的某个函数 h. 假设 $V(S,t)$ 满足 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

借助 Feynman-Kac 表示公式, 价格函数 $V(S,t)$ 满足在式 (3.2.16) 中定义的期望表示. 这说明风险中性定价原理与 Black-Scholes-Merton 定价公式是一致的.

作为一个例子, 考虑到期收益为 $\max(S_T - X, 0)$ 的欧式看涨期权. 利用式 (3.2.16), 看涨期权的价格 $c(S,t)$ 为

$$\begin{aligned} c(S,t) &= e^{-r(T-t)}E_Q[\max(S_T - X, 0)] \\ &= e^{-r(T-t)}\{E_Q[S_T\mathbf{1}_{\{S_T \geqslant X\}}] - XE_Q[\mathbf{1}_{\{S_T \geqslant X\}}]\}. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

在下面的章节中, 利用计算上述期望来表明如何求得看涨期权的定价公式 (见式 (3.3.12a), (3.3.12b)).

在国内风险中性测度下的汇率过程

考虑一个外汇期权, 其最终收益函数依赖于汇率 F, 它是以一单位的外币来定义本币的价格. 令 M_d 和 M_f 分别表示国内市场和国外市场中的货币市场存款过程. 假设 $M_d(t), M_f(t)$ 和 $F(t)$ 的过程在实际概率测度下满足

$$\begin{aligned} dM_d(t) &= rM_d(t)dt, \\ dM_f(t) &= r_f M_f(t)dt, \\ \frac{dF(t)}{F(t)} &= \mu_F dt + \sigma dZ_F(t), \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

其中 r 和 r_f 分别表示国内和国外的无风险常数利率. 希望能够找到在国内风险中性测度 Q_d 下汇率过程 $F(t)$ 的风险中性漂移率.

在国内货币 (其给定的价值为 FM_f) 中, 可以把国内货币市场存款和国外货币市场存款作为在国内货币市场中交易的证券. 在国内风险中性测度 Q_d 下, $M_d(t)$ 用来作为计价单位. 根据 Itô引理, 相关的价格过程 $X(t) = F(t)M_f(t)/M_d(t)$ 满足

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = (r_f - r + \mu_F)dt + \sigma dZ_F(t), \tag{3.2.19a}$$

其中 $X(t)$ 被认为是在国内货币市场中国内资产的贴现价格过程. 因此, $X(t)$ 在 Q_d 下应该是一个鞅. 在 Girsanov 定理中, 选取 $\gamma = (r_f - r + \mu_F)/\sigma$, 定义

$$dZ_d(t) = dZ_F(t) + \gamma dt,$$

其中 $Z_d(t)$ 为 Q_d 布朗过程. 现在, 在国内风险中性测度 Q_d 下, 过程 $X(t)$ 满足

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \sigma dZ_d(t). \tag{3.2.19b}$$

因为 $Z_d(t)$ 是 Q_d 布朗过程, 所以 $X(t)$ 为 Q_d 鞅. 因此, 在 Q_d 下的汇率过程 $F(t)$ 满足

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = (r - r_f)dt + \sigma dZ_d(t). \tag{3.2.20}$$

因此, 在国内风险中性测度 Q_d 下, 导出了汇率过程 $F(t)$ 的风险中性漂移率是 $r - r_f$.

3.3 Black-Scholes 定价公式及其性质

在本节中, 首先通过直接求解带有适当附加条件的 Black-Scholes 方程来求得欧式看涨期权的 Black-Scholes 定价公式. 一旦已知欧式看涨期权的定价公式, 那么就可以根据看涨–看跌期权的平价关系式得到欧式看跌期权的定价公式. 也可以通过计算到期收益的贴现期望, 并利用风险中性定价公式求得看涨期权定价函数. 把看涨期权定价函数的期望表示代入到 Black-Scholes 方程中, 就得到在风险中性测度下资产价格转移密度函数的向后 Fokker-Planck 方程.

为了能够对冲及其他的交易目的, 估计关于标的资产和其他期权参数价格的期权价格变换率是重要的, 如敲定价格、波动率等, 从而导出这些比较静态 (通常称为期权公式的**希腊字母**(greeks)) 的公式并分析它们的解析性质.

3.3.1 欧式期权的定价公式

回想标准欧式看涨期权的 Black-Scholes 方程形式

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc, \quad 0 < S < \infty,\ \tau > 0, \tag{3.3.1}$$

其中 $c = c(S, \tau)$ 为欧式看涨期权的价格，S 和 $\tau = T - t$ 分别为资产价格和离到期日的时间. 用离到期日的时间 τ 来代替时间 t 作为时间变量，目的在于使 Black-Scholes 方程成为通常的抛物型偏微分方程. 期权定价模型的附加条件规定如下：

初始条件 (到期收益)

$$c(S, 0) = \max(S - X, 0), \quad X \text{ 为敲定价格}. \tag{3.3.2a}$$

边界上解的性态

(i) 对某个 $t < T$，当资产价值接近零时，在后面的时间里它将保持为零，从而使得看涨期权在到期日一定处于虚值. 因此，看涨期权价值为零，即

$$c(0, \tau) = 0. \tag{3.3.2b}$$

(ii) 当 S 足够大时，实施看涨期权是必然的. 由于敲定价格的即期价格为 $Xe^{-r\tau}$，当 $S \to \infty$ 时有

$$c(S, \tau) \sim S - Xe^{-r\tau}. \tag{3.3.2c}$$

下面阐明在偏微分方程理论中是如何运用格林函数技巧来求解 $c(S, \tau)$ 的. 利用变换 $y = \ln S$ 和 $c(y, \tau) = e^{-r\tau} w(y, \tau)$，Black-Scholes 方程转换为下述常系数抛物型方程：

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad -\infty < y < \infty,\ \tau > 0. \tag{3.3.3a}$$

对模型来说，初始条件 (3.3.2a) 现在变为

$$w(y, 0) = \max(e^y - X, 0). \tag{3.3.3b}$$

由于定价模型的定义域是无限的，因此，由带有初始条件的微分方程就可以求出看涨期权的定价函数. 一旦求出定价函数，那么就检验解的值是否满足式 (3.3.2b), (3.3.2c) 中给出的边界条件.

1. ***格林函数方法***

回忆带有漂移率 μ，方差率 σ^2 和 $X(0) = 0$ 的布朗过程 $X(t)$ 的概率密度函数为

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right),$$

其中 $u(x, t)$ 满足式 (2.3.13). 因此，导出式 (3.3.3a) 在无限域上的格林函数为

$$\phi(y, \tau; \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right). \tag{3.3.4}$$

$\phi(y,\tau;\xi)$ 满足初始条件

$$\lim_{\tau\to 0^+}\phi(y,\tau;\xi)=\delta(y-\xi),$$

其中 $\delta(y-\xi)$ 为 Dirac 函数, 表示在点 ξ 有一个单位的脉冲. 格林函数 $\phi(y,\tau;\xi)$ 可以认为是在位置 y 和时间 τ 对开始位置 ξ 的一个单位脉冲的反应. 另一方面, 根据 Dirac 函数的性质, 初始条件可以表述为

$$w(y,0)=\int_{-\infty}^{\infty}w(\xi,0)\delta(y-\xi)\,d\xi.$$

因此, $w(y,0)$ 可以看成为具有从 $\xi\to-\infty$ 到 $\xi\to\infty$ 排列的不同大小 $w(\xi,0)$ 的脉冲的重叠. 因为方程 (3.3.3a) 是线性的, 因此, 在位置 y 和时间 τ 对位置 ξ 和 $\tau=0$ 时大小为 $w(\xi,0)$ 的脉冲的反应为 $w(\xi,0)\phi(y,\tau;\xi)$. 根据线性微分方程的叠加原理, 通过求这些脉冲反应, 得到方程 (3.3.3a), (3.3.3b) 中初值问题的解. 这等于从 $\xi\to-\infty$ 到 $\xi\to\infty$ 的积分. 因此, $c(y,\tau)$ 的解为

$$\begin{aligned}c(y,\tau)&=e^{-r\tau}w(y,\tau)\\&=e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}w(\xi,0)\phi(y,\tau;\xi)d\xi\\&=e^{-r\tau}\int_{\ln X}^{\infty}(e^{\xi}-X)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\\&\quad\times\exp\left(-\frac{\left[y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi,\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

其中, $\phi(y,\tau;\xi)$ 可以被解释为从初始值 $w(\xi,0)$ 变换到时间 τ 时解 $w(y,\tau)$ 的积分变换核.

可以认为在方程 (3.3.5) 中的积分是求如下形式的闭式解: 考虑下列积分, 根据指数表达式中的完全平方得到

$$\begin{aligned}&\int_{\ln X}^{\infty}e^{\xi}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left[y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi\\&=\exp(y+r\tau)\int_{\ln X}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left[y+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi\end{aligned}$$

$$= e^{r\tau} SN\left(\frac{\ln\dfrac{S}{X}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad y=\ln S.$$

另一个积分表述为

$$\int_{\ln X}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left[y+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi$$

$$=N\left(\frac{y+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\ln X}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$=N\left(\frac{\ln\dfrac{S}{X}+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad y=\ln S.$$

因此, 欧式看涨期权的定价公式为

$$c(S,\tau)=SN(d_1)-Xe^{-r\tau}N(d_2), \tag{3.3.6}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{S}{X}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}.$$

根据 $S>X$ 或 $S<X$, 当 $\tau\to 0^+$ 时, d_1 和 d_2 的极限分别趋于 1 或趋于 0, 因此, 初始条件是满足的. 通过观察, 可以得到

$$\lim_{S\to\infty}N(d_1)=\lim_{S\to\infty}N(d_2)=1$$

和

$$\lim_{S\to 0^+}N(d_1)=\lim_{S\to 0^+}N(d_2)=0.$$

通过分析欧式看涨期权定价公式 (3.3.6), 容易检查边界条件 (3.3.2b), (3.3.2c) 也是满足的. 因为不支付红利的美式看涨期权提前实施是不明智的, 所以欧式看涨期权的定价公式同时也给出了不支付红利的美式看涨期权的价格.

看涨期权的界限为

$$\max(S-Xe^{-r\tau},0)\leqslant c(S,\tau)\leqslant S, \quad S\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0. \tag{3.3.7}$$

关于看涨期权的界限在没有分布结果的情况下也是成立的 (见式 (1.2.12)), 而且证明了看涨期权函数 $c(S,\tau)$ 是 S 的一个递增凸函数 (见式 (3.3.28)). 关于 S 的 $c(S,\tau)$ 图形在图 3.1 中表明.

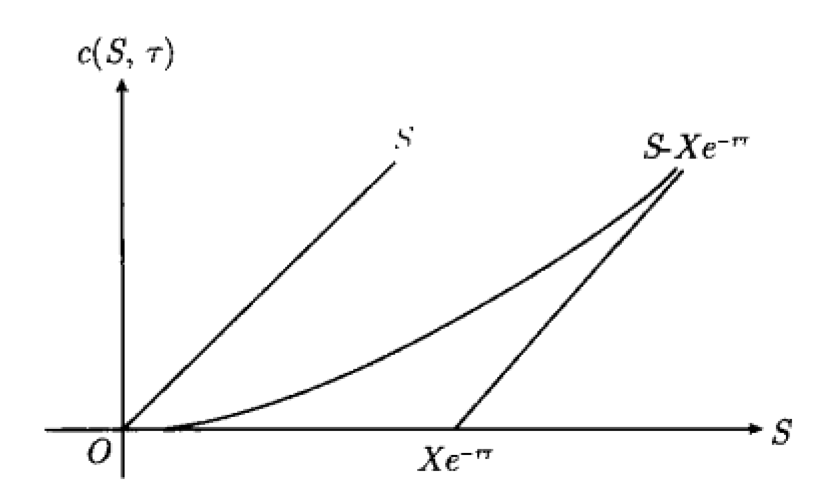


图 3.1 在时刻 τ 关于 S 的 $c(S,\tau)$ 图形, 欧式看涨期权价格的边界是在 S 和 $\max(S-Xe^{-r\tau},0)$ 之间

2. 风险中性定价方法

利用风险中性定价方法, 通过计算在风险中性测度下的到期收益的贴现期望值, 得到欧式看涨期权的价格. 令 $\psi(S_T,T;S,t)$ 表示在风险中性测度下 T 时刻到期资产价格 S_T 的转移密度函数, S 为前面时间 t 的资产价格. 根据方程 (3.2.17), 看涨期权的价格 $c(S,t)$ 为

$$\begin{aligned} c(S,t) &= e^{-r(T-t)}E_Q[(S_T-X)\mathbf{1}_{\{S_T\geqslant X\}}] \\ &= e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \max(S_T-X,0)\psi(S_T,T;S,t)dS_T. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

在风险中性测度 Q 下, 资产价格服从漂移率为 r, 方差为 σ^2 的几何布朗过程. 利用方程 (2.4.16), (2.4.17) 中的结果, 导出

$$\ln\frac{S_T}{S} = \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\widetilde{Z}(\tau), \quad \tau = T-t, \tag{3.3.9}$$

其中 $\widetilde{Z}(\tau)$ 为 Q 布朗过程. 可以看到 $\ln\dfrac{S_T}{S}$ 是期望为 $\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau$, 方差为 $\sigma^2\tau$ 的正态分布. 从正态随机变量的密度函数推导中 (见式 (2.3.12) 中定义的 $f_X(x,t)$), 可以看到转移密度函数为

$$\psi(S_T,T;S,t) = \frac{1}{S_T\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left[\ln\dfrac{S_T}{S}-\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right). \tag{3.3.10}$$

设 $\xi = \ln S_T$ 和 $y = \ln S$, 从而 $\ln \dfrac{S_T}{S} = \xi - y$ 且 $d\xi = \dfrac{dS_T}{S_T}$. 将上述转移密度函数代入到方程 (3.3.8) 中, 欧式看涨期权价格可表述为

$$
\begin{aligned}
c(S,\tau) = & e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \max(e^{\xi} - X, 0) \\
& \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(- \frac{\left[y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)\tau - \xi \right]^2}{2\sigma^2\tau} \right) d\xi, \qquad (3.3.11)
\end{aligned}
$$

这与式 (3.3.5) 中给出的结果是一致的.

如果将看涨期权价格公式 (3.3.6) 与 (3.2.17) 中的期望表达式比较, 则推得

$$N(d_2) = E_Q[\mathbf{1}_{\{S_T > X\}}] = Q[S_T > X], \qquad (3.3.12a)$$

$$e^{r\tau} S N(d_1) = E_Q[S_T \mathbf{1}_{\{S_T > X\}}]. \qquad (3.3.12b)$$

因此, $N(d_2)$ 可以看成是在风险中性测度 Q 下看涨期权在到期日处于实值状态下的概率, 从而 $Xe^{-r\tau}N(d_2)$ 表示期权持有者在到期日所支付收益的风险中性期望的现值. 同样, $SN(d_1)$ 为看涨期权在到期日处于实值状态条件下贴现到资产价格的风险中性期望. 利用测度变换公式 (3.2.11) 导出方程 (3.3.12b) 的一个可供选择的方法将在习题 3.10 中阐明.

3. Fokker-Planck 方程

假如将式 (3.3.8) 中的积分代入到 Black-Scholes 方程中, 便得到

$$0 = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \max(S_T - X, 0) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2} + rS \frac{\partial \psi}{\partial S} \right) dS_T.$$

被积函数必须为零, 从而导出 $\psi(S_T, T; S, t)$ 满足下列方程:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2} + rS \frac{\partial \psi}{\partial S} = 0. \qquad (3.3.13)$$

因为相关变量 S 和 t 是倒向变量, 所以上述方程称为**倒向 Fokker-Planck 方程** (backward Fokker-Planck equation). 就前向变量 S_T 和 T 而言, 能表明 $\psi(S_T, T; S, t)$ 满足**前向 Fokker-Planck 方程**(forward Fokker-Planck equation)(见习题 3.9)

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} - \frac{\sigma^2}{2} S_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial S_T^2} + rS_T \frac{\partial \psi}{\partial S_T} = 0. \qquad (3.3.14)$$

如果设 $x = \ln S_T, \mu = r - \dfrac{\sigma^2}{2}$, 并且把在方程 (2.3.13) 中形象化的日历时间变量 t 看成是方程 (3.3.14) 中的前向时间变量 T, 那么前向方程有与方程 (2.3.13) 中的相同形式.

4. 看跌期权定价函数

利用看涨-看跌期权的平价关系 (见式 (1.2.17)), 欧式看跌期权的价格为

$$\begin{aligned} p(S,\tau) &= c(S,\tau) + Xe^{-r\tau} - S \\ &= S[N(d_1) - 1] + Xe^{-r\tau}[1 - N(d_2)] \\ &= Xe^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

当资产价格足够低时, 可以看到 $N(-d_2) \to 1$ 和 $SN(-d_1) \to 0$. 因此, 当 $S \to 0^+$ 时,

$$p(S,\tau) \sim Xe^{-r\tau}. \tag{3.3.16}$$

当 S 的价格足够低时, 看跌期权的价值可能低于它的内在价值 $X - S$.

另一方面, 虽然当 $S \to \infty$ 时, $SN(-d_1)$ 是不确定的形式 $\infty\cdot 0$, 能证明当 $S \to \infty$ 时有 $SN(-d_1) \to 0$. 因此, 得到

$$\lim_{S\to\infty} p(S,\tau) = 0. \tag{3.3.17}$$

这个结果并不奇怪, 因为当 $S \to \infty$ 时, 欧式看跌期权在到期日必定处于虚值状态, 所以它的价值为零. 欧式看跌期权定价函数是关于 S 的递减凸函数, 其上界是敲定价格 X. 关于 S 的看跌期权价格 $p(S,\tau)$ 的图形在图 3.2 中给出.

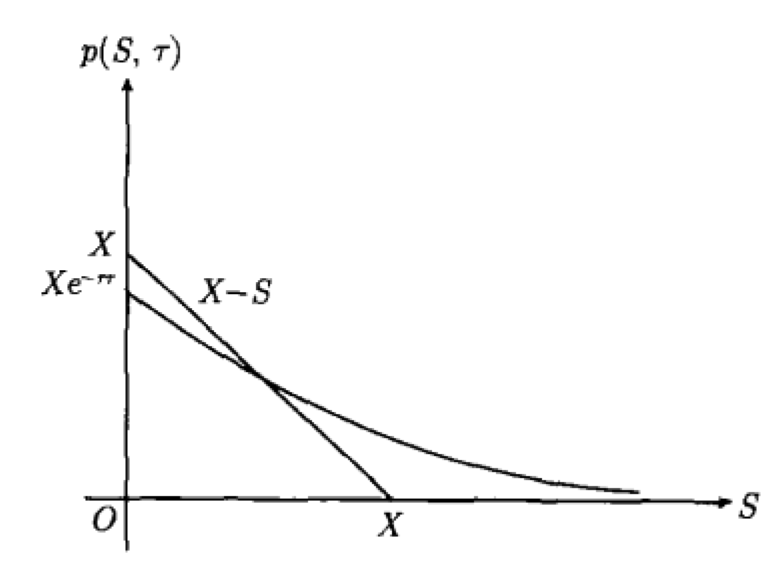


图 3.2 在 τ 时刻关于 S 的 $p(S,\tau)$ 图形, 当资产 S 的价格足够低时, 欧式看跌期权的价值可能低于它的内在价值 $X - S$

对一个离到期日时间为无限的永久欧式看跌期权, 由于当 $\tau \to \infty$ 时, $N(-d_1) \to 0$ 和 $N(-d_2) \to 0$, 因此有

$$\lim_{\tau\to\infty} p(S,\tau) = 0. \tag{3.3.18}$$

因为如果接受从现在到无穷时间, 则敲定价格的现值为零, 从而永久欧式看跌期权的价值为零.

3.3.2 比较静态

期权价格公式是 5 个参数：S, τ, X, r 和 σ 的价格函数. 为了更好地理解欧式标准期权的定价性质, 分析比较静态. 考察每个参数对期权价格的变化率. 通常用不同的希腊字母来表示不同类型的比较静态, 因此, 这些变化率也称为期权价格函数的期权参数.

下面来考虑在其他 4 个变量不变的情况下, 另一个变量对期权价格的影响.

1. 关于资产价格的 Δ 衍生产品

衍生证券价格 V 的 Δ (delta) 定义为 $\dfrac{\partial V}{\partial S}$, 其中 S 表示资产价格. 在投资组合的对冲策略中, Δ 扮演着一个很重要的角色. 回顾在执行 Black-Scholes 对冲策略过程中, 通过构造一个看涨期权的出售者出售一份看涨期权和同时持有 Δ 份资产的无风险投资组合, 这实际上就是持有一份有保护的看涨期权. 根据看涨期权公式 (3.3.6), 欧式看涨期权价格的 Δ 为

$$\begin{aligned}\Delta_c &= \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + S\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{\partial d_1}{\partial S} - Xe^{-r\tau}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{d_2^2}{2}}\frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= N(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\left[e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{-(r\tau+\ln\frac{S}{X})}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\right] \\ &= N(d_1) > 0. \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

有趣的是, Δ_c 最后等于 $N(d_1)$. 因为欧式看涨期权可以通过 Δ 份的风险资产加上一定量负的货币市场存款来进行复制, 所以这不是令人惊讶的. 因此, 在看涨期权价格公式中, S 前面的乘积因子 $N(d_1)$ 等于对冲率 Δ_c. 根据看跌–看涨期权的平价关系式, 欧式看跌标准期权价格的 Δ_p 为

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S} = \Delta_c - 1 = N(d_1) - 1 = -N(-d_1) < 0. \tag{3.3.20}$$

因为随着资产价格的增大, 正的到期收益的可能性将以一个更高的看涨期权价格而增大, 所以看涨期权价格的 Δ_c 总是正的. 反过来, 就可以解释为什么看跌期权价格的 Δ_p 值总是负的. Δ_p 的负性意味着在看跌期权中的多头应该通过连续调整标的资产多头来进行对冲.

看涨和看跌期权价格的 Δ_c 和 Δ_p 都是 S 和 τ 的函数. 注意到由于 $N(d_1)$ 总是 S 的递增函数, 所以 Δ_c 也是 S 的递增函数, 而且 Δ_c 的值为 0~1. 关于 S 的 Δ_c 的曲线在临界值变为凹性,

$$S_c = X\exp\left(-\left(r + \frac{3\sigma^2}{2}\right)\tau\right).$$

因此, 当 $0 \leqslant S < S_c$ 时, 曲线是向上凹的; 当 $S_c < S < \infty$ 时, 曲线是向下凹的. 为了估计当 $\tau \to \infty$ 和 $\tau \to 0^+$ 时 Δ_c 的极限值, 应用下列正态分布函数 $N(x)$ 的性质:

$$\lim_{x\to\infty} N(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} N(x) = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{x\to 0} N(x) = \frac{1}{2}.$$

注意到对所有的 S, 当 $\tau \to \infty$ 时, $d_1 \to \infty$. 因此, 当 $\tau \to 0^+$ 时有

(i) 如果 $S > X$, 则 $d_1 \to \infty$;

(ii) 如果 $S = X$, 则 $d_1 \to 0$;

(iii) 如果 $S < X$, 则 $d_1 \to -\infty$.

因此, 对于所有的 S, 可以导出

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\partial c}{\partial S} = 1 \tag{3.3.21a}$$

和

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\partial c}{\partial S} = \begin{cases} 1, & S > X, \\ \frac{1}{2}, & S = X, \\ 0, & S < X. \end{cases} \tag{3.3.21b}$$

对资产价格 S 和到期时间 τ 的看涨期权价格的 Δ_c 值的变化将分别在图 3.3 和图 3.4 中看到.

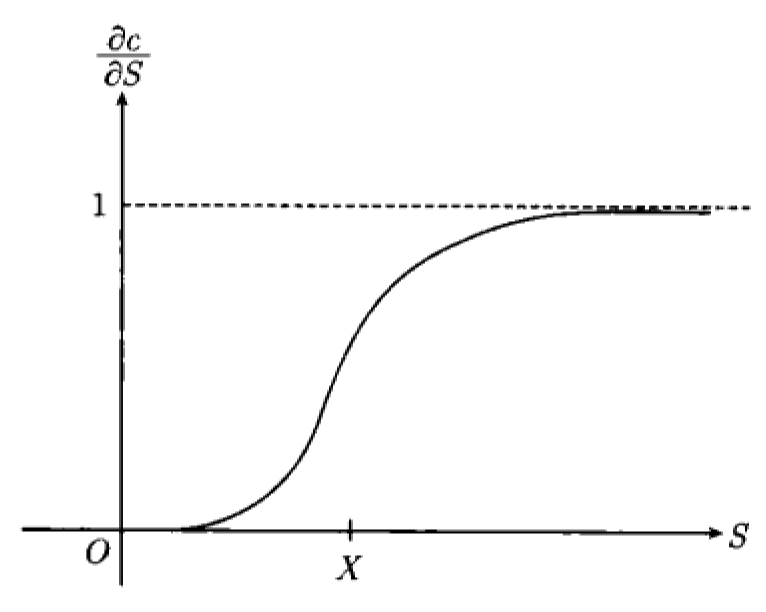


图 3.3 欧式看涨期权价值的 Δ 的变化与到期时间 S 的关系, 当 $S = Xe^{-(r+\frac{3\sigma^2}{2})\tau}$ 时曲线改变凹性

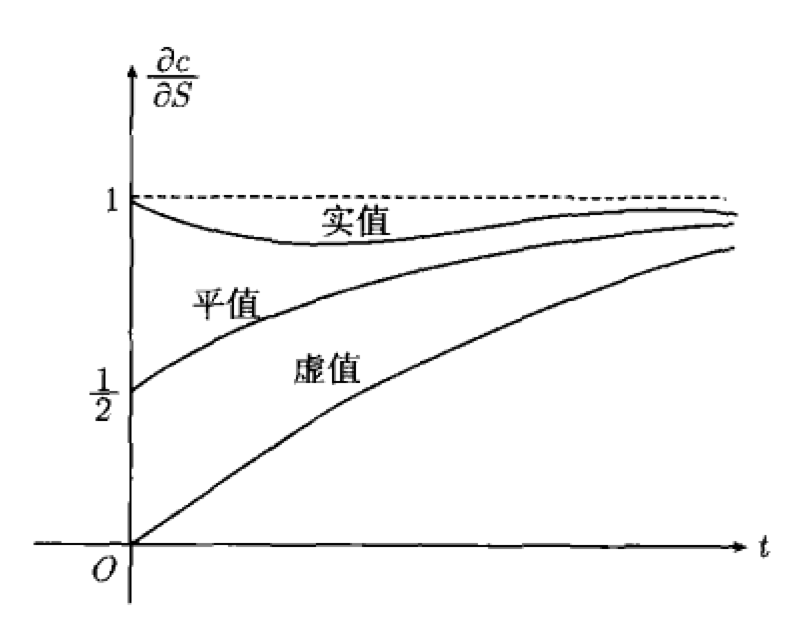


图 3.4　欧式看涨期权价格 Δ 的变化与到期时间 τ 的关系，当 $\tau \to \infty$ 时，Δ 的值总是从左边趋于 1；当时间接近到期日时，Δ 的值趋于不同的渐近极限，这依赖于期权的价值状况

2. 资产价格的弹性

定义关于资产价格看涨期权的**弹性**(elasticity) 为 $\left(\dfrac{\partial c}{\partial S}\right)\left(\dfrac{S}{c}\right)$. 弹性参数给出了看涨期权价格的百分比变化对一份资产价格百分比变化的量度. 对不支付红利资产的欧式看涨期权，弹性 e_c 为

$$e_c = \left(\frac{\partial c}{\partial S}\right)\left(\frac{S}{c}\right) = \frac{SN(d_1)}{SN(d_1) - Xe^{-r\tau}N(d_2)} > 1. \tag{3.3.22}$$

当 $e_c > 1$ 时，看涨期权百分比变化的风险比标的资产的风险更大. 这也表明当资产价格很小时 (虚值)，看涨期权的弹性却很大，并且它随着资产价格的增大而单调递减. 当 S 的值足够大，即 $S \to \infty$ 时，$c \sim S$，所以弹性渐近趋于 1.

欧式看跌期权价格的弹性类似定义为

$$e_p = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)\left(\frac{S}{p}\right). \tag{3.3.23}$$

可以看到看跌期权的弹性永远是负的，但它的绝对值是小于或大于 1 的 (见习题 3.13). 因此，欧式看跌期权可能或不可能比标的资产风险更大.

对看跌和看涨期权，当对应的期权越来越接近到期日或虚值时，它们的弹性绝对值增大.

3. 关于敲定价格的导数

在 1.2 节中，证明欧式看涨 (跌) 期权价格是敲定价格的减 (增) 函数. 对欧式看涨和看跌期权价格，可以通过计算如下对应的导数来验证这个性质：

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial X} &= S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{\partial d_1}{\partial X} - Xe^{-r\tau}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{d_2^2}{2}}\frac{\partial d_2}{\partial X} - e^{-r\tau}N(d_2)\\ &= -e^{-r\tau}N(d_2) < 0\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

和

$$\frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\partial c}{\partial X} + e^{-r\tau} \text{ (由看跌和看涨期权平价关系)}$$
$$= e^{-r\tau}[1 - N(d_2)] = e^{-r\tau}N(-d_2) > 0. \tag{3.3.25}$$

4. Θ关于时间的导数

衍生证券 V 价格的 Θ (theta) 定义为 $\frac{\partial V}{\partial t}$, 于是 t 为日历时间. 于是欧式标准看涨和看跌期权价格的 Θ 值分别为

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial c}{\partial \tau}$$
$$= -\left[S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{\partial d_1}{\partial \tau} + rXe^{-r\tau}N(d_2) - Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\frac{\partial d_2}{\partial \tau}\right]$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{Se^{-\frac{d_1^2}{2}}\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rXe^{-r\tau}N(d_2) < 0 \tag{3.3.26}$$

和

$$\Theta_p = \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{\partial c}{\partial \tau} + rXe^{-r\tau} \text{ (由看跌和看涨期权的平价关系)}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{Se^{-\frac{d_1^2}{2}}\sigma}{2\sqrt{\tau}} + rXe^{-r\tau}N(-d_2). \tag{3.3.27}$$

在 1.2 节中, 推出长期的美式期权比短期的美式期权更有价值. 因为一个不支付红利资产的美式看涨期权将不提前实施, 上述性质对不支付红利资产的欧式看涨期权也成立, 而 $\frac{\partial c}{\partial t}$ 的值为负数也证实了上述论断. 因为期权在极短的时间内可以是实值或虚值, 所以当看涨期权处于平值时, Θ 取最大绝对值, 而且因为期权不可能在以后时间里处于实值, 所以当期权完全处于虚值状态时, Θ 的绝对值很小. 此外, 当 S 充分大时, Θ 的极限渐近趋于 $-rXe^{-r\tau}$. 欧式看涨期权价格的 Θ 与资产价格 S 之间的变化关系如图 3.5 所示.

欧式看跌期权的 Θ 值的符号可以是正的或负的, 取决于式 (3.3.27) 中有相反符号的两项的相对大小. 当看跌期权完全处于实值状态时, S 可以看成是一个很小的值, 因此, $N(-d_2)$ 趋于 1. 在这种情况下, 因为第二项比第一项更重要, 所以 Θ 取正值. 当 S 充分小时, 欧式看跌期权的价格低于内在价值 $X - S$, 因此, 在到期日趋于 $X - S$, 从而 Θ 为正值, 与所观察到的一致. 另一方面, 当期权处于平值或虚值, 且到期日的时间延长时, 看跌期权将有更多的机会获得一个正的收益. 因此, 欧式看跌期权价格是 t 的一个减函数, 从而 $\frac{\partial p}{\partial t} < 0$. 对美式看跌期权, 相应的 Θ 值

总是负的，这是因为更长时期的美式看跌期权总是比更短时期的美式看跌期权更有价值.

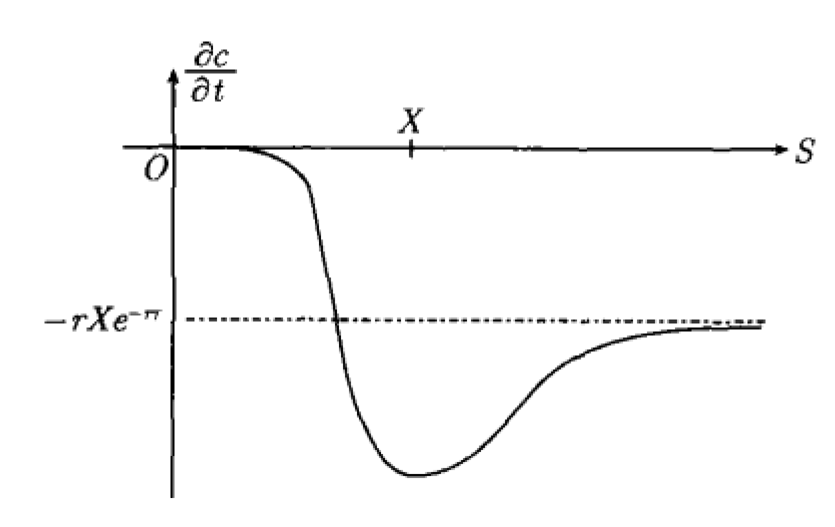


图 3.5　欧式看涨期权价格的 Θ 与资产价格 S 之间的变化关系，当资产价格充分大时，Θ 值的极限从左边渐近趋于 $-rXe^{-r\tau}$

事实上，欧式看跌期权的 Θ 值的符号性质是相当复杂的．它的完全分析将在习题 3.15 中给出.

5. Γ 关于资产价格的二阶导数

衍生证券价格 V 的 Γ (gamma) 值定义为关于资产价格 S 的变化率，即 $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$．因为欧式看涨和看跌期权的 Δ 值只相差一个常数，所以它们的 Γ 是相同的．欧式看涨和看跌期权价格的 Γ 值为

$$\Gamma_p = \Gamma_c = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S\sigma\sqrt{2\pi\tau}} > 0. \tag{3.3.28}$$

Γ_c 关于 S 的曲线类似于一个在 S 轴上方，中心在 $S = X$ 的稍微向上凸的曲线．由于对任意欧式看涨或看跌期权的 Γ 总是正的，所以这就可以解释为什么关于资产价格的期权价格曲线图形总是向上凹的．从积分中得知，当期权价值曲线的曲率比较小时，Γ 的值也很小，而 Γ 的一个小的值意味着 Δ 随资产价格慢慢地改变．因此，投资组合的调整需要保持投资组合的 Δ 中性被频繁地减少.

6. Λ 关于波动率的导数

在 Black-Scholes 模型中，假设标的资产价格过程的波动率是一个常数．在现实生活中，资产价格的波动率是随时间变化的．有时弄清期权价值怎样随波动率价值而变化是有趣的．衍生证券价格的 Λ (vega) 值定义为衍生证券价格关于资产价格波动率的变化率．对欧式标准看涨和看跌期权，它们的 Λ 值分别为

$$\Lambda_c = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = SN'(d_1)\,\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Xe^{-r\tau}N'(d_2)\,\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{S\sqrt{\tau}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0 \tag{3.3.29}$$

和

$$\Lambda_p = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial c}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma}(Xe^{-r\tau} - S) = \Lambda_c. \tag{3.3.30}$$

上述结果表明, 欧式看涨和看跌期权价格是随着波动率的增长而增长的. 资产价格波动率的增加将导致最终资产价格的波动范围. 因此, 期权完全处于实值或虚值的概率将变大. 然而, 当期权完全处于虚值时, 最终罚金并未增加. 相反, 当期权到期完全处于实值时, 收益会增加. 由于这个收益模式是不对称的, 所以任何期权的 Λ 值总是正的.

7. ρ 关于利率的导数

一个较高的银行利率可以降低到在到期日实施欧式看涨期权所花成本的现值(其效果类似于降低敲定价格), 同时它也使看涨期权的价格有所增长. 相反的效果对看跌期权也是成立的. 衍生证券价格的 ρ (rho) 值定义为衍生证券价格关于利率的变化率. 欧式看涨和看跌期权的 ρ 值分别为

$$\begin{aligned}\rho_c &= \frac{\partial c}{\partial r} = SN'(d_1)\,\frac{\partial d_1}{\partial r} + \tau X e^{-r\tau} N(d_2) - Xe^{-r\tau}N'(d_2)\,\frac{\partial d_2}{\partial r} \\ &= \tau X e^{-r\tau} N(d_2) > 0 \quad \text{对 } r > 0 \text{ 和 } X > 0\end{aligned} \tag{3.3.31}$$

以及

$$\begin{aligned}\rho_p &= \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial r} - \tau X e^{-r\tau} \quad (\text{由看跌和看涨期权的平价关系}) \\ &= -\tau X e^{-r\tau} N(-d_2) < 0 \quad \text{对 } r > 0 \text{ 和 } X > 0.\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

ρ_c 和 ρ_p 的符号表明, 上述关于看涨和看跌期权价格对利率变化的影响是对的.

3.4 推广的期权定价模型

在本节中, 首先表明怎样通过放松模型中的某些假设条件来推广原来的 Black-Scholes 公式. 通常的情况是资产分段或连续支付**红利**(dividends). 试着对已知的微分方程和包含连续 (离散) 支付红利的定价公式进行修改, 也提出了求解依赖于时间参数的期权定价模型的解析方法, 推出标的资产是期货合约的**期货期权**(futures options) 的定价公式. 也考虑**选择期权**(chooser option) 的定价, 它有这样的特征, 在从期权合约生效后的某一个特定时期后, 持有者可以选择持有的期权是看涨或看跌期权. 在本节也分析了其他的定价模型, 包括复合期权和双币种期权的定价模型. 复合期权是关于期权的期权, 而双币种期权是一个关于外国资产但期权收益是由本国货币结算的期权. 此外, 利用期权定价理论, 考虑分析风险债务的信用风险结构的结构化方法. 关于公司价值过程的最终价值, 债务持有者在到期日的支付是未定的.

3.4.1 分红资产的期权

持有标的资产所得的红利可能是随机的或确定的. 因为除资产价格之外, 必须假设红利是另外一个随机状态变量, 所以随机红利模型是更复杂的. 这里假设红利是确定的, 可能是一个相当容易接受的假设. 关于资产价格红利的影响如何呢? 利用无套利原理, 在除息日后, 资产价格由于减少了与红利相同的数量而跌落到适当的位置 (见 1.2.1 小节).

1. 连续红利率模型

首先, 考虑连续红利率对欧式看涨期权价格的影响. 设 q 表示由标的资产支付的常数连续红利率, 即经过 dt 时间段后, 持有者收到美元数量为 qS_tdt 的红利, 其中 S_t 表示资产价格. 资产价格的动态假设服从几何布朗过程

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \tag{3.4.1}$$

其中 μ 和 σ^2 分别表示资产价格的期望回报率和方差率. 为了推导欧式看涨期权价格函数 $c(S_t, t)$ 满足的微分方程, 通过卖出一份欧式看涨期权和买进 Δ_t 份标的资产来构造一个无风险对冲的投资组合. 该投资组合在 t 时刻的财务收益为

$$\begin{aligned}
&\int_0^t -dc + \int_0^t \Delta_u dS_u + q\int_0^t \Delta_u S_u du \\
=&\int_0^t \left\{-\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2}S_u^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2} + \left[\left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u}\right)\mu + q\Delta_u\right]S_u\right\}du \\
&+\int_0^t \left(\Delta_u - \frac{\partial c}{\partial S_u}\right)\sigma S_u dZ_u.
\end{aligned}$$

最后一项 $q\int_0^t \Delta_u S_u du$ 表示由于收到支付的红利加入到投资组合中而得到的收益. 通过选择 $\Delta_u = \dfrac{\partial c}{\partial S_u}$ 消去了随机项, 因此, 财务收益最终是确定的. 另一方面, 具有 $-c + \Delta_u S_u = -c + \dfrac{\partial c}{\partial S_u}S_u$ 动态定位的无风险资产, 其确定收益为

$$\int_0^t r\left(-c + S_u\frac{\partial c}{\partial S_u}\right)du.$$

根据无套利原理, 这两个收益是等价的. 令上述两个收益相等, 如果 $c(S,t)$ 满足下列修正的 Black-Scholes 方程:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0, \tag{3.4.2}$$

则得到对任何资产价格 S_u 满足

$$-\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\sigma^2}{2}S_u^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_u^2}+qS\frac{\partial c}{\partial S_u}=r\left(-c+S_u\frac{\partial c}{\partial S_u}\right),\quad 0<u<t.$$

关于连续支付红利的欧式看涨期权的最终收益与不支付红利相对应的情形是相同的.

风险中性漂移率

从修正的 Black-Scholes 方程 (3.4.2) 中推得支付红利率为 q 的资产价格过程的风险中性漂移率是 $r-q$. 也可以通过鞅定价方法来证明这个结论. 假设所有收到的红利率都用来购买追加份额的标的资产, 那么最初持有一份标的资产的财富过程为

$$\widehat{S}_t=e^{qt}S_t,$$

其中 e^{qt} 表示份额的增长因子. 假设 S_t 服从式 (3.4.1) 中定义的价格动态, 那么财富过程 $\widehat{S}_t$ 服从

$$\frac{d\widehat{S}_t}{\widehat{S}_t}=(\mu+q)dt+\sigma dZ_t.$$

贴现的财富过程 $\widehat{S}_t^*=\widehat{S}_t/S_0(t)$ 在等价风险中性测度 Q 下是一个鞅. 这相当于在贴现财富过程 $\widehat{S}_t^*$ 是一个 Q 鞅下求 Q. 在 Radon-Nikodym 导数中, 选取 $\gamma(t)$ 为

$$\gamma(t)=\frac{\mu+q-r}{\sigma}.$$

因此, 在 Q 下, $\widehat{Z}_t$ 是一个布朗过程, 并且

$$d\widehat{Z}_t=dZ_t+\frac{\mu+q-r}{\sigma}dt.$$

现在 $\widehat{S}_t^*$ 成为一个 Q 鞅, 因为

$$\frac{d\widehat{S}_t^*}{\widehat{S}_t^*}=\sigma d\widehat{Z}_t.$$

在等价风险中性测度 Q 下, 资产价格 S_t 满足

$$\frac{dS_t}{S_t}=(r-q)dt+\sigma d\widehat{Z}_t. \tag{3.4.3}$$

因此, 推导出 S_t 的风险中性漂移率为 $r-q$.

类推到外汇期权

连续收益模型也可以应用到**外汇期权**(options on foreign currencies), 这里连续红利收益可以看成是由于以外国利率 r_f 通过外汇获得的利息收益. 在一个外汇看涨期权的定价模型和修正的 Black-Scholes 方程中 (见式 (3.4.2)), 可以简单地假设 $q=r_f$. 这与在本国等价鞅测度 Q_d 下汇率过程的风险中性漂移率为 $r-r_f$ 的观察是一致的 (见式 (3.2.20)).

2. 看涨–看跌期权的定价公式

如果在修正的 Black-Scholes 方程 (3.4.2) 中, 令 $\widehat{S} = Se^{-q\tau}$, $\tau = T - t$, 则方程变为

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\widehat{S}^2\frac{\partial^2 c}{\partial \widehat{S}^2} + r\widehat{S}\frac{\partial c}{\partial \widehat{S}} - rc.$$

根据 $\widehat{S}$, 欧式看涨期权的最终收益为 $\max(\widehat{S} - X, 0)$. 通过如下方式对 Black-Scholes 看涨期权定价公式 (3.3.6) 的简单修正, 得到连续支付红利资产的欧式看涨期权的价格: 在定价公式中, 将 S 换成 $Se^{-q\tau}$. 于是, 连续支付红利率为 q 的欧式看涨期权定价公式为

$$c = Se^{-q\tau}N(\widehat{d_1}) - Xe^{-r\tau}N(\widehat{d_2}), \tag{3.4.4}$$

其中

$$\widehat{d_1} = \frac{\ln\dfrac{S}{X} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad \widehat{d_2} = \widehat{d_1} - \sigma\sqrt{\tau}.$$

类似地, 连续红利率为 q 的欧式看跌期权公式可以从 Black-Scholes 看跌期权定价公式中推出

$$p(S,\tau) = Xe^{-r\tau}N(-\widehat{d_2}) - Se^{-q\tau}N(-\widehat{d_1}). \tag{3.4.5}$$

看跌–看涨期权的平价和对称关系

注意到新的看跌和看涨期权的定价公式满足看跌–看涨期权的平价关系 (见式 (1.2.24))

$$p(S,\tau) = c(S,\tau) - Se^{-q\tau} + Xe^{-r\tau}, \tag{3.4.6}$$

而且下面的**看跌–看涨期权对称关系**(put-call symmetry relation) 也可以从上述看涨和看跌期权的定价公式中导出:

$$c(S,\tau;X,r,q) = p(X,\tau;S,q,r), \tag{3.4.7}$$

也就是说, 在公式中将 S 与 X, r 与 q 交换, 由相应的看涨期权定价公式就可以得出看跌期权的价格.

为了给出隐含在看跌–看涨期权对称关系中的直观感, 回顾一个看涨期权赋予持有者将无风险资产转换成风险资产的权利, 对看跌期权反之也成立. 当无风险资产的利率为 r 时, 风险资产的红利率为 q. 如果在看涨期权中交换无风险资产和风险资产的角色, 那么看涨期权就成为看跌期权, 因此, 这就给出了看跌–看涨期权对称关系的一个论证.

外汇期权的看涨和看跌期权定价公式完全模拟了上述定价公式, 其中红利率 q 用外国利率 r_f 来代替 (Garman and Kohlhagen, 1983). 因此, 资产价格过程 S_t 用汇率 F_t 来代替, 其中 F_t 表示一个单位的外汇货币在 t 时刻的本国货币价格.

3. 依赖时间的参数

到目前为止, 已经假设红利率、利率和波动率为常数. 当这些参数是时间的确定函数时, Black-Scholes 方程必须修改为如下形式:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2(\tau)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + [r(\tau) - q(\tau)] S \frac{\partial V}{\partial S} - r(\tau) V, \quad 0 < S < \infty, \ \tau > 0, \tag{3.4.8}$$

其中 V 为衍生证券的价格. 当利用下面的变换时:

$$y = \ln S \quad 和 \quad w = e^{\int_0^\tau r(u)du} V,$$

式 (3.4.8) 可化为

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2(\tau)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[r(\tau) - q(\tau) - \frac{\sigma^2(\tau)}{2} \right] \frac{\partial w}{\partial y}, \quad -\infty < y < \infty, \quad \tau > 0. \tag{3.4.9}$$

考虑下面的解析基本解:

$$f(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\tau)}} \exp\left(-\frac{[y + e(\tau)]^2}{2s(\tau)} \right). \tag{3.4.10}$$

可以证明 $f(y, \tau)$ 满足下面的微分方程:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{2} s'(\tau) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + e'(\tau) \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{3.4.11}$$

假设令

$$s(\tau) = \int_0^\tau \sigma^2(u) du,$$

$$e(\tau) = \int_0^\tau [r(u) - q(u)] du - \frac{s(\tau)}{2},$$

比较式 (3.4.9), (3.4.11), 就能导出方程 (3.4.9) 的基本解为

$$\phi(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \int_0^\tau \sigma^2(u) du}} \exp\left(-\frac{\left\{ y + \int_0^\tau \left[r(u) - q(u) - \frac{\sigma^2(u)}{2} \right] du \right\}^2}{2 \int_0^\tau \sigma^2(u) du} \right). \tag{3.4.12}$$

给出初始条件 $w(y, 0)$, 则方程 (3.4.9) 的解可以表示为

$$w(y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi, 0) \phi(y - \xi, \tau) d\xi. \tag{3.4.13}$$

注意到依赖于时间的系数 $r(\tau), q(\tau)$ 和 $\sigma^2(\tau)$ 将不影响关于 ξ 的空间积分. 积分的结果将与从常系数模型中得到的解析形式是类似的, 除非在期权定价公式中用下面的值分别代替：

$$r \text{ 替换成 } \frac{1}{\tau}\int_0^\tau r(u)du,$$

$$q \text{ 替换成 } \frac{1}{\tau}\int_0^\tau q(u)du,$$

$$\sigma^2 \text{ 替换成 } \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sigma^2(u)du.$$

例如, 当期权定价模型中有依赖于时间的参数时, 欧式看涨期权的定价公式修改如下：

$$c = Se^{-\int_0^\tau q(u)\,du}\,N(\widetilde{d}_1) - Xe^{-\int_0^\tau r(u)\,du}N(\widetilde{d}_2), \tag{3.4.14}$$

其中

$$\widetilde{d}_1 = \frac{\ln\dfrac{S}{X} + \displaystyle\int_0^\tau \left[r(u) - q(u) + \frac{\sigma^2(u)}{2}\right]du}{\sqrt{\displaystyle\int_0^\tau \sigma^2(u)du}}, \quad \widetilde{d}_2 = \widetilde{d}_1 - \sqrt{\int_0^\tau \sigma^2(u)du}.$$

欧式看跌期权的定价公式可以用类似的方式导出. 总之, Black-Scholes 看涨和看跌期权公式也可以用到依赖于时间参数的模型中, 除了在整个期权的剩余生存期内, Black-Scholes 公式中的利率 r, 红利率 q 和方差 σ^2 分别被对应的瞬时利率、红利率和方差的平均值所代替.

4. 离散分红

假设标的资产在已知的支付时间 $t_1, t_2, \cdots, t_N$ 分别离散支付 N 次数量为 D_1, $D_2, \cdots, D_N$ 的美元红利. 对离散支付已知红利期权的定价取通常的假设, 即资产价格由两部分组成：在期权的有效期内用来支付已知红利的无风险部分和服从几何布朗过程的风险部分. 在给定的时间内, 无风险部分是从除息日到现在以无风险利率贴现的所有远期红利的现值. 因此, 通过令资产价格等于风险部分的价格, 并且波动率参数服从风险资产的随机过程波动率 (这里与整个资产服从的过程稍微不同), 可以运用 Black-Scholes 公式. 风险资产 $\widetilde{S}_t$ 的价值为

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_t &= S_t - D_1e^{-r\tau_1} - D_2e^{-r\tau_2} - \cdots - D_Ne^{-r\tau_N} \quad \text{对 } t < t_1,\\
\widetilde{S}_t &= S_t - D_2e^{-r\tau_2} - \cdots - D_Ne^{-r\tau_N} \quad \text{对 } t_1 < t < t_2,\\
&\vdots\\
\widetilde{S}_t &= S_t \quad \text{对} t > t_N,
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

其中 S_t 为当前的资产价格, $\tau_i = t_i - t\ (i = 1, 2, \cdots, N)$. 习惯上, 取风险资产的波动率近似等于整个资产价格的波动率乘以因子 $\dfrac{S_t}{S_t - D}$, 其中 D 为整个远期离散红利的现值.

值得注意的是, 资产价格不会由于税收和其他的原因而降低整个红利那样的数量. 在上述讨论中, "红利" 可以广泛地解释为在除息日由红利引起的资产价格下降, 而不是支付红利的实际数量.

3.4.2 期货期权

在一个期货期权中, 标的资产是期货合约. 当一个期货看涨期权实施时, 持有者依据标的期货合约从期权出售者那里获得多头和加上一个等于高出敲定价格的即时期货价格超额部分的现金流. 由于最开始的期货合约的价值为零, 所以在实施日之前期货合约的价值等于上述的现金流. 例如, 假设一份关于黄金 10000 盎司的 10 月份期货看涨期权的敲定价格是每盎司 340 美元. 在期权的到期日 (如 8 月 15 日), 即时黄金期货价格为每盎司 350 美元, 依据期货合约加上一个在 10 月份交割日买入 10000 盎司的黄金多头, 那么期货看涨期权持有者得到 $100000 = 10000 \times (350 - 340)$(美元). 如果期权持有者选定, 则期货合约的多头立即不计成本地被抛售. 期货合约和标的期货的到期日可能或不可能一致. 注意期货的到期日不应该比期权的到期日更早.

因为期货合约比标的资产更灵活且更容易交易, 所以期货期权的交易比关于标的资产期权的交易更受欢迎. 期货和期货期权经常在同一个交易所交易. 大多数期货期权是以现金形式交易的, 而不是以标的期货交割. 对于大部分的商品和债券, 期货价格可以很容易地从期货交易所得到, 然而, 商品或债券的即时价格必须通过经销商获得.

在 Black-Scholes-Merton 公式的基础上, 希望推导出期货期权价格满足的微分方程. 假设利率是**常数**(constant), 标的资产价格动态服从几何布朗过程. 在常数利率下, 期货价格是资产价格的确定时间函数, 因此, 期货价格的波动率和标的资产价格是一样的. 写出期货价格 f_t 的动态方程为

$$\frac{df_t}{f_t} = \mu_f\, dt + \sigma\, dZ_t, \tag{3.4.16}$$

其中 μ_f 为期货的期望回报率, σ 为资产价格过程的常数波动率. 令 $V(f_t, t)$ 表示期货期权的价格. 现在, 考虑一个包含 α_t 份期货的多头和一份期货期权空头的投资组合, 其中 α_t 动态地调整使得始终创造一个投资组合的瞬时对冲 (无风险) 多头. 因为讨论期货合约不产生成本, 所以投资组合 Π 的价值为

$$\Pi(f_t, t) = -V(f_t, t),$$

需要注意的是, 投资组合的价值也可以从净额为 $\int_0^t \alpha_u df_u$ 的期货多头中获得. 利用 Itô引理得到

$$dV(f_t,t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} f_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial f_t^2} + \mu_f f_t \frac{\partial V}{\partial f_t}\right) dt + \sigma f_t \frac{\partial V}{\partial f_t} dZ_t.$$

在 t 时刻投资组合的财务收入为

$$\begin{aligned}&\int_0^t -dV(f_u,u)du + \int_0^t \alpha_u df_u \\ &= \int_0^t \left[-\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} f_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial f_u^2} + \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial f_u}\right)\mu_f f_u\right] du + \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial f_u}\right)\sigma f_u dZ_u.\end{aligned}$$

在任何时刻 u, 持有的期货份额数量动态地平衡, 使得投资组合中的财务收益始终是确定的. 这可以通过下列明智的选择得到:

$$\alpha_u = \frac{\partial V}{\partial f_u}.$$

在这种情况下, 从这个动态对冲组合中的确定财务收益为

$$\int_0^t \left(-\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\sigma^2}{2} f_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial f_u^2}\right) du.$$

为了避免套利, 上述确定收益应该与来自一个价值等于 $-V$ 动态份额的无风险资产收益是相同的. 假如 $V(f,t)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} f^2 \frac{\partial^2 V}{\partial f^2} - rV = 0, \tag{3.4.17}$$

那么这两个确定收益是相同的.

当将方程 (3.4.17) 与一个关于连续支付红利率为 q 的资产的欧式期权价格所对应的方程比较时, 在方程 (3.4.2) 中令 $q = r$ 就可以得到方程 (3.4.17). 回忆在风险中性测度下, 连续支付红利资产的期望增长率是 $r - q$, 因此, “$q = r$” 显然意味着期货价格过程的零漂移率. 在风险中性测度 Q 下, f_t 是一个鞅. 此外, 利用关系式 $f_t = e^{r(T-t)} S_t$ 且已知 S_t 的风险中性漂移率为 r, 可以用 Itô引理证明 f_t 的风险中性漂移率为零.

在连续支付红利资产的欧式期货看涨和看跌期权的定价公式中, 通过简单退换 $q = r$, 可以得到欧式期货看涨和看跌期权的价格. 因此, 欧式期货看涨和看跌期权的价格为 (Black, 1976)

$$c(f,\tau;X) = e^{-r\tau}\left[fN(\widetilde{d}_1) - XN(\widetilde{d}_2)\right] \tag{3.4.18}$$

和

$$p(f,\tau;X) = e^{-r\tau}\left[XN(-\widetilde{d}_2) - fN(-\widetilde{d}_1)\right], \tag{3.4.19}$$

其中

$$\widetilde{d}_1 = \frac{\ln\dfrac{f}{X} + \dfrac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad \widetilde{d}_2 = \widetilde{d}_1 - \sigma\sqrt{\tau}, \quad \tau = T - t,$$

f 和 X 分别为当前期货价格和期权的敲定价格, τ 为距离到期日的时间. 对应的看涨–看跌期权平价关系为

$$p(f,\tau;X) + fe^{-r\tau} = c(f,\tau;X) + Xe^{-r\tau}. \tag{3.4.20}$$

因为任何资产的期货价格与期货到期日的现货价格都是相同的, 所以当期权和期货合约被设为有相同的到期日时, 欧式期货期权必定与标的资产相应的欧式期权价格是相同的. 注意到 τ 是期货期权距离到期日的时间, 当期货期权和标的期货合约被设为有相同的到期日时, 期货价格等于 $f = Se^{r\tau}$. 如果将 $f = Se^{r\tau}$ 代入到方程 (3.4.18), (3.4.19) 中, 那么获得的定价公式将成为通常的欧式标准期权的 Black-Scholes 定价公式.

在常数利率的假设下, 由于期货价格和远期价格是相等的, 所以期货期权的定价公式和它的远期期权的相应部分是完全相同的. 如果利率是随机的, 则在期货合约的逐日盯市技巧下, 由于中介支付, 远期价格和期货价格是不同的. 在随机利率环境下, 期货和远期的价格动态以及关于期货和远期的价格模型的详细情形将在 8.1 节中讨论.

3.4.3 选择期权

一个标准的**选择期权**(chooser option)(或称为**任选期权**(as-you-like-it)) 是指在未来的某个确定时间 T_c, 在距到期日为 $T - T_c$ 的剩余时间里, 持有者有选择到期日为 T 的期权是敲定价格为 X 的标准欧式看涨还是看跌期权的权利. 在选择的 T_c 时刻, 选择期权的收益为

$$V(S_{T_c}, T_c) = \max(c(S_{T_c}, T - T_c; X), p(S_{T_c}, T - T_c; X)), \tag{3.4.21}$$

其中在上述看涨和看跌期权的定价公式中, $T - T_c$ 为距到期日的时间, S_{T_c} 为 T_c 时刻的资产价格. 为叙述方便起见, 取当前时刻为零. 假定标的资产以红利率 q 支付红利. 利用看跌–看涨期权的平价公式, 上述收益函数可以写成

$$\begin{aligned} V(S_{T_c}, T_c) &= \max(c, c + Xe^{-r(T-T_c)} - S_{T_c}e^{-q(T-T_c)}) \\ &= c + e^{-q(T-T_c)}\max(0, Xe^{-(r-q)(T-T_c)} - S_{T_c}). \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

因此，选择期权与一个实施价格为 X 和到期日为 T 的看涨期权以及敲定价格为 $Xe^{-(r-q)(T-T_c)}$ 和到期日为 T_c 的 $e^{-q(T-T_c)}$ 份看跌期权的组合是等价的. 利用 Black-Scholes-Merton 定价方法，在当前时刻，标准选择期权的价值为 (Rubinstein, 1992)

$$\begin{aligned} V(S,0) &= Se^{-qT}N(x) - Xe^{-rT}N(x-\sigma\sqrt{T}) + e^{-q(T-T_c)} \\ &\quad \times [Xe^{-(r-q)(T-T_c)}e^{-rT_c}N(-y+\sigma\sqrt{T_c}) - Se^{-qT_c}N(-y)] \\ &= Se^{-qT}N(x) - Xe^{-rT}N(x-\sigma\sqrt{T}) \\ &\quad + Xe^{-rT}N(-y+\sigma\sqrt{T_c}) - Se^{-qT}N(-y), \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

其中 S 为当前的资产价格，

$$x = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad y = \frac{\ln\frac{S}{X} + (r-q)T + \frac{\sigma^2}{2}T_c}{\sigma\sqrt{T_c}}.$$

选择期权的更多外来收益结构的定价模型将在习题 3.26 和习题 3.27 中考虑.

3.4.4 复合期权

复合期权可以简单地理解为**期权的期权**(an option on an option). 复合期权有 4 种主要类型，即看涨的看涨期权、看跌的看涨期权、看涨的看跌期权和看跌的看跌期权. 复合期权有两个敲定价格和两个到期日. 作为一个例证，考虑都是欧式看涨的看涨期权. 在第一个到期日 T_1 时，复合期权的持有者有权利以第一个敲定价格 X_1 购买标的看涨期权. 该标的看涨期权又给予持有者在后面的到期日 T_2 时以敲定价格 X_2 购买标的资产的权利. 令 $c(S,t)$ 表示复合看涨的看涨期权价格，其中 S 为当前时刻 t 的资产价格. 在第一个到期日 T_1 时，标的看涨期权的价格为 $\widetilde{c}(S_{T_1},T_1)$，其中 S_{T_1} 为 T_1 时刻的资产价格. 注意到复合期权只有当 $\widetilde{c}(S_{T_1},T_1) > X_1$ 时才会在 T_1 时刻实施.

运用通常的 Black-Scholes-Merton 定价理论，希望推导出欧式看涨的看涨期权的解析定价公式. 首先，根据 Black-Scholes 看涨期权定价公式，在 T_1 时刻，标的看涨期权的价格为

$$\widetilde{c}(S_{T_1},T_1) = S_{T_1}N(d_1) - X_2e^{-r(T_2-T_1)}N(d_2), \tag{3.4.24}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_{T_1}}{X_2} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_2-T_1)}{\sigma\sqrt{T_2-T_1}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_2-T_1}.$$

令 $\widetilde{S}_{T_1}$ 表示 S_{T_1} 的临界值, 复合期权在 T_1 时刻实施. 通过求解下述非线性代数方程, 得到 $\widetilde{S}_{T_1}$ 的值为

$$\widetilde{c}(\widetilde{S}_{T_1}, T_1) = X_1. \tag{3.4.25}$$

在 T_1 时刻, 复合看涨的看涨期权的收益函数为

$$c(S_{T_1}, T_1) = \max(\widetilde{c}(S_{T_1}, T_1) - X_1, 0). \tag{3.4.26}$$

当 $t < T_1$ 时, 复合期权的价格可以通过下列风险中性定价计算得出, 其中

$$\begin{aligned} c(S,t) &= e^{-r(T_1-t)} E_Q[\max(\widetilde{c}(S_{T_1}, T_1) - X_1, 0)] \\ &= e^{-r(T_1-t)} \int_0^\infty \max(\widetilde{c}(S_{T_1}, T_1) - X_1, 0)\ \psi(S_{T_1}; S) dS_{T_1} \\ &= e^{-r(T_1-t)} \int_{\widetilde{S}_{T_1}}^\infty [S_{T_1} N(d_1) \\ &\quad - X_2 e^{-r(T_2-T_1)} N(d_2) - X_1] \psi(S_{T_1}; S) dS_{T_1}, \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

Q 表示风险中性测度, 转移密度函数 $\psi(S_{T_1}; S)$ 由式 (3.3.10) 给出. 在式 (3.4.27) 中的最后一项可以容易地看成

$$\text{第 3 项} = -X_1 e^{-r(T_1-t)} E_Q[\mathbf{1}_{\{S_{T_1} \geqslant \widetilde{S}_{T_1}\}}] = -X_1 e^{-r(T_1-t)} N(a_2),$$

其中

$$a_2 = \frac{\ln \dfrac{S}{\widetilde{S}_{T_1}} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T_1 - t)}{\sigma\sqrt{T_1 - t}},$$

$X_1 e^{-r(T_1-t)} N(a_2)$ 表示在第一个看涨期权已经实施的条件下 T_1 时刻期望收益的现值.

如果定义随机变量 Y_1 和 Y_2 分别为价格比率 $\dfrac{S_{T_1}}{S}$ 和 $\dfrac{S_{T_2}}{S}$ 的对数, 则在重叠区间 $[t, T_1]$ 和 $[t, T_2]$ 内, Y_1 和 Y_2 分别是布朗增量. 方程 (3.4.27) 的第 2 项可以表述为

$$\begin{aligned} \text{第 2 项} &= -X_2 e^{-r(T_2-t)} E_Q[\mathbf{1}_{\{S_{T_1} \geqslant \widetilde{S}_{T_1}\}} \mathbf{1}_{\{S_{T_2} \geqslant X_2\}}] \\ &= -X_2 e^{-r(T_2-t)} Q\left(Y_1 \geqslant \ln \frac{\widetilde{S}_{T_1}}{S}, Y_2 \geqslant \ln \frac{X_2}{S}\right). \end{aligned}$$

为了估计上述概率, 有必要找出 Y_1 和 Y_2 的联合密度函数. Y_1 和 Y_2 的相关系数为 (见式 (2.3.16))

$$\rho = \sqrt{\frac{T_1 - t}{T_2 - t}}. \tag{3.4.28}$$

布朗增量 Y_1 和 Y_2 是两个变量的正态分布，它们各自的均值分别为 $\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T_1-t)$ 和 $\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T_2-t)$，各自的方差分别为 $\sigma^2(T_1-t)$ 和 $\sigma^2(T_2-t)$，此时的相关系数 ρ 由式 (3.4.28) 给出. 假设定义标准正态随机变量 Y_1' 和 Y_2' 为

$$Y_1'=\frac{Y_1-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}} \quad 和 \quad Y_2'=\frac{Y_2-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T_2-t)}{\sigma\sqrt{T_2-t}},$$

并且令

$$b_2=\frac{\ln\frac{S}{X_2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T_2-t)}{\sigma\sqrt{T_2-t}},$$

那么可以将第 2 项写成下述形式：

$$\begin{aligned}第\ 2\ 项&=-X_2e^{-r(T_2-t)}\int_{-a_2}^{\infty}\int_{-b_2}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(\frac{-y_1'^2-2\rho y_1'y_2'+y_2'^2}{2(1-\rho^2)}\right)dy_2'dy_1'\\&=-X_2e^{-r(T_2-t)}N_2(a_2,b_2;\rho),\end{aligned}$$

其中 $N_2(a_2,b_2;\rho)$ 是相关系数为 ρ 的标准双变量正态分布函数. 注意到 $N_2(a_2,b_2;\rho)$ 可以解释为在 T_1 时刻 $S_{T_1}>\widetilde{S}_{T_1}$ 且在 T_2 时刻 $S_{T_2}>X_2$ 时的概率，而在 t 时刻的资产价格为 S. 因此，$X_2e^{-r(T_2-t)}N_2(a_2,b_2;\rho)$ 表示两个看涨期权在它们各自的到期日均实施的条件下，在 T_2 时刻期望收益的现值.

考虑式 (3.4.27) 中的第 1 项，

$$第\ 1\ 项=e^{-r(T_1-t)}\int_{\widetilde{S}_{T_1}}^{\infty}S_{T_1}N(d_1)\psi(S_{T_1};S)dS_{T_1},$$

根据习题 3.28 中的解题步骤概述，可以证明

$$第\ 1\ 项=SN_2(a_1,b_1;\rho),$$

其中

$$a_1=a_2+\sigma\sqrt{T_1-t} \quad 和 \quad b_1=b_2+\sigma\sqrt{T_2-t}.$$

结合上述结果，欧式看涨的看涨复合期权的价格为

$$c(S,t)=SN_2(a_1,b_1;\rho)-X_2e^{-r(T_2-t)}N_2(a_2,b_2;\rho)-X_1e^{-r(T_1-t)}N(a_2), \tag{3.4.29}$$

其中包含在 a_2 中的临界资产价格 $\widetilde{S}_{T_1}$ 可以在求解式 (3.4.25) 中得到.

以类似的方式, 欧式看跌的看跌期权的价格为

$$\begin{aligned} p(S,t) =& e^{-r(T_1-t)} \int_0^{\widetilde{S}_{T_1}} \{X_1 - [X_2 e^{-r(T_2-T_1)} N(-d_2) - S_{T_1} N(-d_1)]\} \\ & \times \psi(S_{T_1}; S) dS_{T_1} \\ =& X_1 e^{-r(T_1-t)} N(-a_2) - X_2 e^{-r(T_2-t)} N_2(-a_2, -b_2; \rho) \\ & + S N_2(-a_1, -b_1; \rho), \end{aligned} \tag{3.4.30}$$

其中 $\widetilde{S}_{T_1}$ 为在 T_1 时刻实施且小于 S_{T_1} 的第一个看跌期权的临界值.

Geske(1979) 首次运用复合期权模型给出了一个公司的股票期权的价格, 这里假设公司是可以违约的. 公司债务由债券持有者和股票持有者对未来现金流的债务所组成. 一旦公司违约, 普通股票持有者有权利, 但不负有义务向债券持有者以等于债券面值的敲定价格出售整个公司. 因为实施期权所得到的股票可以看成为公司价值的期权, 因此, 一份普通股票的期权可以看成是一个复合期权.

3.4.5 风险债务的 Merton 模型

Black 和 Scholes (1973) 以及 Merton (1974) 在他们的经典论文中, 运用期权定价理论引入评估公司风险债务的未定权益的方法. 在他们的方法中, 当发行者公司资产的市场价值下降到一个低水平, 以至发行者在到期日无法以票面价值支付时, 违约事件发生. 发行者关于它的债务违约本质上拥有一种选择权. 当公司的资产价值少于总债务时, 债务持有者只能得到公司的价值. 在文献中, 用公司的价值作为确定违约的基本状态变量的方法称为**结构化方法**(structural approach) 或**公司价值方法**(firm value approach). 为了运用结构化方法分析风险债务的信用风险结构, 有必要结合公司资本结构的信息来刻画发行者公司的价值过程.

在 Merton 的风险债务模型中, 首先假设债务发行者的公司自身的资产价值 A_t 服从几何布朗过程

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu_A dt + \sigma dZ_t, \tag{3.4.31}$$

其中 μ_A 为瞬时回报率的期望值, σ 为公司资产价值过程的波动率. 假设公司的一个简单资本结构, 其中公司的债务仅仅由面值为 F 的单一债券组成. 债务只具有零息票, 而没有期权的特征. Merton 考虑到债务作为公司资产的未定权益. 在债务的到期日, 支付给债务持有者的将是面值 F 的最小值和在到期日公司的价值 A_T. 违约只在到期日和 $A_T < F$ 时发生, 也就是说, 公司资产价值达不到它的债权债务. 因此, 公司以零成本清算且所有的收益清算将转给债务持有者. 债务持有者的最终收益可以表示为

$$\min(A_T, F) = F - \max(F - A_T, 0), \tag{3.4.32}$$

最后一项可以看成是一个看跌期权的收益. 因为发行者有权利以面值为 F 的价格支付公司资产, 所以债务持有者本质上是出售一个看跌期权给发行者.

令 A 表示当前时刻的公司资产价值, $\tau = T - t$ 是距到期日的时间. 将风险债务 $V(A,\tau)$ 的价格看成是公司资产价值的未定权益. 通过调用连续时间无套利定价模型的标准假设 (连续交易和卖空公司资产、完全分割资产、没有借入与借出差价等), 得到通常的 Black-Scholes 定价方程

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial A^2} + rA\frac{\partial V}{\partial A} - rA, \tag{3.4.33}$$

其中 r 为无风险利率. 在方程 (3.4.32) 中定义的最终收益 $V(A,\tau)$ 成为当 $\tau = 0$ 时的 “初始” 条件

$$V(A,0) = F - \max(F - A, 0).$$

根据 Black-Scholes 方程的线性性, $V(A,\tau)$ 可以分解为

$$V(A,\tau) = Fe^{-r\tau} - p(A,\tau), \quad \tau = T - t, \tag{3.4.34}$$

其中 $p(A,\tau)$ 为欧式看跌期权的价格函数. 看跌期权价格函数取形式为

$$p(A,\tau) = Fe^{-r\tau}N(-d_2) - AN(-d_1), \tag{3.4.35}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \dfrac{A}{F} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

风险债务 $V(A,\tau)$ 的价值可以看成是违约风险债务 $Fe^{-r\tau}$ 价值少于债务持有者期望损失的现值. 在这个模型中, 期望损失的现值可以简单地看成是看跌期权给予发行人的价值.

权益价值 $E(A,\tau)$ (或股东奖金) 是少于负债的公司价值. 根据看跌–看涨期权的平价关系有

$$E(A,\tau) = A - V(A,\tau) = A - [Fe^{-r\tau} - p(A,\tau)] = c(A,\tau), \tag{3.4.36}$$

其中 $c(A,\tau)$ 为欧式看涨期权的价格函数. 由于股东在到期日可以得到等于 $\max(A_T - F, 0)$ 的看涨期权收益, 所以这是合理的结果.

信用差价的期限结构

风险债务到期的收益 $Y(\tau)$ 定义为债务的回报率, 其中

$$V(A,\tau) = Fe^{-Y(\tau)\tau}.$$

重新整理得到

$$Y(\tau) = -\frac{1}{\tau}\ln\frac{V(A,\tau)}{F}. \tag{3.4.37}$$

在风险收入和无违约零息票债务之间, 信用价差是不同的. 代表债务持有者需要的风险溢价是为了补偿潜在的违约风险. 在无风险利率为常数的假设下, 信用差价为

$$Y(\tau) - r = -\frac{1}{\tau}\ln\left(N(d_2) + \frac{1}{d}N(d_1)\right), \tag{3.4.38}$$

其中

$$d = \frac{Fe^{-r\tau}}{A}, \quad d_1 = \frac{\ln d}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2} \quad 和 \quad d_2 = -\frac{\ln d}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}.$$

数量 d 是无违约债务 $Fe^{-r\tau}$ 与公司资产价值 A 的比率, 因此, 发明了一个术语——"准" 公司债务比率. 形容词 "准" 是添加的, 因为在风险中性测度下代替 "物理的" 度量来履行所有估值.

信用差价的期限结构 $Y(\tau)-r$ 可以看成是 d 和 $\sigma^2\tau$ 的函数. 容易看到, $Y(\tau)-r$ 是 σ^2 的一个递增函数. 然而, 信用差价的时间依赖性取决于 $d>1$ 或 $d\leqslant 1$ (图 3.6). 当 $d>1$ 和 $\tau\to 0^+$ 时, $Y(\tau)-r$ 趋于无穷大, 它是违约 "必然" 事件的表现. 另一方面, 当 $d\leqslant 1$ 时, 信用差价总是随时间接近到期日而趋于零. 对低杠杆公司 (相当于 $d\ll 1$), 信用差价是随着 τ 而单调增大; 而中等杠杆公司 ($d\leqslant 1$, 但不是太小), 信用差价曲线呈现驼峰型. 在远离到期日的时间内, 因为充足的时间允许公司资产价值有很大的变化, 在到期日增长超过允诺的权益 F, 所以对高或中等杠杆公司来说, 信用差价似乎是不大的. 另一方面, 对低杠杆 (很高评价) 公司, 由于在给出的充分长的债务生存期里, 低于 F 的公司价值有可能向下运动, 所以信用差价是随着 τ 而单调增大 (虽然以低利率).

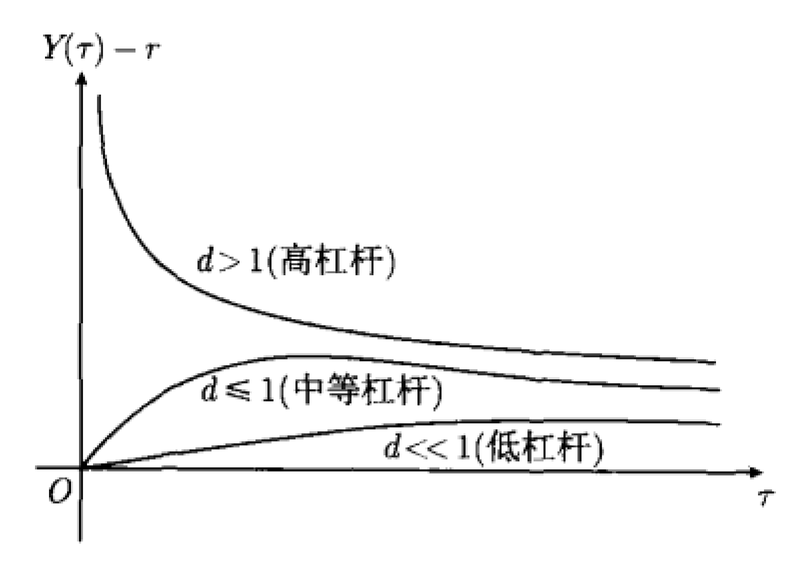


图 3.6 利用 Merton 的风险债务模型作为预测的信用差价的期限结构, 在接近到期日时, 当 $d\leqslant 1$ 时, 信用差价总是趋于零; 当 $d>1$ 时, 趋于无穷大

对 Merton 风险债务模型的强烈批评表明了在该模型下违约决不可能出其不意地发生的事实. 这是因为假设公司价值服从扩散过程, 并且公司价值转移到低于

违约门槛的水平需要花费有限时间. 即使对高质量的债券为了获得市场上观察到的短期违约差价, Kijima 和 Suzuki (2001) 引入了资产可跳跃的影响到公司的价值过程中. 他们的跳跃扩散模型反映了由于公司价值意外的突然下跌导致违约也可能发生的更真实的情形.

尽管分析违约风险债务的期权方法有一个优雅的理论上的吸引力, 但实证研究表明, 即使选择一个高价值公司的波动率, 实际差价比根据 Merton 模型所预测的结果更大. 它反映了这样的事实：在违约将要触发的条件比 Merton 模型所需要的条件要复杂得多. 一个更现实的违约模型应该包括① 跨期违约, 即在整个债务有效期内发生金融危机; ② 随机利率以及在信用转移和利率不确定性之间的相互关系; ③ 多类的先权要求和可能违反的严格优先规则.

带有更多精确模型违约机制的各式各样的风险债务模型, 回复过程和利率波动率在文献中都可以发现. 在它们中间, 最常用的结构风险债务模型就是验证债券契约条款有效性的 Black-Cox (1976) 模型 (在常数利率下), 而 Longstaff-Schwartz (1995) 模型允许随机利率、跨期违约和违约时结算规则的灵活性.

3.4.6　交换期权

交换期权是赋予持有者拥有权利但不负有义务、可用一个风险资产交换另一个风险资产的期权. 令 X_t 和 Y_t 分别表示两个资产的价格过程. 欧式交换期权在 Y_T 与 X_T 交换的到期日 T 的最终收益是 $\max(X_T - Y_T, 0)$. 假设 X_t 和 Y_t 同时服从几何布朗运动, 交换期权的解析定价公式可由 Black-Scholes 公式变形得到 (Margrabe, 1978). 将用计价单位变换的方法来导出交换期权的价格函数 (代替导出定价公式的偏微分方程方法见习题 3.34). 在风险中性测度 Q 下, 令 X_t 和 Y_t 满足

$$\frac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma_X dZ_t^X \quad 和 \quad \frac{dY_t}{Y_t} = rdt + \sigma_Y dZ_t^Y, \tag{3.4.39}$$

其中 r 为常数无风险利率, σ_X 和 σ_Y 分别为 X_t 和 Y_t 的常数波动率. 同时, $dZ_t^X dZ_t^Y = \rho dt$, 其中 ρ 为相关系数. 这里假设两个风险资产都是不支付红利的. 假设用 X_t 作为计价单位, 定义关于 $\mathcal{F}_T$ 的等价概率测度 Q_X 为 (见式 (3.2.11))

$$\frac{dQ_X}{dQ} = e^{-rT}\frac{X_T}{X_0}. \tag{3.4.40}$$

根据风险中性定价原理, 在 $X_t = X$ 和 $Y_t = Y$ 的条件下, 交换期权的价格函数 $V(X, Y, \tau)$ 为

$$\begin{aligned} V(X,Y,\tau) &= e^{-r\tau} E_Q\left[\max(X_T - Y_T, 0)\right] \\ &= e^{-r\tau} E_Q\left[X_T\left(1 - \frac{Y_T}{X_T}\right)\mathbf{1}_{\{Y_T/X_T<1\}}\right], \quad \tau = T - t. \end{aligned} \tag{3.4.41}$$

记 $W_t = Y_t/X_t$, 并取 X_t 作为计价单位, 则借助于式 (3.2.9), 可以得到

$$V(X,Y,\tau) = XE_{Q_X}\left[(1-W_T)\mathbf{1}_{\{W_T<1\}}\right]. \tag{3.4.42}$$

期望表达式 (3.4.42) 类似于关于标的资产为 $W_t = Y_t/X_t$ 和具有单位敲定价格的看跌期权.

下一步, 将在 Q_X 下导出 $W_t = Y_t/X_t$ 的动态方程. 注意到 (见习题 2.38)

$$\frac{dW_t}{W_t} = \frac{d(Y_t/X_t)}{Y_t/X_t} = (-\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_X^2)dt + \sigma_Y dZ_t^Y - \sigma_X dZ_t^X.$$

由 Girsanov 定理, 定义 $\widetilde{Z}_t^X$ 和 $\widetilde{Z}_t^Y$ 满足

$$d\widetilde{Z}_t^X = dZ_t^X - \sigma_X dt \quad 和 \quad d\widetilde{Z}_t^Y = dZ_t^Y - \rho\sigma_X dt,$$

它们是在 Q_X 下的布朗过程 (见习题 3.10). 结合上述关系式得到

$$\frac{dW_t}{W_t} = \sigma_Y d\widetilde{Z}_t^Y - \sigma_X d\widetilde{Z}_t^X.$$

在 Q_X 下, W_t 可以看成是一个漂移率为零, 波动率为 $\sigma_{Y/X}$ 的几何布朗运动, 并且满足

$$\sigma_{Y/X}^2 = \sigma_X^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2. \tag{3.4.43}$$

利用看跌期权的定价公式, 于是交换期权的价格为

$$V(X,Y,\tau) = XN(d_X) - YN(d_Y), \tag{3.4.44}$$

其中

$$d_X = \frac{\ln\dfrac{X}{Y} + \dfrac{\sigma_{Y/X}^2\tau}{2}}{\sigma_{Y/X}\sqrt{\tau}}, \quad d_Y = d_X - \sigma_{Y/X}\sqrt{\tau}, \quad \tau = T-t.$$

推广交换期权价格公式到支付红利资产和时间依赖于参数函数的情形就相当简单了. 在风险中性测度 Q 下, 假设 X_t 和 Y_t 分别满足

$$\frac{dX_t}{X_t} = [r(t) - q_X(t)]\,dt + \sigma_X(t)dZ_t^X, \tag{3.4.45a}$$

$$\frac{dY_t}{Y_t} = [r(t) - q_Y(t)]\,dt + \sigma_Y(t)dZ_t^Y, \tag{3.4.45b}$$

其中 $q_X(t)$ 和 $q_Y(t)$ 分别为 X_t 和 Y_t 的依赖于时间的红利率. 记 $\delta_X(t)$ 和 $\delta_Y(t)$ 分别为 X_t 和 Y_t 的漂移率, 则交换期权的价格公式变为

$$\begin{aligned} V(X,Y,t) &= e^{-\int_t^T r(u)du}\left[e^{\int_t^T \delta_X(u)du}XN(\widehat{d}_X) - e^{\int_t^T \delta_Y(u)du}YN(\widehat{d}_Y)\right] \\ &= e^{-\int_t^T q_X(u)du}XN(\widehat{d}_X) - e^{-\int_t^T q_Y(u)du}YN(\widehat{d}_Y), \end{aligned} \tag{3.4.46}$$

其中

$$\widehat{d}_X = \frac{\ln \dfrac{X}{Y} + \displaystyle\int_t^T [q_Y(u) - q_X(u)]du + \widehat{\sigma}_{Y/X}^2(t,T)(T-t)/2}{\widehat{\sigma}_{Y/X}(t,T)\sqrt{T-t}} \widehat{d}_Y,$$

$$\widehat{d}_Y = \widehat{d}_X - \widehat{\sigma}_{Y/X}(t,T)\sqrt{T-t}\widehat{\sigma}_{Y/X}^2(t,T),$$

$$\widehat{\sigma}_{Y/X}^2(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T [\sigma_X^2(u) - 2\rho\sigma_X(u)\sigma_Y(u) + \sigma_Y^2(u)]du.$$

3.4.7 具有汇率风险敞口的股票期权

双币种期权是一种以外国货币计价, 但以本国货币支付收益的一种期权. 双币种期权持有者同时面临汇率风险和股票风险. 存在许多可以构造的收益不同形式. 下面列出双币种看涨期权的一些例子.

(1) 外国股票看涨期权在外国货币中的执行价为

$$c_1(S_T, F_T, T) = F_T \max(S_T - X_f, 0),$$

其中 F_T 为到期汇率, S_T 为以外币标价标的资产的到期价格, X_f 为在外国货币下的敲定价格.

(2) 外国股票看涨期权在本国货币中的执行价为

$$c_2(S_T, T) = \max(F_T S_T - X_d, 0),$$

其中 X_d 为在本国货币下的敲定价格.

(3) 固定汇率的外国股票看涨期权为

$$c_3(S_T, T) = F_0 \max(S_T - X_f, 0),$$

其中 F_0 为预先设定的固定汇率.

(4) 股票挂钩的外汇看涨期权为

$$c_4(S_T, T) = S_T \max(F_T - X_F, 0),$$

其中 X_F 为汇率的敲定价格. 持有者期望以任意方式, 但只希望在汇率中以最低的价格 X_F 来购买外国资产.

1. 双币种调节漂移率技巧

令 S_t 和 F_t 分别表示外国资产的价格过程和汇率. 定义 $\widehat{S}_t = F_t S_t$ 是在本国货币下的外国资产价格. 令 r_d 和 r_f 分别表示常数的本国和外国利率, 并令 q 表示外

国资产的红利率. 假设 S_t 和 F_t 都服从几何布朗运动. 因为 $\widehat{S}_t$ 和 F_t 被认为是在本国货币下的价格过程, 所以在本国风险中性测度 Q_d 下, $\widehat{S}_t$ 和 F_t 的漂移率分别为

$$\delta_{\widehat{S}}^d = r_d - q \quad 和 \quad \delta_F^d = r_d - r_f. \tag{3.4.47a}$$

F 的倒数可以看成是一单位本国货币的外国货币价格. 在外国风险中性测度 Q 下, S_t 和 $1/F_t$ 的漂移率分别为

$$\delta_S^f = r_f - q \quad 和 \quad \delta_{1/F}^f = r_f - r_d. \tag{3.4.47b}$$

双币种调节漂移率技巧的意思是求 δ_S^d, 即在本国风险中性测度 Q_d 下, 以外币标价资产 S_t 的价格过程的漂移率. 在 Q_d 下, 令 S_t 和 F_t 的动态满足

$$\frac{dS_t}{S_t} = \delta_S^d dt + \sigma_S dZ_S^d, \tag{3.4.48a}$$

$$\frac{dF_t}{F_t} = \delta_F^d dt + \sigma_F dZ_F^d, \tag{3.4.48b}$$

其中 Q_d 布朗过程 Z_S^d 和 Z_F^d 满足 $dZ_S^d dZ_F^d = \rho dt$, σ_S 和 σ_F 分别为 S_t 和 F_t 的波动率. 因为 $\widehat{S}_t = F_t S_t$, 所以有 (见习题 2.38)

$$\delta_{\widehat{S}}^d = \delta_{FS}^d = \delta_F^d + \delta_S^d + \rho\sigma_F\sigma_S.$$

利用式 (3.4.47a), (3.4.47b) 中的结果得到

$$\delta_S^d = \delta_{\widehat{S}}^d - \delta_F^d - \rho\sigma_F\sigma_S = r_f - q - \rho\sigma_F\sigma_S. \tag{3.4.49}$$

比较 δ_S^d 和 δ_S^f, 存在一个附加项 $-\rho\sigma_F\sigma_S$, 即当风险中性测度从外国货币状态变为本国货币状态时, 外国资产价格过程的风险中性漂移率随 $-\rho\sigma_F\sigma_S$ 而调整.

从式 (3.4.48b) 和习题 2.38 中可以得到

$$\frac{d(1/F_t)}{1/F_t} = (r_f - r_d + \sigma_F^2)dt - \sigma_F dZ_F^d.$$

因此, 在 Q_d 下, $1/F_t$ 的风险中性漂移率看成是 $r_f - r_d + \sigma_F^2$. 这个结果可能会迷惑某些人 (称为 Siegel 悖论), 因为他们期望 $1/F_t$ 的风险中性漂移率为 $r_f - r_d$. 实际上, 在 Q_d 下, $1/F_t$ 的漂移率容易从双币种调节漂移率公式 (3.4.49) 中导出. 观察 $\sigma_F = \sigma_{1/F}$ 和 $\rho_{F,1/F} = -1$, 一个附加的双币种调节漂移率的项 $-\rho_{F,1/F}\sigma_{1/F}\sigma_F = \sigma_F^2$ 必须被加到 $\delta_{1/F}^f = r_f - r_d$ 中 (见式 (3.4.47b)), 因此得到

$$\delta_{1/F}^d = r_f - r_d + \sigma_F^2. \tag{3.4.50}$$

2. 各种双币种期权的定价公式

通过运用双币种调节漂移率技巧, 能推导出具有多种形式到期收益的双币种期权的定价公式. 虽然这些双币种期权涉及两个状态变量 S_t 和 F_t, 但试图将其变为单状态的期权模型.

外国股票看涨期权在外国货币中的执行价格

令 $c_1^f(S,\tau)$ 表示在外币状态中外币资产的普通标准看涨期权, 其中 S 为资产的当前价格, $\tau = T - t$ 为到期日. 最终收益为

$$c_1^f(S,0) = \max(S - X_f, 0).$$

记 F 为当前汇率, 容易看到

$$c_1(S,F,\tau) = Fc_1^f(S,\tau) = F\left[Se^{-q\tau}N(d_1^{(1)}) - X_f e^{-r_f\tau}N(d_2^{(1)})\right], \tag{3.4.51}$$

其中

$$d_1^{(1)} = \frac{\ln\dfrac{S}{X_f} + \left(\delta_S^f + \dfrac{\sigma_S^2}{2}\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}}, \quad d_2^{(1)} = d_1^{(1)} - \sigma_S\sqrt{\tau}.$$

有趣的是, 汇率风险并没有出现在定价公式中. 在任何时刻, 利用一般的汇率期权的价值都可以由外币转变成本币. 可以在适当的货币世界中通过估值使其归结为单状态模型.

外国股票看涨期权在本国货币中的执行价格

本币在 $\tau = 0$ 时刻的最终收益为

$$c_2(S,F,0) = \max(\widehat{S} - X_d, 0),$$

其中 $\widehat{S} = FS$ 为以本币标价的资产. 在本国风险中性测度 Q_d 下, $\widehat{S}$ 的漂移率和波动率分别为

$$\delta_{\widehat{S}}^d = r_d - q \quad 和 \quad \sigma_{\widehat{S}}^2 = \sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_F + \sigma_F^2. \tag{3.4.52}$$

因此, 外国股票看涨期权的定价公式为

$$c_2(S,F,\tau) = \widehat{S}e^{-q\tau}N(d_1^{(2)}) - X_d e^{-r_d\tau}N(d_2^{(2)}), \tag{3.4.53}$$

其中

$$d_1^{(2)} = \frac{\ln\dfrac{\widehat{S}}{X_d} + \left(\delta_{\widehat{S}}^d + \dfrac{\sigma_{\widehat{S}}^2}{2}\right)\tau}{\sigma_{\widehat{S}}\sqrt{\tau}}, \quad d_2^{(2)} = d_1^{(2)} - \sigma_{\widehat{S}}\sqrt{\tau}.$$

固定汇率的外国股票看涨期权

到期收益是以本币标价的, 因此, 在 Q_d 下应该使用外国资产的漂移率 δ_S^d. 固定汇率的外国股票看涨期权的价格函数为

$$c_3(S,\tau) = F_0 e^{-r_d\tau}\left[Se^{\delta_S^d\tau}N(d_1^{(3)}) - X_f N(d_2^{(3)})\right], \tag{3.4.54}$$

其中

$$d_1^{(3)} = \frac{\ln\frac{S}{X_f} + \left(\delta_S^d + \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\tau}{\sigma_S\sqrt{\tau}}, \quad d_2^{(3)} = d_1^{(3)} - \sigma_S\sqrt{\tau}.$$

因为汇率已经选为固定值 F_0, 价格公式不依赖于汇率 F. 看涨期权的货币风险隐藏在 δ_S^d 中的双币种预洗调节漂移率项 $-\rho\sigma_S\sigma_F$, 显示了依赖于汇率波动 σ_F 和相关系数 ρ.

股票挂钩的外汇看涨期权

可以记最终收益作为一个交换期权, 其中

$$c_4(S,F,0) = \max(\widehat{S} - XS, 0).$$

考虑转换成 $\widehat{S}$ 和 XS 的两个资产, 这两个资产的比率为 $\dfrac{\widehat{S}}{XS} = \dfrac{F}{X}$, 并且在 Q_d 下, 漂移率的差为 $\delta_{\widehat{S}}^d - \delta_S^d = r_d - r_f + \rho\sigma_F\sigma_S$. 股票挂钩的外汇看涨期权价格为 (见式 (3.4.46))

$$\begin{aligned} c_4(S,\tau) &= e^{-r_d\tau}\left[\widehat{S}e^{\delta_{\widehat{S}}^d\tau}N(d_1^{(4)}) - XSe^{\delta_S^d\tau}N(d_2^{(4)})\right] \\ &= Se^{-q\tau}\left[FN(d_1^{(4)}) - Xe^{(r_f-r_d-\rho\sigma_F\sigma_S)\tau}N(d_2^{(4)})\right], \end{aligned} \tag{3.4.55}$$

其中

$$d_1^{(4)} = \frac{\ln\dfrac{F}{X} + \left(r_d - r_f + \rho\sigma_F\sigma_S + \dfrac{\sigma_F^2}{2}\right)\tau}{\sigma_F\sqrt{\tau}}, \quad d_2^{(4)} = d_1^{(4)} - \sigma_F\sqrt{\tau}.$$

3.5 超出 Black-Scholes 定价框架

在 Black-Scholes-Merton 期权定价框架中, 假设投资组合的构成随着零交易费的动态对冲策略连续地变化. 随着买卖资产有关交易费用的出现, Black-Scholes-Merton 模型要求的连续投资组合调整将导致交易费, 因此, 总交易费数量成为一个无穷数. 作为一个套期保值者, 在重新平衡投资组合产生的交易费和对冲错误产生的隐含费用之间必须公平处理. 交易费的出现暗示套利不再产生一个单一的期权价格, 而是一系列可能的价格. 因为套利者所得到的收益被交易费抵消, 所以期权可能被定价过高或被低估到某个程度. 在 3.5.1 小节中将介绍交易费模型.

在 Black-Scholes-Merton 框架中的另一个假设是资产价格路径的连续性. 许多实证研究揭示了资产价格可以不连续地跳跃, 如由于得到突然的消息. 在 3.5.2 小节中, 考虑由 Merton(1976) 提出的跳扩散模型. 在跳的成分与市场无关的假设下 (跳风险可以分散化解掉), 能够导出衍生产品价格满足的方程. 另外, 当随机跳达到服从泊松过程和跳率的对数是正态分布时, 在跳扩散模型下就可能得到闭式期权定价公式.

在资产价格动态中, 通过常数波动率参数, Black-Scholes-Merton 模型给出了期权价格作为波动率和量化随机性的函数. 利用 Black-Scholes 价格公式代替计算由波动率给出的期权价格, 作为一个反问题, 从所观察到的市场期权价格来求解波动率. 由观察到的期权价格中隐含的波动率价值被称为**隐含波动率**(implied volatility). 如果 Black-Scholes 期权定价模型是完全的, 则对所有期权市场价格, 隐含波动率都是一样的. 然而, 实证研究表明隐含波动率依赖于敲定价格和期权的到期日, 这种现象称为波动率微笑. 考虑放松常数波动率的假设, 并试图用确定性的波动率函数 (局部波动率) 或均值回复随机过程来刻画波动率. 通过下面的局部波动率方法, 导出满足具有到期日的期权价格和作为独立变量敲定价格的 Dupire 方程. 隐含波动率和局部波动率的各种问题将在 3.5.3 小节中讨论.

一般来说, 局部波动率模型有太多的限制, 以致不能描述波动率变化的行为. 在文献中, 存在大量试图发展不同类型波动率模型的广泛研究. 在随机波动率模型的类型中, 波动率自身刻画为均值回复的 Itô过程 (Hull and White, 1987). 波动率的均值回复特征与我们的直觉是一致的, 即波动率幅度应该回复到它的长期分布均值水平. 在随机波动率的假设下, 期权的定价是相当富有挑战性的. 当资产价格过程和波动率过程不相关时, 可以证明欧式期权的价格就是 Black-Scholes 价格, 它是在期权剩余使用期内对平均方差率概率分布的积分. 在一般情况下, 两个过程是相关的, 通过 Fourier 变换方法可以获得解析解 (Heston, 1993). Fouque 等 (2000) 提供了一个随机波动率不同方面的综述. 另一类在近年来已经获得普及的波动率模型是 GARCH (广义自回归条件异方差) 模型族 (Duan, 1995). 在 GARCH 模型中, 当前时刻间隔的方差率是常数长期平均方差率、先前时间间隔内的方差率和关于方差率的最近信息的一个加权平均数. 不断的研究工作意在探索更好的波动率模型, 用来解释波动率微笑和从微笑自身提取有用的市场信息.

3.5.1　含交易费的期权定价模型

面对交易费如何构造对冲策略, 以便最佳复制衍生证券的收益? 回想一下可以创建一个包含 Δ 单位标的资产和复制期权收益的货币市场存款的投资组合. 根据投资组合复制原理, 期权的价值等于建立模拟期权收益的复制投资组合的初始成本. Leland (1985) 提出了修正的 Black-Scholes 模型, 其中投资组合在定期的时间

间隔中进行调整. 他的模型假设在买和卖资产中的交易费用是与交易的货币价值成比例的. 设 k 表示每单位资产交易的来回交易成本. 假设 α 单位的资产以价格 S 买 $(\alpha > 0)$ 或卖 $(\alpha < 0)$, 则无论买或卖交易费都是 $\dfrac{k}{2}\,|\alpha|S$.

在下面成比例的交易费期权定价模型中 (Leland, 1985; Whalley and Wilmott, 1993), 资产价格动态假定服从波动率为常数的几何布朗过程. 此外, 假设标的资产在期权的有效期内不支付红利. 考虑一个期权卖方对冲的投资组合, 这里他卖空一个单位的期权并长期持有 Δ 份标的资产. 为方便起见, 在以后的说明中, 关于资产价格过程 S_t 省略下标 t. 这个对冲投资组合在时间 t 的价值为

$$\Pi(t) = -V(S,t) + \Delta S, \tag{3.5.1}$$

其中 $V(S,t)$ 为期权的价格, S 为在 t 时刻的资产价格. 令 δt 表示在连续重整投资组合之间固定和有限的时间间隔. 在一个时间间隔 δt 后, 投资组合价值的改变为

$$\delta\Pi = -\delta V + \Delta\ \delta S - \frac{k}{2}|\delta\Delta|S, \tag{3.5.2}$$

其中 δS 为资产价格改变量, $\delta\Delta$ 为投资组合中的持有资产单位数量的改变量. 细心的读者会怀疑：当没有 $S\delta\Delta$ 项时, 为什么成比例的交易费项 $-\dfrac{k}{2}|\delta\Delta|S$ 出现在 $\delta\Pi$ 中? 在标的资产中, 由于头寸的调整交易费项表示支付单程交易费. 另一方面, 根据下面 Black 和 Scholes (1973) 用到的 "实际" 方法, 单位 Δ 的数量立刻被看成是常数 (见 3.1.1 小节中的注记). 根据 Itô引理, 在时间段 δt 内, 期权价格的改变量为

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial S}\,\delta S + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\delta t. \tag{3.5.3}$$

为了消除式 (3.5.2), (3.5.3) 中的随机项, 选择 $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$, 以便对冲由于资产价格波动带来的风险. 在时间 δt 内, 资产单位数量的改变量为

$$\delta\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(S+\delta S, t+\delta t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S,t). \tag{3.5.4}$$

通过 Itô引理, $|\delta\Delta|$ 的高阶项为

$$|\delta\Delta| \approx \sigma S\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\,|\delta Z|. \tag{3.5.5}$$

形式上, 可以把 δZ 看成 $\widetilde{x}\sqrt{\delta t}$, 其中 $\widetilde{x}$ 为标准的正态变量. 可以证明, 反射布朗过程 $|\delta Z|$ 的期望为

$$E(|\delta Z|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \sqrt{\delta t} \tag{3.5.6}$$

(见习题 2.29). 对冲投资组合应该期望获得与无风险资产同样的回报, 从而得到

$$E[\delta\Pi] = r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S}S\right)\delta t. \tag{3.5.7}$$

将上述所有的结果放在一起, 式 (3.5.7) 可以写为

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{k}{2}\sigma S^2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\right)\delta t = r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S}S\right)\delta t.$$

如果定义 Leland 数为 $Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{\delta t}}\right)$, 则得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\sigma^2}{2}Le\,S^2\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{3.5.8}$$

在**成比例交易模型**(proportional transaction costs model) 中, 项 $\frac{\sigma^2}{2}LeS^2\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|$ 一般是非线性的, 除了当比较静态 $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ 时对所有 S 不改变符号. 交易费项依赖于 Γ, 并且 Γ 用来估量投资组合中不对冲的程度. 类似于 Black-Scholes 方程, 可以在形式上将方程 (3.5.8) 重写为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{3.5.9}$$

其中修正的波动率为

$$\widetilde{\sigma}^2 = \sigma^2[1 + Le\,\mathrm{sgn}(\Gamma)]. \tag{3.5.10}$$

当 $\widetilde{\sigma}^2$ 为负时, 方程 (3.5.9) 在数学上是不适定的. 当 $\Gamma < 0$ 和 $Le > 1$ 时, 这种情况发生. 然而, 众所周知, 对于没有交易费的欧式看涨和看跌期权, Γ 总是正的. 当存在交易费时, 对于 Γ, 如果假定有相同的符号, 则 $\widetilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + Le) > \sigma^2$. 因此, 在上面的假设下, 方程 (3.5.9) 是线性的, 从而除了修正的波动率 $\widetilde{\sigma}$ 现在被用作波动率参数以外就可应用 Black-Scholes 公式. 因为对高价值的波动率期望一个更高的期权价值, 所以可以导出 $V(S,t)$ 是 Le 的一个递增函数. 从金融意义上来说, 调整 (更小的 δt) 越频繁, 交易费就越高, 因此, 期权的卖方关于期权的价格要价就越高. 令 $V(S,t;\widetilde{\sigma})$ 和 $V(S,t;\sigma)$ 分别表示从带有波动率价值 $\widetilde{\sigma}$ 和 σ 的 Black-Scholes 公式中得到的期权价值, 因此, 与复制策略有关的总交易费为

$$\mathcal{T} = V(S,t;\widetilde{\sigma}) - V(S,t;\sigma). \tag{3.5.11}$$

当 Le 很小时, $\mathcal{T}$ 可以近似为

$$\mathcal{T} \approx \frac{\partial V}{\partial \sigma}(\widetilde{\sigma} - \sigma), \tag{3.5.12}$$

其中 $\widetilde{\sigma} - \sigma \approx \frac{k}{\sqrt{2\pi\delta t}}$. 注意到 $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ 对于看涨和看跌期权是一样的, 并且 Λ 值由方程 (3.3.29), (3.3.30) 给出. 对 $Le \ll 1$, 看涨或看跌期权的总交易费近似为

$$\mathcal{T} \approx \frac{kSe^{-\frac{d_1^2}{2}}}{2\pi}\sqrt{\frac{T-t}{\delta t}}, \tag{3.5.13}$$

其中 d_1 已在方程 (3.3.6) 中定义.

定期重置对冲是许多可能对冲策略之一. 自然的问题是: 应该如何刻画一个给定对冲策略的最优化条件? 通常的做法是定义一个适当的效用函数, 用来作为采用最优化的参考. 为了讨论存在交易费基于有效的对冲策略, 可以参考 Hodges 和 Neuberger (1989), Davis(1993) 等的文章. 在他们的模型中, 他们试图找到一种最优投资组合的策略, 在无限长时间内来最大化预期效用. Neuberger (1994) 证明了当标的资产遵循一个纯粹的跳跃过程时, 有可能使用套利策略来建立存在交易费的期权价格的严密和自由偏好的边界. Bensaid 等 (1992) 以及 Grannan 和 Swindle (1996) 也曾讨论过其他方面带有交易费的期权定价模型.

3.5.2 跳扩散模型

在 Black-Scholes 期权定价模型中, 假设交易随时间连续发生, 并且资产价格过程有一个连续的样本路径. 许多关于资产价格动态的实证研究表明, 资产价格是偶然跳跃的. 从总体来看, 这样的跳跃可能反映一个公司或行业或经济的重要新信息的到来.

Merton (1976) 开始通过结合正常波动和异常跳跃来建立资产价格过程 S_t 的模型. 正常波动可由几何布朗过程来刻画, 并且相关的样本路径是连续的. 跳跃可由假设具有强度为 λ 的独立同分布的泊松分布事件来刻画, 即在时间间隔 $(t, t+dt)$, 跳跃事件发生的概率等于 λdt. 可以定义泊松过程 dq_t 为

$$dq_t = \begin{cases} 0, & \text{概率为 } 1 - \lambda dt, \\ 1, & \text{概率为 } \lambda dt, \end{cases} \tag{3.5.14}$$

其中 λ 解释为每单位时间发生跳的平均数.

令 J 表示发生一次跳事件的资产价格跳跃比, 即当 $dq_t = 1$ 时, S_t 立即跳到 JS_t. 跳跃比本身是一个密度函数为 f_J 的随机变量. 例如, 如果假设 $\ln J$ 是期望为 μ_J, 方差为 σ_J^2 的高斯分布, 则

$$E[J-1] = \exp\left(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}\right) - 1. \tag{3.5.15}$$

假设资产价格动态是几何布朗扩散过程和泊松跳过程的组合, 那么资产价格过程 S_t 满足

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t + (J-1)dq_t, \tag{3.5.16}$$

其中 μ 和 σ 分别为几何布朗运动的漂移率和波动率. 在资产价格中, 一次跳事件发生的变化为 $(J-1)S_t$.

设想一个期权的卖方遵循 Black-Scholes 对冲策略, 他长期持有 Δ 份标的资产和卖空一份期权. 令 $V(S,t)$ 表示期权的价格公式. 为方便起见, 在资产价格过程 S_t 和泊松过程 dq_t 中, 采用下标 t. 此外, 采用保持 Δ 是瞬时常数的 "实用" Black-Scholes 方法. 资产组合价值 Π 及其微分 $d\Pi$ 分别为

$$\Pi = \Delta S - V(S,t)$$

和

$$\begin{aligned} d\Pi = & -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \left(\Delta - \frac{\partial V}{\partial S}\right)(\mu S dt + \sigma S dZ_t) \\ & + \{\Delta(J-1)S - [V(JS,t) - V(S,t)]\}dq_t. \end{aligned} \tag{3.5.17}$$

风险的两个来源来自于扩散部分 dZ_t 和跳部分 dq_t. 为了对冲扩散风险, 可以选择 $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$ 为通常的 Black-Scholes 对冲比. 跳的风险怎样呢? Merton (1976) 证明了如果跳部分是特有的, 并且是与市场无关的 (非系统风险), 则在期权中不应该考虑这种跳风险. 在这个例子中, 投资组合的 β 值 (来自资本资产定价模型) 为零. 由于所有 β 值为零证券的期望回报率等于无风险利率, 所以有

$$E_J[d\Pi] = r\Pi dt, \tag{3.5.18}$$

其中期望值 E_J 取代跳跃比 J. 注意到

$$\begin{aligned} & E_J\left[\{\Delta(J-1)S - [V(JS,t) - V(S,t)]\}\, dq_t\right] \\ = & \lambda\left(E_J[J-1]S\frac{\partial V}{\partial S} - E_J\left[V(JS,t) - V(S,t)\right]\right)dt. \end{aligned}$$

合并所有的结果, 在跳扩散资产价格过程下, 得到下面期权价格函数 $V(S,\tau)$ 满足的微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} = & \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \lambda E_J[J-1])\, S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \\ & + \lambda E_J[V(JS,\tau) - V(S,\tau)], \quad \tau = T - t. \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

为了求解 $V(S,\tau)$, 必须指定说明 J 的分布. 令 $k=E_J[J-1]$, 定义随机变量 X_n, 它与作为 n 个独立同分布的随机变量的乘积有相同的分布, 每一个都与 J 同分布 ($X_0=1$). 记 $V_{BS}(S,\tau)$ 为相同期权合约的 Black-Scholes 价格函数. 在期望项中, 方程 (3.5.19) 的解的表达式为 (Merton, 1976)

$$V(S,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\{E_{X_n}[V_{BS}(SX_ne^{-\lambda k\tau},\tau)]\},\quad \tau=T-t, \tag{3.5.20}$$

其中 E_{X_n} 为在 X_n 的分布上的期望. 式 (3.5.20) 的证明在习题 3.39 中给出.

一般地, 在跳扩散模型下, 不容易获得期权的闭式定价公式, 除了少数例外. 当跳的比率 J 遵循对数分布时, 就有可能获得欧式看涨期权的闭式定价公式 (见习题 3.34). 此外, 当利率服从跳扩散模型时, Das 和 Foresi (1996) 得到了债券和期权的闭式定价公式.

3.5.3 隐含和局部波动率

由 Black-Scholes 定价框架得到的期权价格是 5 个参数的函数: 资产价格 S, 敲定价格 X, 利率 r, 到期时间 τ 和波动率 σ. 除了波动率参数以外, 其他 4 个参数都是可观察到的量. 在定价公式中, 设置波动率值的困难在于这样的事实, 即输入值应该是在期权剩余寿命期内的预测波动率价值, 而不是从资产价格的过去市场数据得到的估计波动率价值 (**历史波动率**(historical volatility)). 假设将期权价格函数 $V(\sigma)$ 作为波动率 σ 的函数, 并且令 V_{market} 表示在市场上观察到的期权价格. 隐含波动率 σ_{imp} 定义为

$$V(\sigma_{\text{imp}})=V_{\text{market}}. \tag{3.5.21}$$

通过观察市场上的期权价格 (**隐含波动率**(implied volatility)) 所隐含波动率价值表明了关于由市场确定的波动程度的一致看法. 特别地, 关于相同标的资产从变化的到期日和敲定价格的期权中同时获得的几个隐含波动率价值提供了广泛的、关于在变化的敲定价格和到期日波动率的市场动态. 这种信息可能对交易者来设定他所感兴趣的期权的标的资产的波动率价值是有用的. 在金融市场中, 这对交易者通过隐含波动率 σ_{imp} 给出一个期权的市场价格报价成为了一种普遍做法. 基于期权价格的市场信息, 它提供了关于隐含波动率价值的直接比较.

从定价公式中, 根据 S,X,r,τ 和期权价格 V, σ 不能明显地求出, 确定隐含波动率必须像对待非线性方程通常求根程序那样, 通过迭代算法得出. Manaster 和 Koehler (1982) 基于已知的 Newton-Raphson 迭代方法提出了一个迭代算法. 迭代表明, 二次收敛速率和迭代序列 $\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots\}$ 单调地收敛到 σ_{imp}. 根据二次收敛速率, 对与 n 无关的某些 K 有

$$\sigma_{n+1}-\sigma_{\text{imp}}=K(\sigma_n-\sigma_{\text{imp}})^2. \tag{3.5.22}$$

1. 隐含波动率的数值计算

当应用到隐含波动率的计算时, Newton-Raphson 的迭代算法为

$$\sigma_{n+1}=\sigma_n-\frac{V(\sigma_n)-V_{\text{market}}}{V'(\sigma_n)},\tag{3.5.23}$$

其中 σ_n 表示 σ_{imp} 的第 n 次迭代. 假如适当地选择第一次迭代 σ_1, 那么序列 $\{\sigma_n\}$ 的极限收敛到唯一解 σ_{imp}. 上述迭代方法可重写成如下形式:

$$\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_{\text{imp}}}{\sigma_n-\sigma_{\text{imp}}}=1-\frac{V(\sigma_n)-V(\sigma_{\text{imp}})}{\sigma_n-\sigma_{\text{imp}}}\frac{1}{V'(\sigma_n)}=1-\frac{V'(\sigma_n^*)}{V'(\sigma_n)}.\tag{3.5.24}$$

借助于微积分中值定理, 能证明 σ_n^* 位于 σ_n 和 σ_{imp} 之间. Manaster 和 Koehler (1982) 建议选择第一次迭代 σ_1, 使得 $V'(\sigma)$ 通过 $\sigma=\sigma_1$ 是最大的. 正如下面的解释, 这个开始迭代的选择应保证迭代序列单调收敛到 σ_{imp}. 由式 (3.3.29) 以及对所有的 σ 有

$$V'(\sigma)=\frac{S\sqrt{\tau}\,e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}>0,$$

从而

$$V''(\sigma)=\frac{S\sqrt{\tau}d_1d_2e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\frac{V'(\sigma)d_1d_2}{\sigma},$$

其中 d_1 和 d_2 在式 (3.3.6) 中已经定义. 因此, 函数 $V'(\sigma)$ 的临界点通过 $d_1=0$ 和 $d_2=0$ 给出, 分别为

$$\sigma^2=-2\frac{\ln\frac{S}{X}+r\tau}{\tau}\quad 和\quad \sigma^2=2\frac{\ln\frac{S}{X}+r\tau}{\tau}.$$

以上 σ^2 的两个值都给出 $V'''(\sigma)<0$. 因此, 可以选择第一次迭代 σ_1 为

$$\sigma_1=\sqrt{\left|\frac{2}{\tau}\left(\ln\frac{S}{X}+r\tau\right)\right|},\tag{3.5.25}$$

使得对 $\sigma_1, V'(\sigma)$ 在 $\sigma=\sigma_1$ 是最大的. 在式 (3.5.24) 中, 令 $n=1$, 并观察到 $V'(\sigma_1^*)<V'(\sigma_1)$ (注意到 $V'(\sigma)$ 在 $\sigma=\sigma_1$ 是最大的), 于是得到

$$0<\frac{\sigma_2-\sigma_{\text{imp}}}{\sigma_1-\sigma_{\text{imp}}}<1.$$

一般地, 假设能够建立 (见习题 3.42)

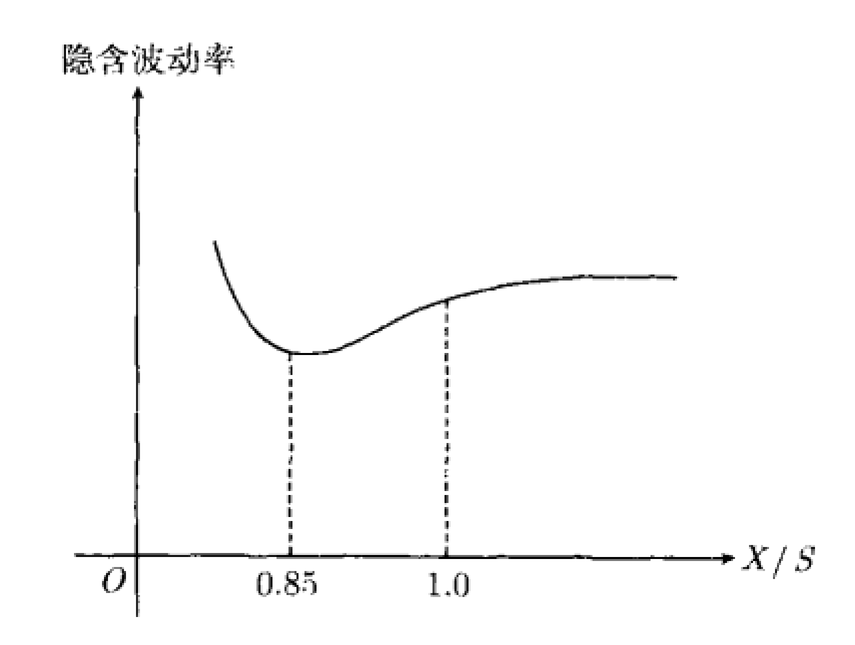
$$0<\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_{\text{imp}}}{\sigma_n-\sigma_{\text{imp}}}<1,\quad n\geqslant 1,\tag{3.5.26}$$

那么序列 $\{\sigma_n\}$ 是单调有界的, 所以 $\{\sigma_n\}$ 收敛到唯一解 σ_{imp}. 总之, 如果由式 (3.5.25) 开始给出第一次迭代 σ_1, 那么由式 (3.5.23) 生成的序列 $\{\sigma_n\}$ 以二次收敛速率单调地收敛到 σ_{imp}.

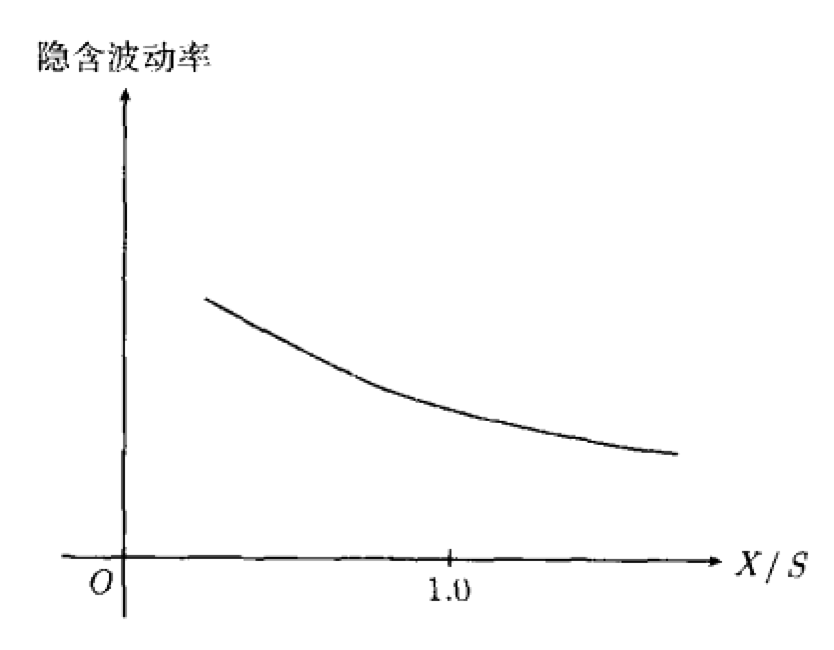
2. 波动率微笑

Black-Scholes 模型假设资产价格在所有未来时间都服从对数正态概率分布. 因为在 Black-Scholes 模型中, 波动率是唯一不可观察到的参数, 所以该模型给出了期权价格作为波动率的函数. 研究波动率对于期权敲定价格的依赖性将是有趣的.

如果绘制交易所交易期权的隐含波动率图形, 如指数期权, 对于固定到期日与它们的敲定价格相反, 该曲线是典型凸的形状, 而不是像简单的 Black-Scholes 模型导出的直的水平线那样. 这种现象通常被市场从业人员称为**波动率微笑**(volatility smile). 这些微笑显示了广泛的不同性质, 取决于市场是否采用了 1987 年 10 月市场崩溃之前或之后的数据. 图 3.7(a), (b) 表明了交易所交易欧式指数期权的崩溃前微笑和崩溃后微笑的典型形状. 隐含波动率价值通过不同到期日的平均期权获得.



(a) 崩溃前微笑的典型模式, 隐含波动率曲线是向下凸的



(b) 崩溃后微笑的典型模式, 隐含波动率随 X/S 增大而下降, 表明虚值看跌期权($X/S<1$)比虚值看涨期权($X/S>1$)以更高的隐含波动率交易

图 3.7

在真正的市场行情中, 这是一个通常的事件, 当资产价格过高时, 波动趋于减少, 使得对更高的资产价格减少的可能性得以实现. 另一方面, 当资产价格过低时, 波动呈上升趋势, 也就是说, 更可能的是资产价格进一步暴跌. 假如绘制资产价格的真实概率分布图形并与对数正态分布相比较, 可以观察到真实分布的左手尾部比对数的情形要厚, 而相反的情况发生在右手尾部 (图 3.8).

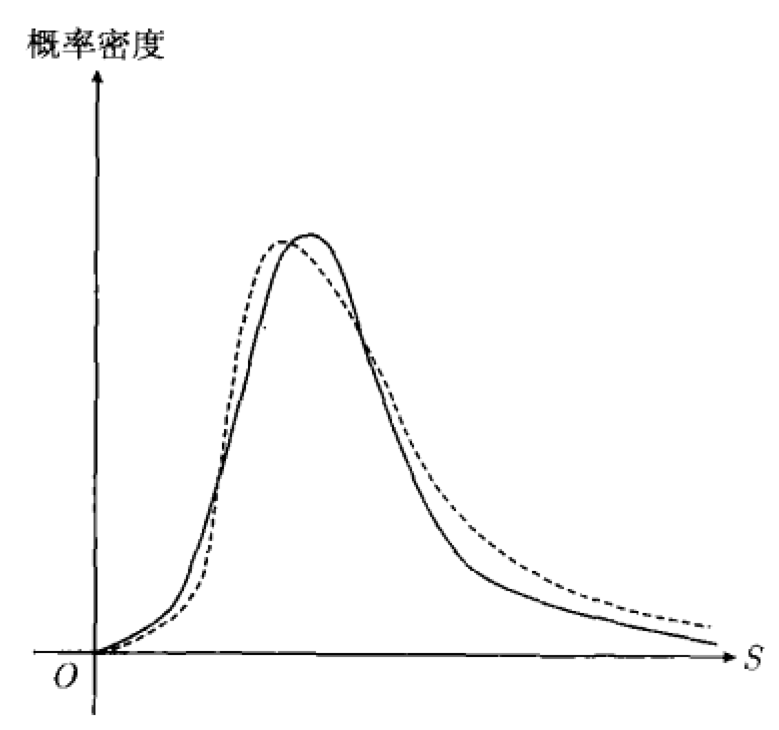


图 3.8 从市场数据中隐含的资产价格的真实概率密度 (实线) 与对数正态分布 (虚线) 的比较, 真实概率密度在左边尾部更厚和在右边尾部更薄

正如从期权价格的市场数据计算出来的隐含概率反映的那样, 在 1987 年 10 月市场崩溃后, 股票指数大幅下降的更高概率的市场行为对市场从业人员来说都是已知的. 换句话说, 由于真实概率分布的左 (右) 手尾部的变厚 (变薄), 虚值看涨 (看跌) 期权的市场价格在 1987 年股灾后变得比 Black-Scholes 价格更便宜 (更贵). 在通常市场的情况下, 虚值股票指数看跌期权比虚值股票指数看涨期权以更高的隐含波动率交易.

3. *局部波动率*

代替引入需要关于投资者风险偏好假设的随机波动率, 可以选择留在单因素扩散结构下, 但允许波动率函数与时间或状态或两者都关联. 如果假设波动率函数与时间关联, 那么能容易证明 $\sigma(T)$ 可以由适用于所有 $T > t$ 的隐含波动率 $\sigma_{\text{imp}}(t, T)$ 已知信息导出 (见习题 3.43). 现在, 假设欧式期权的价格在所有敲定价格和到期日都是可以得到的, 从而可以计算 $\sigma_{\text{imp}}(t, T; X)$. 能够找到一个依赖于状态时间并与市场期权价格一致的理论上的 Black-Scholes 期权价格的波动率函数 $\sigma(S_t, t)$ 吗? 在文献中, $\sigma(S_t, t)$ 被称为**局部波动率函数**(local volatility function).

假设在所有市场中欧式期权价格都是可以得到的, Breeden 和 Litzenberger (1979) 证明了资产价格的风险中性概率分布可以重新获得. 令 $\psi(S_T, T; S_t, t)$ 表

示资产价格的转移密度函数. 一个到期日为 T 和敲定价格为 X 的欧式看涨期权在 t 时刻的价格为

$$c(S_t,t;X,T)=e^{-r(T-t)}\int_X^{\infty}(S_T-X)\psi(S_T,T;S_t,t)dS_T. \tag{3.5.27}$$

如果对 c 关于 X 求导数, 则得到

$$\frac{\partial c}{\partial X}=-e^{-r(T-t)}\int_X^{\infty}\psi(S_T,T;S_t,t)dS_T. \tag{3.5.28}$$

再求一次导数有

$$\psi(X,T;S_t,t)=e^{r(T-t)}\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}. \tag{3.5.29}$$

方程 (3.5.29) 表明, 转移密度函数完全可以由具有相同到期日和不同敲定价格的期权市场价格推得, 而不需要知道波动率函数.

因为涉及倒向状态和时间变量, 所以满足欧式看涨期权价格的 Black-Scholes 方程可以认为是一个倒向方程. 能找到一个涉及前向状态变量的期权定价方程的前向类型吗? 这样的方程确实存在, 它通常被称为 Dupire 方程 (Dupire, 1994).

假设在风险中性测度下, 资产价格动态满足

$$\frac{dS_t}{S_t}=(r-q)dt+\sigma(S_t,t)dZ_t, \tag{3.5.30}$$

其中波动率与状态和时间都有关系. 假设将看涨期权价格函数写成形式 $c=c(X,T)$, 那么 Dupire 方程的形式为

$$\frac{\partial c}{\partial T}=-qc-(r-q)X\frac{\partial c}{\partial X}+\frac{\sigma^2(X,T)}{2}X^2\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}. \tag{3.5.31}$$

Black-Scholes 方程和 Dupire 方程有点类似于一对倒向和前向的 Fokker-Planck 方程.

为了获得 Dupire 方程, 对式 (3.5.29) 中的 T 进行微分得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial T}=e^{r(T-t)}\left(r\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial X^2}\frac{\partial c}{\partial T}\right). \tag{2.5.32}$$

回想 $\psi(X,T;S,t)$ 满足前向 Fokker-Planck 方程, 其中

$$\frac{\partial\psi}{\partial T}=\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left[\frac{\sigma^2(X,T)}{2}X^2\psi\right]-\frac{\partial}{\partial X}[(r-q)X\psi]. \tag{3.5.33}$$

结合式 (3.5.29), (3.5.32), (3.5.33), 并且消去公共因子 $e^{r(T-t)}$ 有

$$\begin{aligned}&r\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial X^2}\frac{\partial c}{\partial T}\\&=\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left[\frac{\sigma^2(X,T)}{2}X^2\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}\right]-(r-q)\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(X\frac{\partial c}{\partial X}-c\right).\end{aligned} \tag{3.5.34}$$

对式 (3.5.34) 中的 X 求两次积分得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial T}+rc+(r-q)\left(X\frac{\partial c}{\partial X}-c\right)\\&=\frac{\sigma^2(X,T)}{2}X^2\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}+\alpha(T)X+\beta(T),\end{aligned}\tag{3.5.35}$$

其中 $\alpha(T)$ 和 $\beta(T)$ 为 T 的任意函数. 由于在上述方程中所有涉及 c 的函数当 X 趋于无穷时都为零, 因此, $\alpha(T)$ 和 $\beta(T)$ 必定为零. 重组方程中剩余的项就得到了 Dupire 方程.

从 Dupire 方程就可以根据看涨期权价格函数和它的衍生产品明确地表达局部波动率 $\sigma(X,T)$, 其中

$$\sigma^2(X,T)=\frac{2\left[\dfrac{\partial c}{\partial T}+qc+(r-q)X\dfrac{\partial c}{\partial X}\right]}{X^2\dfrac{\partial^2 c}{\partial X^2}}.\tag{3.5.36}$$

假设有许多的到期日和敲定价格的市场期权价格可供利用, 则可以通过使用市场数据近似求出 c 关于 X 和 T 的导数, 从而可以估计上述方程中的局部波动率. 然而, 在实际的市场条件下, 只有有限数量到期日和敲定价格期权的市场价格可以利用. 给定若干有限的市场期权价格, 如何建立一个离散的二叉树, 在单因素局部波动率的假设基础上来模拟资产价格运动? 不同于常数波动率的二叉树, 隐式二叉树的形状会扭曲. 向上和向下运动以及它们相关的概率通过一个引入程序来确定, 使得隐式树给出与所观察的期权价格一致的数值估计的期权价格. 换句话说, 树结构根据市场数据是**隐式的** (implied). 不幸的是, 在二叉树中, 节点的数量一般比可得到的期权价格的数量要多得多. 这将引起隐式二叉树的数值计算方法极不稳定. 对于局部波动率和隐式树技巧的理论讨论, 可以参见 Derman 和 Kani (1998) 的文献.

3.5.4 随机波动率模型

资产价格回报率的每日波动典型地表明了大运动跟随大运动、小运动跟随小运动的波动率聚集性. 此外, 资产价格回报率的分布是高尖峰和厚尾的, 表明不同方差分布的混合. 将波动率作为一个随机变量是很自然的. 波动率聚集性特征反映了波动率均值回归的特性. 因为波动率是一个**隐藏的**(hidden) 过程, 所以建立波动率的随机行为模型是比较困难的. 虽然波动率驱动资产价格, 但它不是直接能观察到的. 在本小节中, 描述将价格变量 v 看成一个与资产价格过程有关的均值回归过程的随机波动率的模型 (Heston, 1993). 利用无风险对冲原理, 得到关于标的资产期权价格所满足的微分方程, 这里标的资产价格波动率服从均值回归随机过程. 因此, 将表明如何利用 Fourier 变换方法来求出欧式期货看涨期权的价格.

1. 微分方程公式

Heston (2003) 假设资产价格 S_t 和资产价格的方差 v_t 服从联合随机过程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_S, \tag{3.5.37a}$$

$$dv_t = k(\overline{v} - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t} dZ_v, \tag{3.5.37b}$$

其中布朗过程与 $dZ_S dZ_v = \rho dt$ 有关. 方差过程被认为有一个均值回归水平 $\overline{v}$ 和回归速度 k, 并且 η 为方差的波动率. 资产价格过程在物理量下有漂移率 μ. 所有模型的参数都假设是常数. 为记法上方便起见, 省去在 S_t 和 v_t 中的下标 t. 标的资产期权价格应该是一个关于 S, v, t 的函数. 令 $V(S, v, t; T)$ 表示到期日为 T 的期权价格. 应用 Itô引理, 微分 dV 得到

$$\begin{aligned} dV = &\left(\frac{\partial V}{dt} + \frac{v}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{\eta^2 v}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right)dt \\ &+ \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial v}dv. \end{aligned} \tag{3.5.38}$$

因为价格方差 v 不是一个可交易的证券, 为了构造一个无风险对冲投资组合, 有必要包括不同到期日 T_1, T_2 和标的资产的期权. 假设投资组合包含到期日为 T_1 的 Δ_1 份期权, 到期日为 T_2 的 Δ_2 份期权以及 Δ_S 份标的资产, 那么投资组合的价值为

$$\Pi = \Delta_1 V(S, v, t; T_1) + \Delta_2 V(S, v, t; T_2) + \Delta_S S.$$

从此以后, 当谈及不同到期日的期权时, 不提 S, v 和 t 的依赖性. 假设形式上写

$$\frac{dV(T_i)}{V(T_i)} = \mu_i dt + \sigma_i^S dZ_S + \sigma_i^v dZ_v, \quad i = 1, 2, \tag{3.5.39}$$

并且利用方程 (3.5.38) 中的结果得到

$$\begin{aligned} \mu_i = &\frac{1}{V(T_i)}\left[\frac{\partial V(T_i)}{\partial t} + \frac{v}{2}S^2\frac{\partial^2 V(T_i)}{\partial S^2} + \rho\eta v S\frac{\partial^2 V(T_i)}{\partial S \partial v} + \frac{\eta^2 v}{2}\frac{\partial V(T_i)}{\partial v^2}\right. \\ &\left. + \mu S\frac{\partial V(T_i)}{\partial S} + k(\overline{v} - v)\frac{\partial V(T_i)}{\partial v}\right], \\ \sigma_i^S = &\frac{1}{V(T_i)}\sqrt{v}S\frac{\partial V(T_i)}{\partial S}, \quad \sigma_i^v = \frac{1}{V(T_i)}\eta\sqrt{v}\frac{\partial V(T_i)}{\partial v}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

因为仅有两个风险因子 (通过两个布朗过程 Z_S 和 Z_v 建立模型), 并且在投资组合中三个交易证券可利用, 所以形成一个瞬时的无风险投资组合总是可能的. 假设交易策略是自融资的, 那么投资组合价值的变化仅由可交易证券价格的变化引起. 根

据下面取证券份额为瞬时常数的 "实际" Black-Scholes 方法, 于是投资组合价值的微分变化为

$$\begin{aligned}d\Pi &= \Delta_1 dV(T_1) + \Delta_2 dV(T_2) + \Delta_S dS \\ &= [\Delta_1\mu_1 V(T_1) + \Delta_2\mu_2 V(T_2) + \Delta_S \mu S]dt \\ &\quad +[\Delta_1\sigma_1^S V(T_1) + \Delta_2\sigma_2^S V(T_2) + \Delta_S\sqrt{v}S]dZ_S \\ &\quad +[\Delta_1\sigma_1^v V(T_1) + \Delta_2\sigma_2^v V(T_2)]dZ_v.\end{aligned}$$

为了消去 $d\Pi$ 中的随机项, 必须选取 Δ_1, Δ_2 和 Δ_S, 使得它们满足下面两个方程:

$$\begin{aligned}&\Delta_1\sigma_1^S V(T_1) + \Delta_2\sigma_2^S V(T_2) + \Delta_S\sqrt{v}S = 0, \\ &\Delta_1\sigma_1^v V(T_1) + \Delta_2\sigma_2^v V(T_2) = 0.\end{aligned}$$

投资组合现在成为瞬时无风险的. 利用无套利原理, 瞬时无风险投资组合必定获得无风险利率 r, 即

$$\begin{aligned}d\Pi &= [\Delta_1\mu_1 V(T_1) + \Delta_2\mu_2 V(T_2) + \Delta_S\mu S]dt \\ &= r[\Delta_1 V(T_1) + \Delta_2 V(T_2) + \Delta_S S]dt.\end{aligned}$$

给出 Δ_1, Δ_2 和 Δ_S 的第三个方程

$$\Delta_1(\mu_1 - r)V(T_1) + \Delta_2(\mu_2 - r)V(T_2) + \Delta_S(\mu - r)S = 0,$$

将 Δ_1, Δ_2 和 Δ_S 的三个线性方程放到下面的矩阵形式中:

$$\begin{pmatrix}(\mu_1 - r)V(T_1) & (\mu_2 - r)V(T_2) & (\mu - r)S \\ \sigma_1^S V(T_1) & \sigma_2^S V(T_2) & \sqrt{v}S \\ \sigma_1^v V(T_1) & \sigma_2^v V(T_2) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_S\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}. \tag{3.5.40}$$

注意: 第二行和第三行是独立的. 对方程 (3.5.40) 的齐次系统, 仅当其系数矩阵中的第一行能表示成第二行或第三行的一个线性组合时, Δ_1, Δ_2 和 Δ_S 的非平凡解存在. 在这种情况下, 系数矩阵是奇异的. 这等价于存在一对乘数 $\lambda_S(S, v, t)$ 和 $\lambda_v(S, v, t)$, 使得

$$\mu_i - r = \lambda_S\sigma_i^S + \lambda_v\sigma_i^v,\ i = 1, 2 \quad 和 \quad \mu - r = \lambda_S\sqrt{v}. \tag{3.5.41}$$

换句话说, 第一行是 λ_S 乘以第二行与 λ_v 乘以第三行的和. 乘积 λ_S 和 λ_v 可以分别看成是资产价格和方差的风险市场价格. 一般地, 它们是 S, v 和 t 的函数. 将 μ_i, σ_i^S 和 σ_i^v (见式 (3.5.39)) 的表达式代到式 (3.5.41) 中得到 (略去下标 "i")

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{v}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\eta v S\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2}\frac{\partial V}{\partial v^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} \\ &+ [k(\overline{v} - v) - \lambda_v\eta\sqrt{v}]\frac{\partial V}{\partial v} - rV = 0.\end{aligned} \tag{3.5.42}$$

有趣的是, 当资产价格风险 λ_S 的市场价格根据关系式被消除时, $\mu - r = \lambda_S\sqrt{v}$, 只有方差风险 λ_v 的市场价格出现在方程中. 这是因为标的资产是一个可交易证券, 虽然依赖于价格方差的期权价值是可交易的, 但价格方差不能直接交易.

Heston (1993) 作出假设 $\lambda_v(S, v, t)$ 是 $\sqrt{v}$ 的常数倍, 于是在方程 (3.5.42) 中, $\dfrac{\partial V}{\partial v}$ 的系数是 v 的一个线性函数. 不失一般性, 对于某些常数 k' 和 $\overline{v}'$, 可以将漂移项写成形式 $k'(\overline{v}' - v)$, 其中 k' 和 $\overline{v}'$ 可看成是 v 的漂移率的风险调节参数.

2. 欧式看涨期权的价格函数

想找到敲定价格为 X 和到期日为 T 的欧式看涨期权的价格函数, 其标的资产价格动态满足方程 (3.5.37a), (3.5.37b). 这对处理期货看涨期权可能是更方便的. 令 f_t 表示在 t 时刻到期日为 T 标的资产的期货价格, 定义 $x_t = \ln \dfrac{f_t}{X}$. 令 $c(x, v, \tau; X)$ 表示期货看涨期权价格函数, 其中 $\tau = T - t$, 它满足方程

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{v}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{v}{2}\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\eta^2 v}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial v^2} + \rho\eta v\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial v} + k'(\overline{v}' - v)\frac{\partial c}{\partial v}, \tag{3.5.43}$$

并且初始条件为

$$c(x, v, 0) = \max(e^x - 1, 0).$$

期货看涨期权价格函数形式为

$$c(x, v, \tau) = e^x G_1(x, v, \tau) - G_0(x, v, \tau), \tag{3.5.44}$$

其中 $G_0(x, v, \tau)$ 为风险中性概率. 期货看涨期权在到期日处于实值. 假设期权到期处于实值, 那么 $G_1(x, v, \tau)$ 与到期期货价格的风险中性期望有关. 两个函数 $G_j(x, v, \tau)$ $(j = 0, 1)$ 满足下列微分方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_j}{\partial \tau} = &\frac{v}{2}\frac{\partial^2 G_j}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{2} - j\right)v\frac{\partial G_j}{\partial x} + \frac{\eta^2 v}{2}\frac{\partial^2 G_j}{\partial v^2} \\ &+\rho\eta v\frac{\partial^2 G_j}{\partial x \partial v} + k'(\overline{v}' - v)\frac{\partial G_j}{\partial v}, \quad j = 0, 1,\end{aligned} \tag{3.5.45}$$

初始条件为

$$G_j(x, v, 0) = \mathbf{1}_{\{x \geqslant 0\}}.$$

Heston (1993) 阐述了用 Fourier 变换方法来求解上述微分方程. 令 $\widehat{G}_j(m, v, \tau)$ 表示 $G_j(x, v, \tau)$ 的 Fourier 变换, 其中

$$\widehat{G}_j(m, v, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-imx} G_j(x, v, \tau) dx, \quad j = 0, 1.$$

初始条件的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\widehat{G}_j(m,v,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-imx} G_j(x,v,0)dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-imx}dx = \frac{1}{im}, \quad j=0,1.\end{aligned}$$

对微分方程 (3.5.45) 取 Fourier 变换得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{G}_j}{\partial \tau} =& -\frac{m^2}{2}v\widehat{G}_j - imv\left(\frac{1}{2}-j\right)\widehat{G}_j \\ &+ \frac{\eta^2}{2}v\frac{\partial^2 \widehat{G}_j}{\partial v^2} + im\rho\eta v\frac{\partial \widehat{G}_j}{\partial v} + k'(\overline{v}'-v)\frac{\partial \widehat{G}_j}{\partial v} \\ =& v\left(\alpha\widehat{G}_j + \beta\frac{\partial \widehat{G}_j}{\partial v} + \gamma\frac{\partial^2 \widehat{G}_j}{\partial v^2}\right) + \delta\frac{\partial \widehat{G}_j}{\partial v}, \quad j=0,1, \end{aligned} \tag{3.5.46}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{m^2}{2} - im\left(\frac{1}{2}-j\right), \quad \beta = im\rho\eta - k', \\ \gamma &= \frac{\eta^2}{2}, \quad \delta = k'\overline{v}'.\end{aligned}$$

寻求 $\widehat{G}_j$ 的仿射形式的解, 使得

$$\widehat{G}_j(m,v,\tau) = \exp(A(m,\tau) + B(m,\tau)v)G_j(m,v,0).$$

将以上的假设形式代入到方程 (3.5.46) 中得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial \tau} &= \alpha + \beta B + \gamma B^2 = \gamma(B-\rho_+)(B-\rho_-), \\ \frac{\partial a A}{\partial \tau} &= \delta B,\end{aligned}$$

并且 $B(m,0)=0$, $A(m,0)=0$, 其中 $\rho_\pm = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma}$. 记

$$\rho = \rho_-/\rho_+ \quad 和 \quad \xi = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma},$$

则 $B(m,\tau)$ 和 $A(m,\tau)$ 的解为

$$\begin{aligned}B(m,\tau) &= \rho_-\frac{1-e^{-\xi\tau}}{1-\rho e^{-\xi\tau}}, \\ A(m,\tau) &= \delta\left(\rho_-\tau - \frac{2}{\eta^2}\ln\frac{1-\rho e^{-\xi\tau}}{1-\rho}\right).\end{aligned}$$

最后, $G_j(x,v,\tau)$ 的解可通过取 $\widehat{G}_j(m,v,\tau)$ 的 Fourier 逆变换得到, 即

$$G_j(x,v,\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{\exp(imx + A(m,\tau) + B(m,\tau)v)}{im}\right) dm, \quad j = 0,1. \tag{3.5.47}$$

3.6 习　题

3.1 考虑一个关于标的商品的远期合约, 求标的商品和一个复制远期合约的债券 (债券的到期日与远期合约的到期日一致) 组成的投资组合.

(a) 证明对冲比率 Δ 始终为 1, 给出金融上的论据证明 $\Delta = 1$ 是正确的;

(b) 令 $B(t,T)$ 表示在 T 时刻到期的零息票债券在时刻 t 单位面值的价格, S 表示在时刻 t 商品的价格, 证明远期价格 $F(S,\tau)$ 为

$$F(S,\tau) = S/B(t,T), \quad \tau = T - t.$$

3.2 考虑包含 Δ_t 份风险资产和以货币市场存款形式体现的无风险资产的 M_t 美元的投资组合. 投资组合可以动态调整以便复制期权. 令 S_t 和 $V(S_t,t)$ 分别表示标的资产和期权价值的价格过程. 令 r 表示无风险利率, Π_t 表示**自融资**(self-financing) 复制投资组合的价值. 当采用自融资交易策略时得到

$$\Pi_t = \Delta_t S_t + M_t \quad 和 \quad d\Pi_t = \Delta_t\, dS_t + rM_t dt,$$

其中 r 为无风险利率. 解释为什么微分项 $S_t d\Delta_t$ 不出现在 $d\Pi_t$ 中. 资产价格动态假设服从几何布朗过程

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t.$$

为了期权价值和复制投资组合的价值始终相匹配, 证明持有资产份额的数量为

$$\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S_t}.$$

为了获得 V 的 Black-Scholes 方程, 应如何进一步进行下去?

3.3 下面的叙述引自 Black (1989):

"…… 一个担保 (看涨期权) 的期望回报率应该取决于担保的风险, 以同样的方式, 普通股票的期望回报率取决于它的风险 ……".

说明与风险和风险中性市场价格的概念有关的上面叙述的含义.

3.4 考虑一个包含 Δ_t 份价格过程是 S_t 的标的风险资产和具有无风险利率 r 的货币市场存款的 β_t 美元的自融资投资组合. 假设最初投资组合包含 α_0 份风险

资产和货币市场存款的 β_0 美元, 证明投资组合的价值 V_t 在时刻 t 为

$$\begin{aligned}V_t &= \alpha_t S_t + \beta_t e^{rt} \\ &= \alpha_0 S_0 + \beta_0 + \int_0^t \alpha_u dS_u + \int_0^t r\beta_u e^{ru} du.\end{aligned}$$

3.5　证明

$$V(t) = V(0) + \sum_{m=0}^{M} \int_0^t h_m(u) dS_m(u)$$

当且仅当

$$V^*(t) = V^*(0) + \sum_{m=0}^{M} \int_0^t h_m(u) dS_m^*(u),$$

其中 $h_m(t)$ 为时刻 t 第 m 个证券的持有资产, $V^*(t) = V(t)/S_0(t)$, $S_m^*(t) = S_m(t)/S_0(t)\,(m = 1, 2, \cdots, M)$. 推导在计价单位转换后一个自融资的投资组合仍然是自融资的.

3.6　假设商品的持有成本是 b, 证明在 Black-Scholes 公式下, 商品期权价格满足的微分方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + bS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

其中 $V(S,t)$ 为期权的价格, σ 和 r 分别为常数波动率和无风险利率. 求关于商品欧式看跌和看涨期权价格函数的看跌和看涨期权平价关系.

3.7　假设资产的价格过程服从扩散过程

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dZ_t.$$

证明取决于上面资产的衍生证券 V 的价格满足相应方程的形式为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

其中 r 为无风险利率. 此外, 衍生产品价格 V 不依赖于扩散过程的瞬时平均值 $\mu(S_t, t)$.

3.8　由 Itô 过程, 令随机状态变量 S_t 的动态满足

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dZ_t.$$

对二次可微函数 $f(S_t)$, $f(S_t)$ 的微分为

$$df = \left[\mu(S_t, t)\frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2(S_t, t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\right] dt + \sigma(S_t, t)\frac{\partial f}{\partial S_t} dZ_t.$$

令 $\psi(S_t,t;S_0,t_0)$ 表示在将来时间 t, S_t, 初始时刻 t_0 和初始值为 S_0 的转移密度函数. 通过考虑 $f(S_t)$ 期望值的时间导数, 令 $\frac{d}{dt}E[f(S_t)]$ 和 $E\left[\frac{df(S_t)}{dt}\right]$ 相等, 其中

$$\frac{d}{dt}E[f(S_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{\partial\psi}{\partial t}(\xi,t;S_0,t_0)d\xi, \tag{i}$$

$$E\left[\frac{df(S_t)}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu(\xi,t)\frac{\partial f}{\partial\xi}+\frac{\sigma^2(\xi,t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}\right]\psi(\xi,t;S_0,t_0)d\xi, \tag{ii}$$

证明 $\psi(S_t,t;S_0,t_0)$ 满足下面的前向 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial S_t}[\mu(S_t,t)\psi]-\frac{\partial^2}{\partial S_t^2}\left[\frac{\sigma^2(S_t,t)}{2}\psi\right]=0.$$

提示: 对方程 (ii) 中的积分进行分部积分.

3.9 对推导出的倒向 Fokker-Planck 方程, 考虑

$$\psi(S_t,t;S_0,t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(S_t,t;\xi,u)\psi(\xi,u;S_0,t_0)d\xi,$$

其中 u 为满足 $t_0<u<t$ 的中间时间. 两边关于 u 微分得到

$$\begin{aligned}0=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\psi}{\partial u}(S_t,t;\xi,u)\psi(\xi,u;S_0,t_0)d\xi\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\psi(S_t,t;\xi,u)\frac{\partial\psi}{\partial u}(\xi,u;S_0,t_0)d\xi.\end{aligned}$$

由习题 3.8 中推出的前向 Fokker-Planck 方程得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\psi}{\partial u}(S_t,t;\xi,u)\psi(\xi,u;S_0,t_0)d\xi\\=&-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{\partial}{\partial\xi}[\mu(\xi,u)\psi(\xi,u;S_0,t_0)]\right.\\&\left.+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\sigma^2(\xi,u)}{2}\psi(\xi,u;S_0,t_0)\right]\right\}\psi(S_t,t;\xi,u)d\xi.\end{aligned}$$

通过对最后的积分项进行分部积分并取极限 $u\to t_0$, 证明 $\psi(S_t,t;S_0,t_0)$ 满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial t_0}+\mu(S_0,t_0)\frac{\partial\psi}{\partial S_0}+\frac{\sigma^2(S_0,t_0)}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial S_0^2}=0.$$

提示: 当 $u\to t_0$ 时, $\psi(\xi,u;S_0,t_0)\to\delta(\xi-S_0)$.

3.10 令 Q 是货币市场存款作为计价单位的鞅测度, Q^* 表示资产价格 S_t 作为计价单位的等价鞅测度. 假设在 Q 下, S_t 服从漂移率为 r 和波动率为 σ 的几何布朗过程, 其中 r 为无风险利率. 利用方程 (3.2.11), 证明

$$\left.\frac{dQ^*}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_T} = \frac{S_T}{S_0}e^{-rT} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma Z_T},$$

其中 Z_T 为 Q 布朗过程. 利用 Girsanov 定理, 证明

$$Z_T^* = Z_T - \sigma T$$

是 Q^* 布朗过程. 解释为什么

$$E_{Q^*}[\mathbf{1}_{\{S_T>X\}}] = N\left(\frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

由此推导 (见方程 (3.3.12b))

$$E_Q[S_T\mathbf{1}_{\{S_T>X\}}] = e^{rT}S_0 N\left(\frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

令 U_t 是另一个资产. 在 Q 下, 价格动态满足

$$\frac{dU_t}{U_t} = rdt + \sigma_U dZ_t^U,$$

其中 $dZ_t^U dZ_t = \rho dt$, ρ 为相关系数. 证明

$$Z_t^{*U} = Z_t^U - \rho\sigma_U T$$

是一个 Q^* 布朗过程.

提示: 因为 dZ_t^U, dZ_t 与相关系数 ρ 有关, 所以可以写

$$dZ_t^U = \rho dZ_t + \sqrt{1-\rho^2}dZ_t^{\perp},$$

其中 $Z_t^{\perp}$ 与 Z_t 是不相关的.

3.11 由欧式标准看涨期权的 Black-Scholes 定价函数 $c(S,\tau)$, 证明当波动率为零和无穷时, 看涨期权价格的极限值分别为欧式看涨期权价格的下界和上界, 即

$$\lim_{\sigma\to 0^+} c(S,\tau) = \max(S - Xe^{-r\tau}, 0)$$

和

$$\lim_{\sigma\to\infty} c(S,\tau) = S.$$

给出上述结论的一个适当的金融解释. 显然, 当 $\sigma \to \infty$ 时, X 不出现在 $c(S,\tau)$ 中. 从金融直觉上来看, 它是合理的吗?

3.12　证明一般地, 当欧式期权处于虚值时, 资产价格的更高波动率或更长到期时间使得期权在到期日处于实值更有可能. 为什么将对 Δ 的值产生强烈影响? 一般地, 当期权处于实值时, 有同样的效果或相反的效果吗? 同时, 给出在图 3.4 中当 $\tau \to 0^+$ 和 $\tau \to \infty$ 分别取极限时 Δ 曲线渐近性态的金融解释.

3.13　证明当欧式看涨期权价格是资产价格的凸函数时, 看涨期权价格的弹性总是大于或等于 1. 给出金融上的论证, 解释为什么当期权更大程度成为虚值和接近到期日时, 欧式期权的价格弹性绝对值增大. 你能否想象到欧式看跌期权的弹性绝对值比 1 更小的情况, 即欧式看跌期权有比标的资产更小的风险?

3.14　假设衍生证券的希腊字母定义为

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial f}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}.$$

(a) 对 Δ 中性投资组合, 求当 $\Delta = 0$ 时 Θ 和 Γ 之间的关系;

(b) 证明对一个处于实值连续支付红利资产的欧式看涨期权, 当红利率充分高时, Θ 可以成为正的;

(c) 通过金融论证, 解释为什么当资产价格充分高时, Θ 的值渐近地从下面趋于 $-rXe^{-r\tau}$.

3.15　令 $P_\alpha(\tau)$ 表示通过资产价格标准化的欧式看跌期权价格, 即

$$P_\alpha(\tau) = p(S,\tau)/S = \alpha e^{-r\tau} N(-d_-) - N(-d_+),$$

其中

$$\gamma_- = \frac{r - \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}, \quad \gamma_+ = \frac{r + \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}, \quad \alpha = \frac{X}{S}, \quad \beta = \frac{\ln \dfrac{1}{\alpha}}{\sigma},$$

$$d_- = \gamma_-\sqrt{\tau} + \frac{\beta}{\sqrt{\tau}}, \quad d_+ = \gamma_+\sqrt{\tau} + \frac{\beta}{\sqrt{\tau}}.$$

想要探索欧式看跌期权价格瞬时变化率的性态. 发现 $P_\alpha(\tau)$ 关于 τ 的导数为

$$P'_\alpha(\tau) = \alpha e^{-r\tau}\left[-rN(-d_-) + n(-d_-)\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}\right].$$

根据关系 $P'_\alpha(\tau) = \alpha e^{-r\tau} f(\tau)$ 定义 $f(\tau)$, 并且二次多项式 $p_2(\tau)$ 为

$$p_2(\tau) = \gamma_-\gamma_+\tau^2 - [\beta(\gamma_- + \gamma_+) + 1]\tau + \beta^2.$$

令 τ_1 和 τ_2 表示 $p_2(\tau)$ 的两个实根, 其中 $\tau_1 < \tau_2$, 并且令 $\tau_0 = \dfrac{\beta^2\sigma}{2r\beta+\sigma}$. $P'_\alpha(\tau)$ 的符号行为表明了下列性质 (Dai and Kwok, 2005c):

(1) 当 $r \leqslant 0$ 时, 对所有的 $\tau \geqslant 0$, $P'_\alpha(\tau) > 0$;

(2) 当 $r > 0$ 和 $\beta \geqslant 0$ (相当于 $S \geqslant X$) 时, 存在唯一的 $\tau^* > 0$, 使得 $P'_\alpha(\tau)$ 改变符号, 并且当 $\tau < \tau^*$ 时, $P'_\alpha(\tau) > 0$, 当 $\tau > \tau^*$ 时, $P'_\alpha(\tau) < 0$;

(3) 当 $r > 0$ 和 $\beta < 0$ (相当于 $S < X$) 时, 存在下面两种可能性:

(a) 当 $\tau \in (\tau_1^*, \tau_2^*)$ 时, 可以存在一个时间区间 (τ_1^*, τ_2^*), 使得 $P'_\alpha(\tau) > 0$; 否则, $P'_\alpha(\tau) \leqslant 0$, 这只有当下面条件之一满足时才发生:

(i) $\gamma_- < 0,\ f(\tau_2) > 0$;

(ii) $\gamma_- > 0, \beta(\gamma_- + \gamma_+) + 1 > 0, \Delta = \beta^2\sigma^2 + 1 + \dfrac{4\beta r}{\sigma} > 0,\ f(\tau_1) > 0$;

(iii) $\gamma_- = 0, \beta(\gamma_- + \gamma_+) + 1 > 0,\ f(\tau_0) > 0$.

(b) 当条件 (i)~(iii) 都不成立时, 对所有 $\tau \geqslant 0$, $P'_\alpha(\tau) \leqslant 0$.

3.16 证明欧式看涨期权的价格满足

$$c(S,\tau;X) = S\frac{\partial c}{\partial S}(S,\tau;X) + X\frac{\partial c}{\partial X}(S,\tau;X).$$

提示: 看涨期权价格函数是 S 和 X 的一个线性齐次函数, 即

$$c(\lambda S,\tau;\lambda X) = \lambda c(S,\tau;X).$$

3.17 考虑欧式封顶看涨期权, 它的最终收益函数为

$$c_M(S,0;X,M) = \min(\max(S-X,0),M),$$

其中 X 为敲定价格, M 为顶. 证明欧式封顶看涨期权的价格为

$$c_M(S,\tau;X,M) = c(S,\tau;X) - c(S,\tau;X+M),$$

其中 $c(S,\tau;X+M)$ 是敲定价格为 $X+M$ 的欧式标准看涨期权的价格.

3.18 考虑由证券发行机构卖出的欧式看涨期权价格, 唯一资产是 α (<1) 单位标的资产, 那么在到期日, 这个看涨期权最终收益为

$$\begin{cases} S_T - X, & \alpha S_T \geqslant S_T - X \geqslant 0, \\ \alpha S_T, & S_T - X > \alpha S_T; \end{cases}$$

否则为零. 证明这个欧式看涨期权的价格为 (Johnson and Stulz, 1987)

$$c_L(S,\tau;X,\alpha) = c(S,\tau;X) - (1-\alpha)c\Big(S,\tau;\frac{X}{1-\alpha}\Big), \quad \alpha < 1,$$

其中 $c\left(S,\tau;\dfrac{X}{1-\alpha}\right)$ 是敲定价格为 $\dfrac{X}{1-\alpha}$ 的欧式标准看涨期权的价格.

3.19　考虑关于一个支付红利率为 q 的标的资产的欧式看涨期权和看跌期权的价格函数, 证明它们的 Δ 和 Θ 分别为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial S} &= e^{-q\tau}\ N(\widehat{d_1}),\\
\frac{\partial p}{\partial S} &= e^{-q\tau}\ [N(\widehat{d_1})-1],\\
\frac{\partial c}{\partial t} &= -\frac{Se^{-q\tau}\sigma N'(\widehat{d_1})}{2\sqrt{\tau}} + qSe^{-q\tau}N(\widehat{d_1}) - rXe^{-r\tau}N(\widehat{d_2}),\\
\frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{Se^{-q\tau}\sigma N'(\widehat{d_1})}{2\sqrt{\tau}} - qSe^{-q\tau}N(-\widehat{d_1}) + rXe^{-r\tau}N(-\widehat{d_2}),
\end{aligned}$$

其中 $\widehat{d_1}$ 和 $\widehat{d_1}$ 的定义参见方程 (3.4.4). 推导上述看涨和看跌期权价格的 Γ, Λ 和 ρ 的表达式.

3.20　在欧式期权模型中, 当参数与时间有关, 即资产价格的波动率为 $\sigma(t)$, 红利收益为 $q(t)$ 和无风险利率为 $r(t)$ 时, 推导出相应的看跌–看涨期权的平价关系.

3.21　解释虽然资产价格经历一个跳跃, 为什么期权价格应该连续穿过红利发放日? 利用无套利原理, 推出下面的跳条件:

$$V(S(t_d^+),t_d^+) = V(S(t_d^-),t_d^-),$$

其中 V 表示期权价格, t_d^- 和 t_d^+ 表示恰好在红利发放日 t_d 之前和之后的时间.

3.22　假设红利和利息收入按比率 R 付税, 但资本增值税为零. 当资产以固定比率 q 连续支付红利, 并且假设无风险利率 r 也是常数时, 求欧式看跌和看涨期权的价格公式.

提示: 解释为什么在 Black-Scholes 公式中无风险利率 r 和红利率 q 应该分别用 $r(1-R)$ 和 $q(1-R)$ 来代替.

3.23　考虑一个期货, 其标的资产在 t 和 T 之间离散支付 N 次红利, 令 D_i 表示在除息日 t_i 第 i 次支付红利的数量, 证明期货价格为

$$F(S,t) = Se^{r(T-t)} - \sum_{i=1}^{N} D_i e^{r(T-t_i)},$$

其中 S 为流动资产价格, r 为无风险利率. 考虑关于上述期货的欧式看涨期权, 证明看涨期权的价格 $c_F(F,t)$ 满足微分方程 (Brenner et al., 1985)

$$\frac{\partial c_F}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\left[F + \sum_{i=1}^{N} D_i e^{r(T-t_i)}\right]^2 \frac{\partial^2 c_F}{\partial F^2} - rc_F = 0.$$

3.24 一个在某个将来时间 T_1 生效且在 T_2 $(T_2 > T_1)$ 到期的**远期启动**(forward start) 期权. 在 T_1 时刻设置敲定价格等于资产价格, 使得期权在将来期权的初始时间 T_1 处于平值. 考虑一个远期启动看涨期权, 其标的资产在当前时间 t 的价值为 S, 固定红利收益为 q, 证明远期启动看涨期权的价值为

$$e^{-qT_1}c(S, T_2 - T_1; S),$$

其中 $c(S, T_2 - T_1; S)$ 是到期时间为 $T_2 - T_1$ 的平值看涨期权的价格 (敲定价格与资产价格相同).

提示: 平值看涨期权的价格是与资产价格成比例的.

3.25 证明在选择的日期 T_c 选择期权的收益函数能用一种方法分解为下面的形式:

$$\begin{aligned} V(S_{T_c}, T_c) &= \max(p + S_{T_c}e^{-q(T-T_c)} - Xe^{-r(T-T_c)}, p) \\ &= p + e^{-q(T-T_c)}\max(S_{T_c} - Xe^{-(r-q)(T-T_c)}, 0) \end{aligned}$$

(见方程 (3.4.22)). 求在上述分解的基础上选择期权价格公式的替代表示式, 并证明你的新公式与方程 (3.4.23) 中给出的公式是一致的.

3.26 假设选择期权持有者在现在和后面截止日 T_c 之间的任何时间都能对看涨期权或看跌期权作出选择. 对持有者来说, 在 T_c 前的某个时间作出选择是最佳的吗?

提示: 显然, 选择期权的价格函数依赖于 T_c (见方程 (3.4.23)). 检查价格函数是否是 T_c 的递增或递减函数, 考虑 T_c 与期权的到期日一致的极端例子.

3.27 考虑一个赋予持有者有选择权利的选择期权, 在从现在起到选择的日期 T_c 期间, 是否期权是一个执行价格为 X_1 且到期时间为 $T_1 - T_c$ 的欧式看涨期权, 或一个执行价格为 X_2 且到期时间为 $T_2 - T_c$ 的欧式看跌期权. 证明选择期权在当前时间 (设为零) 的价格为 (Rubinstein, 1992)

$$\begin{aligned} &Se^{-qT_1}N_2(x, y_1; \rho_1) - X_1e^{-rT_1}N_2(x - \sigma\sqrt{T_c}, y_1 - \sigma\sqrt{T_1}; \rho_1) \\ &- Se^{-qT_2}N_2(-x, -y_2; \rho_2) + X_2e^{-rT_2}N_2(-x + \sigma\sqrt{T_c}, -y_2 + \sigma\sqrt{T_2}; \rho_2), \end{aligned}$$

其中 q 为标的资产连续支付的红利率. 参数定义为

$$x = \frac{\ln\dfrac{S}{X} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T_c}{\sigma\sqrt{T_c}}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{T_c}{T_1}}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{T_c}{T_2}},$$

$$y_1 = \frac{\ln\dfrac{S}{X_1} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad y_2 = \frac{\ln\dfrac{S}{X_2} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}},$$

其中 X 为下面的非线性代数方程的解:

$$Xe^{-q(T_1-T_c)}N(z_1) - X_1e^{-r(T_1-T_c)}N(z_1 - \sigma\sqrt{T_1-T_c})$$
$$+Xe^{-q(T_2-T_c)}N(-z_2) - X_2e^{-r(T_2-T_c)}N(-z_2 + \sigma\sqrt{T_2-T_c}) = 0,$$

其中

$$z_1 = \frac{\ln\dfrac{X}{X_1} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T_1 - T_c)}{\sigma\sqrt{T_1-T_c}}, \quad z_2 = \frac{\ln\dfrac{X}{X_2} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T_2 - T_c)}{\sigma\sqrt{T_2-T_c}}.$$

提示: 两个重叠的标准布朗增量 $Z(T_c)$ 和 $Z(T_1)$ 具有期望为零, 方差为 1 和相关系数为 $\sqrt{\dfrac{T_c}{T_1}}$ $(T_c < T_1)$ 的联合正态分布.

3.28　证明在方程 (3.4.27) 的最后积分中第一项能表示为

$$\begin{aligned}&e^{-r(T_1-t)}\int_{\widetilde{S}_{T_1}}^{\infty} S_{T_1}N_1(d_1)\psi(S_{T_1};S)dS_{T_1}\\ =&e^{-r(T_1-t)}\int_{\ln\widetilde{S}_{T_1}}^{\infty}\int_{\ln X_2}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma\sqrt{T_1-t}}\frac{1}{\sigma\sqrt{T_2-T_1}}Se^{r(T_1-t)}\\ &\times\exp\left(-\frac{\left\{y-\left[\ln S+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T_1-t)\right]\right\}^2}{2\sigma^2(T_1-t)}\right)\\ &\times\exp\left(-\frac{\left\{x-\left[y+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T_2-T_1)\right]\right\}^2}{2\sigma^2(T_2-T_1)}\right)dxdy,\end{aligned}$$

其中 $x = \ln S_{T_2}$, $y = \ln S_{T_1}$. 比较方程 (3.4.27) 中的第二项, 证明上面积分可归结为方程 (3.4.29) 中给出的第一项.

提示: 方程 (3.4.27) 中的第二项可表示为

$$\begin{aligned}&-X_2e^{-r(T_2-t)}\int_{\ln\widetilde{S}_{T_1}}^{\infty}\int_{\ln X_2}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma\sqrt{T_1-t}}\frac{1}{\sigma\sqrt{T_2-T_1}}\\ &\times\exp\left(-\frac{\left\{y-\left[\ln S+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T_1-t)\right]\right\}^2}{2\sigma^2(T_1-t)}\right)\\ &\times\exp\left(-\frac{\left\{x-\left[y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T_2-T_1)\right]\right\}^2}{2\sigma^2(T_2-T_1)}\right)dxdy.\end{aligned}$$

3.29　解释为什么看涨的看涨期权和看涨的看跌期权价格的总和等于到期日为 T_2 的看涨期权的价格. 证明欧式看涨的看跌期权价格为

$$c(S,t) = X_2 e^{-r(T_2-t)} N_2(a_2, -b_2; -\rho) - S N_2(a_1, -b_1; -\rho) \\ - e^{-r(T_1-t)} X_1 N(a_2),$$

其中 a_1, b_1, a_2, b_2 在 3.4.4 小节中已经定义.

提示: 利用关系

$$N_2(a, b; \rho) + N_2(a, -b; -\rho) = N(a).$$

3.30　求下列欧式复合期权的价格公式:

(a) 当标的资产连续支付红利率 q 时看跌的看涨期权;

(b) 当标的资产是一个期货时看涨的看跌期权;

(c) 当标的资产有固定持有成本 b 时看跌的看跌期权.

3.31　考虑一个未定权益, 它在到期日 T 的价值为

$$\min(S_{T_0}, S_T),$$

其中 T_0 为在到期日之前的某个中间时间, $T_0 < T$, 并且 S_T 和 S_{T_0} 分别为 T 和 T_0 时的资产价格. 假设不支付红利标的资产价格服从几何布朗过程, 证明在 t 时刻, 未定权益的价值为

$$V = S[1 - N(d_1) + e^{-r(T-T_0)} N(d_2)],$$

其中 S 为 t 时刻的资产价格,

$$d_1 = \frac{r(T-T_0) + \frac{\sigma^2}{2}(T-T_0)}{\sigma\sqrt{T-T_0}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-T_0}.$$

3.32•　在风险债务的 Merton 模型中, 假设定义

$$\sigma_V(\tau; d) = \frac{\sigma A}{V}\frac{\partial V}{\partial A}$$

为风险债务价值的波动率, 并且用 $s(\tau; d)$ 表示信用差价, 其中 $s(\tau; d) = Y(\tau) - r$. 证明 (Merton, 1974)

(a) $\dfrac{\partial s}{\partial d} = \dfrac{1}{\sigma\tau d}\sigma_V(\tau; d) > 0$;

(b) $\dfrac{\partial s}{\partial \sigma^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{\tau}}\dfrac{N'(d_1)}{N(d_1)}\sigma_V(\tau; d) > 0$, 其中 $d_1 = \dfrac{\ln d}{\sigma\sqrt{\tau}} - \dfrac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$;

(c) $\dfrac{\partial s}{\partial r} = -\dfrac{\sigma_V}{\sigma}(\tau; d) < 0$.

对上述每一个结果给出金融解释.

3.33　公司是一个由它的资产组成的实体. 令 A_t 表示公司资产的市场价值, 假设全部资产价值是服从下面模型的一个随机过程:

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu dt + \sigma dZ_t,$$

其中 μ 和 σ^2 (假设为常数) 分别为关于 A_t 回报率的瞬时期望和方差. 令 C 和 D 分别表示流动负债的市场价值和债务的市场价值, 令 T 是面值为 D_T 的债务的到期日. 假设数量为 C_T 的流动负债在时刻 T 是应支付的, 并且它构成一个比债务时间长的权益. 令 F 表示时期 T 的利息和红利支付总数的现值. 为简单起见, 假设 F 在时刻 $t=0$ 时预付. 如果在到期日 T, A_T 小于总计应付金额, 即

$$A_T < D_T + C_T,$$

则债务违约.

(a) 证明违约概率为

$$p = N\left(\frac{\ln\dfrac{D_T+C_T}{A_0-F} - \mu T + \dfrac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right);$$

(b) 说明为什么关于债务的期望贷款损失 L 为

$$EL = \int_{C_T}^{D_T+C_T} (D_T + C_T - a) f(a) da + \int_0^{C_T} D_T f(a) da,$$

其中 f 为 A_T 的密度函数. 对上述每一个积分给出金融解释.

3.34　考虑交换期权, 它赋予持有者这样的权利, 但不负有义务以风险资产 S_2 与另一个风险资产 S_1 交换. 在风险中性测度下, 令 S_1 和 S_2 的价格动态为

$$\frac{dS_i}{S_i} = (r - q_i)dt + \sigma_i dZ_i, \quad i = 1, 2,$$

其中 $dZ_1 dZ_2 = \rho dt$. 令 $V(S_1, S_2, \tau)$ 表示交换期权的价格函数, 它的最终收益取为如下形式:

$$V(S_1, S_2, 0) = \max(S_1 - S_2, 0).$$

证明 $V(S_1, S_2, \tau)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \tau} = &\frac{\sigma_1^2}{2} S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{\sigma_2^2}{2} S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \\ &+ (r - q_1) S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + (r - q_2) S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - rV.\end{aligned}$$

通过取 S_2 作为计价单位并定义类似变量

$$x = \frac{S_1}{S_2} \quad 和 \quad W(x,\tau) = \frac{V(S_1, S_2, \tau)}{S_2},$$

证明 $W(x,\tau)$ 满足的方程为

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (q_1 - q_2) x \frac{\partial W}{\partial x} - q_2 W.$$

验证解 $W(x,\tau)$ 为

$$W(x,\tau) = e^{-q_1\tau} x N(d_1) - e^{-q_2\tau} N(-d_2),$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_1}{S_2} + \left(q_2 - q_1 + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_2}{S_1} + \left(q_1 - q_2 + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2.$$

关于原来期权价格函数 $V(S_1, S_2, \tau)$ 得到

$$V(S_1, S_2, \tau) = e^{-q_1\tau} S_1 N(d_1) - e^{-q_2\tau} S_2 N(-d_2).$$

3.35 假设汇率期权的最终收益是 $F_T \mathbf{1}_{\{F_T > X\}}$. 令 $V_d(F,t)$ 表示本国货币中的期权价格, 证明

$$\begin{aligned} V_d(F,t) &= e^{-r_f(T-t)} F E_{Q_f}[\mathbf{1}_{\{F_T > X\}} | F_t = F] \\ &= e^{-r_f\tau} F N(d) = e^{-r_d\tau} e^{\delta_F^d \tau} F N(d), \end{aligned}$$

其中 $\delta_F^d = r_d - r_f$,

$$d = \frac{\ln \frac{F}{K} + \left(r_d - r_f + \frac{\sigma_F^2}{2}\right)\tau}{\sigma_F\sqrt{\tau}}, \quad \tau = T - t.$$

3.36 令 $F_{S\backslash U}$ 表示一单位美国货币的新加坡货币, $F_{H\backslash S}$ 表示一单位新加坡货币的香港货币. 可以说明在新加坡货币中 $F_{S\backslash U}$ 可作为可交易资产的价格过程. 在风险中性测度 Q_S 下, 假设 $F_{S\backslash U}$ 在新加坡货币状态中满足下面的动态系统:

$$\frac{dF_{S\backslash U}}{F_{S\backslash U}} = (r_{\text{SGD}} - r_{\text{USD}})dt + \sigma_{F_{S\backslash U}} dZ_{F_{S\backslash U}}^S,$$

其中 r_{SGD} 和 r_{USD} 分别为新加坡货币和美国货币的无风险利率. 如果 $F_{S\backslash U}$ 高于敲定水平 X, 则数字双币种期权支付一港币. 根据不同货币情况以及波动率 $\sigma_{F_{S\backslash U}}$ 和 $\sigma_{F_{H\backslash S}}$, 求数字双币种期权的价值. 如果当 $F_{S\backslash U} > \alpha F_{H\backslash U}$ 时, 它支付一港币, 则重新计算数字双币种期权, 其中 α 为固定常数, $F_{H\backslash U}$ 为一单位美国货币的香港货币价格.

提示: $F_{H\backslash U} = F_{H\backslash S}F_{S\backslash U}$.

3.37 证明在 Leland 模型 (Leland, 1985) 中, 当 $X < X^*$ $(X > X^*)$ 时, 总交易成本随敲定价格 X 而增加 (减少), 其中

$$X^* = Se^{(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}.$$

提示: 利用结果

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right) = \frac{S}{\sqrt{2\pi(T-t)}\,\sigma} d_1 \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right).$$

3.38 假设交易成本与交易资产的份额数量成比例, 而不是像在最初 Leland 模型中交易资产的美元价值. 求基于这个新交易成本的假设下, 衍生产品价格相应的方程.

3.39 根据写法 $P_n(\tau) = e^{-\lambda\tau}\dfrac{(\lambda\tau)^n}{n!}$, $\widetilde{S}_n = SX_n e^{-\lambda k\tau}$, 考虑

$$V(S,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E_{X_n}[V_{BS}(\widetilde{S}_n, \tau)]$$

(见方程 (3.5.20)), 证明

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \tau} = & -\lambda V - \lambda k S\frac{\partial V}{\partial S} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E_{X_n}\left[\frac{\partial V_{BS}}{\partial \tau}(\widetilde{S}_n, \tau)\right] \\ & + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\tau) E_{X_{m+1}}[V_{BS}(\widetilde{S}_{m+1}, \tau)].\end{aligned}$$

进一步, 根据观察

$$E_J[V(JS,\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) E_{X_{n+1}}[V_{BS}(\widetilde{S}_{n+1}, \tau)],$$

证明 $V(S,\tau)$ 满足方程 (3.5.19). 同时, 证明 $V(S,\tau)$ 和 $V_{BS}(S,\tau)$ 满足同样的最终收益条件.

3.40　假设 $\ln J$ 是标准偏差为 σ_J 的正态分布. 证明在跳扩散模型下, 欧式标准期权能表达为 (Merton, 1976)

$$V(S,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^n}{n!}V_{BS}(S,\tau;\sigma_n,r_n),$$

其中

$$\lambda'=\lambda(1+k),\quad \sigma_n^2=\sigma^2+\frac{n\sigma_J^2}{\tau},\quad r_n=r-\lambda k+\frac{n\ln(1+k)}{\tau}.$$

3.41　考虑在方程 (3.5.17) 中给出的 $d\Pi$ 表达式, 证明 $d\Pi$ 的方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(d\Pi)=&\left(\Delta-\frac{\partial V}{\partial S}\right)^2\sigma^2S^2dt\\&+\lambda E_J[\{\Delta(J-1)S-[V(JS,t)-V(S,t)]\}^2]dt.\end{aligned}$$

假设试图通过求 $\mathrm{var}(d\Pi)$ 的极小值, 尽可能对冲扩散和跳的风险. 证明可以通过选取的 Δ 来完成, 并且使得 Δ 的选取为

$$\Delta=\frac{\lambda E_J[(J-1)\{V(JS,t)-V(S,t)\}]+\sigma^2S\dfrac{\partial V}{\partial S}}{\lambda SE_J[(J-1)^2]+\sigma^2S}.$$

求在跳扩散资产价格动态下期权价格函数相应的方程.

3.42　假设 $V(\sigma)$ 是依赖于波动率 σ 的期权价格函数. 证明对所有的 σ,

$$V''(\sigma)=\frac{V'(\sigma)\tau}{4\sigma^3}(\sigma_1^4-\sigma^4),$$

其中 σ_1 在方程 (3.5.25) 中已经给出. 因此, 推导当 $\sigma_1>\sigma_{\mathrm{imp}}$ 时, $V''>0$; 当 $\sigma_1<\sigma_{\mathrm{imp}}$ 时, $V''<0$, 其中 σ_{imp} 为隐含波动率. 说明为什么当 $\sigma_1>\sigma_{\mathrm{imp}}$ 时, $V(\sigma)$ 是严格凸的; 当 $\sigma_1<\sigma_{\mathrm{imp}}$ 时, 它是严格凹的. 对这两种情况推导

$$0<\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_{\mathrm{imp}}}{\sigma_n-\sigma_{\mathrm{imp}}}<1$$

(Manaster and Koehler, 1982).

3.43　假设依赖于时间的波动率函数 $\sigma(t)$ 是确定性的. 假设对 $T>t$, 记 $\sigma_{\mathrm{imp}}(t,T)$ 作为到期日为 T 的欧式期权在时刻 t 的价格中获得的隐含波动率. 证明

$$\sigma(T)=\sqrt{\sigma_{\mathrm{imp}}^2(t,T)+2(T-t)\sigma_{\mathrm{imp}}(t,T)\frac{\partial}{\partial T}\sigma_{\mathrm{imp}}(t,T)}.$$

在实际情况中, 只在离散时间 $T_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ 有可以得到的隐含波动率. 假设波动率 $\sigma(T)$ 在每个时间区间 $[T_{i-1},T_i]\ (i=1,2,\cdots,N)$ 是逐段常数, 证明对

$T_{i-1} < u < T_i$ 有

$$\sigma(u) = \sqrt{\frac{(T_i - t)\sigma_{\text{imp}}^2(t, T_i) - (T_{i-1} - t)\sigma_{\text{imp}}^2(t, T_{i-1})}{T_i - T_{i-1}}}.$$

提示: 隐含波动率 $\sigma_{\text{imp}}(t, T)$ 和依赖于时间的波动率函数 $\sigma(t)$ 有下面的关系:

$$\sigma_{\text{imp}}^2(t, T)(T - t) = \int_t^T \sigma^2(u)du.$$

3.44 想要计算 $d(S_T - X)^+$, 其中 S_t 服从几何布朗过程

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)\, dt + \sigma(S_t, t)dZ_t.$$

函数 $(S_T - X)^+$ 在 $S_T = X$ 不连续. Rossi (2002) 通过下面函数的 $f(S_T)$ 提出了近似的 $(S_T - X)^+$, 它的一阶导数是连续的, 其中

$$f(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T < X, \\ \dfrac{(S_T - X)^2}{2\epsilon}, & X \leqslant S_T \leqslant X + \epsilon, \\ S_T - X - \dfrac{\epsilon}{2}, & S_T > X + \epsilon, \end{cases}$$

ϵ 为一个小的正数. 利用 Itô引理, 证明

$$f(S_T) = f(S_0) + \int_0^T f''(S_t)dS_t + \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(S_t, t)S_t^2 f''(S_t)dt.$$

通过取极限 $\epsilon \to 0$, 说明为什么

$$\int_0^T f'(S_t)dS_t \to \int_0^T \mathbf{1}_{\{S_t > X\}}dS_t,$$

$$\int_0^T \sigma^2(S_t, t)S_t^2 f''(S_t)dt \to \int_0^T \sigma^2(S_t, t)S_t^2 \delta(S_t - X)dt.$$

最后, 证明

$$d(S_T - X)^+ = \mathbf{1}_{\{S_T > X\}}dS_T + \frac{\sigma^2(S_T, T)}{2}S_T^2\delta(S_T - X)dT.$$

3.45 在风险中性测度 Q 下, 假设资产价格 $x_t = \ln S_t$ 和它的瞬时波动率 σ_t 的对数随机过程满足

$$dx_t = \left(r - \frac{\sigma_t^2}{2}\right)dt + \sigma_t\, dZ_x,$$

$$d\sigma_t = k(\theta - \sigma_t)dt + \eta dZ_\sigma,$$

其中 $dZ_x dZ_\sigma = \rho dt$, 所有模型中的参数都为常数. 敲定价格为 X 和到期日为 T 的欧式看涨期权的价格函数取为如下形式:

$$c(S_t, \sigma_t, t; T) = S_t F_1 - e^{-r(T-t)} X F_0,$$

其中

$$\begin{aligned}
F_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{f_j(\phi) e^{-i\phi X}}{i\phi} \right) d\phi, \quad j = 0, 1, \\
f_0(\phi) &= E_Q^t[\exp(i\phi x_T)], \\
f_1(\phi) &= E_Q^t[\exp(-r(T-t) - x_t + (1 + i\phi) x_T)].
\end{aligned}$$

对 $f_0(\phi)$ 和 $f_1(\phi)$ 求解 (Schöbel and Zhu, 1999).

第 4 章　路径相关期权

对于创新型金融衍生产品的需求, 使得金融机构针对客户的特殊需求, 设计开发越来越多的新型结构化金融产品. 近年来, 路径相关期权越来越普及. 之所以如此命名这一期权, 是因为其收益结构与整个或者部分期权有效期内原生资产价格的变化过程有关. **障碍期权** (barrier option) 是应用最广泛的路径相关期权, 在障碍期权有效期内, 当原生资产价格达到一个**障碍** (barrier) 值时, 它可以被终止、激活或者实施. 以标准普尔 100 和 500 指数为标的的有上限的股指期权, 就是很典型的可在期权交易所中交易的障碍期权 (这一期权于 1991 年在芝加哥证券交易所开始交易). 收盘时如果股指超过上限值, 则有上限的期权将被自动实施. **回望期权** (lookback option) 的收益取决于期权有效期内某一时段中原生资产价格达到的最大值或者最小值, 而**平均值期权** (average option)(通常称为**亚式期权** (Asian option)) 的收益取决于期权有效期内某一时段中原生资产价格的平均值. 一个有意思的例子是**俄罗斯式期权** (Russian option), 它实际上是一份永久美式回望期权. 俄罗斯式期权没有预设的到期日, 当其持有者实施期权时, 可以得到原生资产价格的历史最大值.

在本章中, 将讨论障碍期权、回望期权和亚式期权的产品特性, 以及如何用解析方法给它们定价. 由于这些期权的路径相关特性, 在期权有效期内, 必须观察原生资产价格是否达到某个障碍值, 或者是否达到某个新的极值, 或者通过取样来求得原生资产价格的平均值. 在实际操作中, 这些观察过程只能在离散的时刻进行, 而非连续进行. 不过, 在大多数路径相关期权的定价模型中, 为了便于解析处理起见, 通常假设观察原生资产价格的过程是连续进行的. 我们将给出普通形式连续观察的障碍期权、回望期权和几何平均亚式期权的解析价格公式. 对于算术平均亚式期权, 将给出近似解析价格公式. 在 Black-Scholes 定价范式下, 假设在时段 $[0,T]$ 内, 金融市场的不确定性服从如下模型: 一个带信息流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, Q)$, 其中 Q 为风险中性 (等价鞅) 的概率测度, 信息流 $\mathcal{F}_t$ 由标准布朗运动 $\{Z(u): 0 \leqslant u \leqslant t\}$ 生成. 所有证券的贴现价格都是 Q 鞅. 在测度 Q 下, 原生资产价格 S_t 服从以无风险利率 r 为漂移率, σ 为常数波动率的几何布朗运动.

当原生资产价格的变化过程只是在离散的时刻被观察时, 解析价格公式涉及多维正态分布函数的积分, 其维数等于观察时刻的总和. 这是较难处理的, 所以也简要讨论几种有效的用以估计离散观察路径相关期权价格的近似解析方法.

4.1 障碍期权

带有障碍特征的期权是最简单的路径相关期权. 它们的最大特点就是其收益不仅依赖于期权到期日原生资产的价格, 而且与整个期权有效期原生资产价格是否达到 (触及) 某一障碍值有关. 一个**敲出障碍期权** (out-barrier option)(或敲出期权) 是这样一个期权: 当原生资产价格达到规定障碍值时, 期权被提前终止. 期权持有者仅得到部分退款作为期权失效的补偿. 一个**敲入障碍期权** (in-barrier option)(或敲入期权) 是这样一个期权: 只有当原生资产价格达到敲入障碍值时, 期权才开始生效, 尽管持有者已经提前支付了期权费. 当原生资产价格上升达到障碍值时, 障碍期权被称为**上升期权** (up-option); 反之, 则被称为**下降期权** (down-option). 这样就有 8 种类型的欧式障碍期权, 如下降敲出看涨期权、上升敲出看涨期权、下降敲入看跌期权、下降敲出看跌期权等. 同时, 也可以构造既有上升障碍值, 也有下降障碍值的双边障碍期权. 只有达到其中一个障碍值, 或者两个障碍值按照预先设定的顺序都达到时, 才会发生期权的终止或者生效. 后一种期权被称为**有顺序的障碍期权** (sequential barrier options). 如果只有当原生资产价格达到障碍值保持一段预设时间长度 (而不是只达到障碍值一次) 时, 敲入或者敲出特征才生效, 则称这种障碍期权为**巴黎期权** (Parisian options)(Chesney et al., 1997).

为什么障碍期权如此流行? 从期权合约买方的角度来看, 他可以通过障碍条件来避免为那些他自己认为不大可能出现的情况付费, 从而**降低期权费用**. 例如, 下降敲出期权的买方相信原生资产价格绝不会低于某个底部值, 这样他就可以通过当原生资产价格确实跌至底部值时, 令期权失效来降低期权费用. 又如, 一份上升敲出看涨期权, 买方和卖方如何从障碍结构中获益呢? 由于当原生资产价格上升达到某个障碍值时, 买方将获得适当的退款, 这种障碍期权使期权买方用较低成本换取了一个上升状态的保护. 另一方面, 当原生资产价格陡然上升时, 期权卖方也不会被迫承担无限责任. 总之, 因为在期权合约的设计中给予了投资者更多的自由, 以表达他们自己关于原生资产价格变化的看法, 障碍期权具有很大的吸引力.

障碍期权价值在障碍值处的不连续性 (敲出时刻的断路器效应) 为对冲制造了麻烦. 当原生资产价格在障碍值附近时, 期权卖方要对冲障碍期权会变得非常困难. 外汇障碍期权交易者之间的激战通常在那些大众敲出障碍值附近爆发, 这给市场带来了很多不必要的波动. 乔治 • 索罗斯 (George Soros) 曾经说过 "敲出期权与普通期权的关系就像纯可卡因与可卡因的关系". 关于障碍期权中对冲问题的详细讨论请参见文献 (Linetsky, 1999). 同时, Hsu (1997) 讨论了在市场中以不同的标准来确定障碍事件时会遇到的困难. 为了避免被不快的意外敲出, 所使用的标准必须公正客观, 始终如一.

考虑包含一份欧式敲入期权和一份欧式敲出期权的投资组合, 两份期权具有相同的障碍值、敲定价格和到期日. 显然, 它们的价值之和应该就等于相应的具有同样敲定价格和到期日的欧式期权价格. 因为在到期日, 两份障碍期权中只有一份有效, 并且在两种情况下, 到期日收益和欧式期权的收益都相同. 因此, 只要敲出时没有退款, 就有

$$c_{\text{ordinary}} = c_{\text{down-and-out}} + c_{\text{down-and-in}}, \tag{4.1.1a}$$

$$p_{\text{ordinary}} = p_{\text{up-and-out}} + p_{\text{up-and-in}}, \tag{4.1.1b}$$

其中 c 和 p 分别表示看涨期权和看跌期权的价值. 因此, 如果相应的敲入期权的价格已知, 则敲出期权的价格就很容易得到, 反之也成立.

在本节中, 将推导原生资产价格过程连续观察的、具有单边障碍值或者双边障碍值欧式期权的解析价格公式. 在 Black-Scholes 定价模型中, 既可以通过偏微分方程方法, 也可以通过鞅定价方法来求解定价模型. 将利用偏微分方程理论的**镜像法** (method of images) 求出有限区域内 Black-Scholes 方程的格林函数 (基本解). 当使用鞅方法时, 将通过布朗运动过程的**反射原理** (reflection principle) 求得转移密度函数. 为了计算退款额的期望现值, 将给出首次达到障碍值时间的密度函数, 也会把这一定价方法推广到具有双边障碍值的期权定价问题. 最后, 将谈论离散观察障碍值行为对障碍期权价格的影响.

4.1.1 欧式下降敲出看涨期权

1967 年下降敲出看涨期权就在美国交易市场出现. 它的解析价格公式首次出现于 Merton 的工作 (1973, 第一章). 当原生资产价格 S_t 跌至敲出障碍值 B 时, 下降敲出看涨期权失效. 除此之外, 它与普通的看涨期权具有相似的特征.

1. *偏微分方程模型*

用常数 B 表示下降敲出障碍值, 则障碍期权偏微分方程模型的定义域为 $S\tau$ 平面内的 $[B,\infty)\times[0,T]$. 用与时间相关的 $R(\tau)$ 表示当原生资产价格达到障碍值时期权持有者应得的退款. 在通常的 Black-Scholes 假设条件 (无摩擦市场、连续交易等) 下, 下降敲出看涨障碍期权模型的偏微分方程定解问题定义如下:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc, \quad S > B,\ \tau\in(0,T], \tag{4.1.2}$$

且满足

敲出条件: $c(B,\tau) = R(\tau)$;

到期日收益: $c(S,0) = \max(S - X, 0)$,

其中 $c = c(S,\tau)$ 为障碍期权价值, 常数 r 和 σ 分别代表无风险利率和波动率. 通常, 下降障碍值比敲定价格 X 低; 否则, 在到期日, 即使下降敲出看涨期权处于实

值态, 它仍然可能被敲出. 从偏微分方程可以看出, 在期权有效期内的任意时刻, 一旦障碍值被达到, 敲出就立即发生.

进行变量代换 $y = \ln S$, 则障碍值就变成直线 $y = \ln B$. 这样, Black-Scholes 方程 (4.1.2) 化简为下面关于 $c(y, \tau)$ 的常系数方程:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial c}{\partial y} - rc. \tag{4.1.3a}$$

方程 (4.1.3a) 定义在半无界区域 $y > \ln B$, $\tau \in (0, T]$, 而辅助条件变成

$$c(\ln B, \tau) = R(\tau) \quad 和 \quad c(y, 0) = \max(e^y - X, 0). \tag{4.1.3b}$$

在无界区域 $-\infty < y < \infty$ 内, 方程 (4.1.3a) 的格林函数如下 (见方程 (3.3.4)):

$$G_0(y, \tau; \xi) = \frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(y + \mu\tau - \xi)^2}{2\sigma^2\tau}\right), \tag{4.1.4}$$

其中 $\mu = r - \dfrac{\sigma^2}{2}$, 而 $G_0(y, \tau; \xi)$ 满足初始条件

$$\lim_{\tau \to 0^+} G_0(y, \tau; \xi) = \delta(y - \xi).$$

2. 镜像法

下面将求解半无界区域 $\ln B < y < \infty$ 上被限制的格林函数, 它在 $y = \ln B$ 处具有等于零的狄利克雷边界条件. 根据经验, 假定格林函数具有下列形式:

$$G(y, \tau; \xi) = G_0(y, \tau; \xi) - H(\xi) G_0(y, \tau; \eta). \tag{4.1.5}$$

需要确定用 ξ 表示的函数 $H(\xi)$ 和 η 使之满足等于零的狄利克雷边界条件 $G(\ln B, \tau; \xi) = 0$.

注意: $G(y, \tau; \xi)$ 满足方程 (4.1.3a), 因为 $G_0(y, \tau; \xi)$ 和 $H(\xi)G_0(y, \tau; \eta)$ 两项都满足这个偏微分方程. 同时, 只要 $\eta \notin (\ln B, \infty)$, 则对所有的 $y > \ln B$ 就有 $\lim\limits_{\tau \to 0^+} G_0(y, \tau; \eta) = 0$. 因此, $G(y, \tau; \xi)$ 也满足初始条件. 根据障碍值上的边界条件, $H(\xi)$ 必须满足

$$H(\xi) = \frac{G_0(\ln B, \tau; \xi)}{G_0(\ln B, \tau; \eta)} = \exp\left(\frac{(\xi - \eta)[2(\ln B + \mu\tau) - (\xi + \eta)]}{2\sigma^2\tau}\right). \tag{4.1.6}$$

只有当方程 (4.1.6) 的右端只与 ξ 有关时, 假设的 $G(y, \tau; \xi)$ 的形式才可行. 为此, 选择

$$\eta = 2\ln B - \xi, \tag{4.1.7}$$

于是

$$H(\xi)=\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(\xi-\ln B)\right). \tag{4.1.8}$$

注意：只有当 μ/σ^2 是常数, 即与 τ 无关时, 这个方法才是可行的. 参数 η 可以被形象地看成是 ξ 关于障碍值 $y=\ln B$ 的**镜像** (mirror image). 因此, 这种方法被命名为镜像法 (图 4.1). 将指数项合并, 方程 (4.1.5) 的第二项可以表示为

$$\begin{aligned}&H(\xi)G_0(y,\tau;\eta)\\&=\exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(\xi-\ln B)\right)\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{[y+\mu\tau-(2\ln B-\xi)]^2}{2\sigma^2\tau}\right)\\&=\left(\frac{B}{S}\right)^{2\mu/\sigma^2}\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{[(y-\xi)+\mu\tau-2(y-\ln B)]^2}{2\sigma^2\tau}\right).\end{aligned}$$

将所有项放在一起, 在特定的半无界区域 $\ln B<y<\infty$ 内, 格林函数就变成

$$\begin{aligned}G(y,\tau;\xi)=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}&\left\{\exp\left(-\frac{(u-\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)\right.\\&\left.-\left(\frac{B}{S}\right)^{2\mu/\sigma^2}\exp\left(\frac{-(u-2\beta-\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)\right\},\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

其中 $u=\xi-y$, $\beta=\ln B-y=\ln\dfrac{B}{S}$.

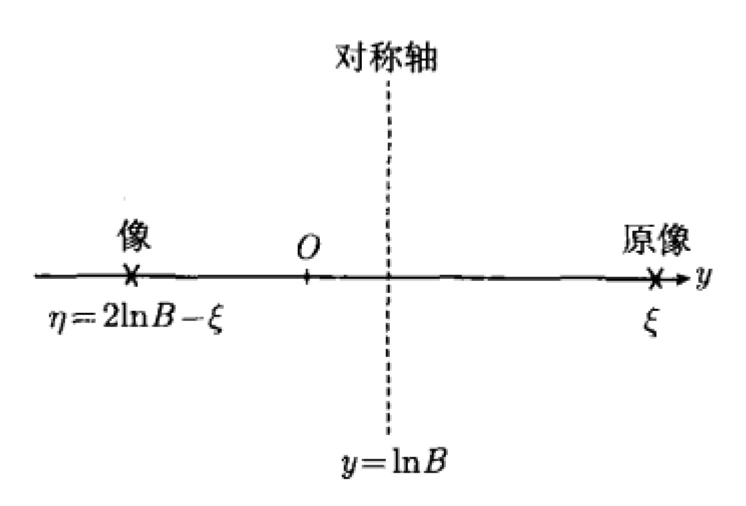


图 4.1 镜像法的图像表示, 对称轴为 $y=\ln B$

现在考虑无退款的障碍期权, 即 $R(\tau)=0$, 并且记 $K=\max(B,X)$. 无退款的欧式下降敲出看涨期权的价格可以表示为

$$\begin{aligned}c_{do}(y,\tau)&=\int_{\ln B}^{\infty}\max(e^{\xi}-X,0)G(y,\tau;\xi)d\xi\\&=\int_{\ln K}^{\infty}(e^{\xi}-X)G(y,\tau;\xi)d\xi\\&=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{\ln K/S}^{\infty}(Se^{u}-X)\left[\exp\left(-\frac{(u-\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)\right.\end{aligned}$$

$$- \left(\frac{B}{S}\right)^{2\mu/\sigma^2} \exp\left(-\frac{(u-2\beta-\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)\Bigg] du.$$

通过直接计算积分可以得出

$$\begin{aligned} c_{do}(S,\tau) = S &\left[N(d_1) - \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta+1} N(d_3)\right] \\ &- Xe^{-r\tau}\left[N(d_2) - \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1} N(d_4)\right], \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \dfrac{S}{K} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

$$d_3 = d_1 + \frac{2}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\frac{B}{S}, \quad d_4 = d_2 + \frac{2}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\frac{B}{S}, \quad \delta = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

如果定义

$$\widetilde{c}_E(S,\tau;X,K) = SN(d_1) - Xe^{-r\tau}N(d_2),$$

则 $c_{do}(S,\tau;X,B)$ 有如下的简洁形式:

$$c_{do}(S,\tau;X,B) = \widetilde{c}_E(S,\tau;X,K) - \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1} \widetilde{c}_E\left(\frac{B^2}{S},\tau;X,K\right). \tag{4.1.11}$$

通过直接计算, 可以证明函数 $\left(\dfrac{B}{S}\right)^{\delta-1} \widetilde{c}_E\left(\dfrac{B^2}{S},\tau\right)$ 满足 Black-Scholes 方程 (见习题 4.1). 通过以上形式可以看到边界条件 $c_{do}(B,\tau)=0$ 和到期日收益条件都满足.

障碍期权的价格公式 (4.1.11) 表明

$$c_{do}(S,\tau;X,B) < \widetilde{c}_E(S,\tau;X,K) < c_E(S,\tau;X),$$

也就是说, 下降敲出看涨期权比相应的标准欧式期权便宜. 这是显然的, 因为内含的敲出性质降低了期权费用.

注记　(1) 如果障碍值是时间的指数函数, $B(\tau) = Be^{-\gamma\tau}$, 则也可以推导出障碍期权价格的显式解析公式 [见习题 4.2]. 但是, 如果障碍值是时间的任意函数, 则不能得到障碍期权价格的解析公式. Roberts 和 Shortland (1997) 研究了如何通过布朗搭桥技巧, 来估计原生资产价格变化过程中价格达到边界值的时间, 从而推导出了障碍期权价格的近似解析公式.

(2) 如果原生资产价格服从其他类型的扩散过程, 则也可以得到障碍期权价格的闭合公式. Lo 等 (2002) 推导出了在具有常数平方根弹性的方差过程下障碍期权

的价格公式, 而 Sepp (2004) 利用拉普拉斯变换方法得到了在双指数跳扩散过程下障碍期权的价格公式.

(3) 假定 $B < X$, 由式 (4.1.1a) 可以推导出下降敲入看涨期权的价格公式为

$$c_{di}(S,\tau;X,B) = \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1} c_E\left(\frac{B^2}{S},\tau;X\right). \tag{4.1.12}$$

(4) 在得到首次通过时间的密度函数之后, 可以考虑具有退款的障碍期权的定价问题. 同时, 也可以利用具有与时间相关的边界条件时半无界区域内的扩散方程的已知解, 来推导由于退款而应该多支付的期权费用 (见习题 4.3).

(5) 推广后的镜像法可以用来推导障碍值只与一个状态变量相关的、包含几个被限制的多状态扩散过程的密度函数 (Kwok et al., 1998). 双资产下降敲出看涨期权的定价过程见习题 4.6.

(6) 对于原生资产价格是否达到障碍值的观察期可以被限制于期权有效期内的一段时间. Heynen 和 Kat (1994a) 得到了这类**部分障碍期权** (partial barrier options) 的定价公式 (见习题 4.7).

4.1.2 转移密度函数和首次通过时间密度

可以通过鞅定价方法给出障碍期权的定价模型, 并且通过计算中性测度 Q 下到期日收益 (服从敲出或者敲入条件) 的贴现值的期望来得到相应的价格公式. 用时间段 $[0,T]$ 表示障碍期权的有效期, 即期权在零时刻生效, 在时刻 T 到期. 从零时刻到时刻 t, 出现过的原生资产价格的最大值和最小值定义如下 (在连续观察下):

$$m_0^t = \min_{0\leqslant u\leqslant t} S_u,$$
$$M_0^t = \max_{0\leqslant u\leqslant t} S_u, \tag{4.1.13}$$

各种类型的障碍期权的到期日收益都可以用 m_0^T 和 M_0^T 表示. 例如, 下降敲出看涨期权和上升敲出看跌期权的到期日收益可以分别表示为

$$c_{do}(S_T,T;X,B) = \max(S_T - X,0)\mathbf{1}_{\{m_0^T>B\}},$$
$$p_{uo}(S_T,T;X,B) = \max(X - S_T,0)\mathbf{1}_{\{M_0^T<B\}}. \tag{4.1.14}$$

设 B 是下降障碍值, 定义 τ_B 为原生资产价格首次越过障碍值的停时,

$$\tau_B = \inf\{t|S_t \leqslant B\},\quad S_0 = S. \tag{4.1.15a}$$

假设 $S > B$, 由于路径连续, 所以 τ_B 可以表示为 (通常被称为**首次通过时间** (first passage time))

$$\tau_B = \inf\{t|S_t = B\}. \tag{4.1.15b}$$

同理, 如果 B 是上升障碍值且 $S < B$, 则有

$$\tau_B = \inf\{t|S_t \geqslant B\} = \inf\{t|S_t = B\}. \tag{4.1.15c}$$

容易看出, 如果 B 是下降障碍值, 则 $\{\tau_B > T\}$ 和 $\{m_0^T > B\}$ 是等价事件. 根据风险中性定价原理, 下降敲出看涨期权在零时刻的价格为

$$\begin{aligned} c_{do}(S,0;X,B) &= e^{-rT}E_Q[\max(S_T - X, 0)\mathbf{1}_{\{m_0^T > B\}}] \\ &= e^{-rT}E_Q[(S_T - X)\mathbf{1}_{\{S_T > \max(X,B)\}}\mathbf{1}_{\{\tau_B > T\}}], \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

其中 E_Q 表示当 $S_t = S$ 时在风险中性测度 Q 下的期望 (在本章中将沿用这一记号), 而价格函数 $c_{d_0}(S,0;X,B)$ 的确定需要首先确定 S_T 和 m_0^T 的联合分布函数.

1. *反射原理*

下面将说明如何利用反射原理来推导 $[0,T]$ 内的价格最小值和布朗运动的到期日值之间的联合分布律. 用 W_t^0 (或 W_t^μ) 表示从零开始, 波动率为常数 σ, 漂移率为零 (或漂移率为常数 μ) 的布朗运动过程. 在 $x \geqslant m$, $m \leqslant 0$ 的情况下来计算 $P(m_0^T < m, W_T^\mu > x)$. 首先, 考虑具有零漂移率的布朗运动 W_t^0. 如果最小值 m_0^T 跌至 m 之下, 则存在某个时刻 $\xi\,(0 < \xi < T)$, 使得 ξ 是 W_ξ^0 首次等于 m 的时刻. 由于布朗运动路径是连续的, 所以存在一段时间, 使得 $W_t^0 < m$. 换言之, W_t^0 至少会跌到 m 之下, 然后在时刻 T 至少上升到 x 之上 (大于 m). 如果定义一个随机过程

$$\widetilde{W}_t^0 = \begin{cases} W_t^0, & t < \xi, \\ 2m - W_t^0, & \xi \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{4.1.17}$$

即 $\widetilde{W}_t^0$ 是在 ξ 和 T 之间时段 W_t^0 关于对称轴 m 的镜像反射 (图 4.2). 显然, $\{W_T^0 > x\}$ 等价于 $\{\widetilde{W}_T^0 < 2m - x\}$. 同时, 布朗运动路径的反射表明

$$\widetilde{W}_{\xi+u}^0 - \widetilde{W}_\xi^0 = -(W_{\xi+u}^0 - W_\xi^0), \quad u > 0. \tag{4.1.18}$$

停时 ξ 只依赖于路径历史 $\{W_t^0 : 0 \leqslant t \leqslant \xi\}$, 并且它不会影响这之后的布朗运动. 根据布朗运动的强马尔可夫性, 可以知道方程 (4.1.18) 中的两项布朗增量具有相同的分布. 该分布具有零均值和方差 $\sigma^2 u$. 对于每一个布朗运动, 如果其路径具有起点 0, 在 T 之前至少变化了 m 个单位 (下降, $m \leqslant 0$), 之后至少变化了 $x - m$ 个单位 (上升, $x \geqslant m$), 则总存在一个等可能性的路径, 其起点为 0, 在 T 之前变化了 m 个单位 (下降, $m \leqslant 0$), 然后变化了至少 $m - x$ 个单位 (继续下降, $m \leqslant x$). 假

定 $W_T^0 > x$, 则 $\widetilde{W}_T^0 < 2m - x$, 再由式 (4.1.18), 得到如下零漂移率时的联合分布函数:

$$\begin{aligned} P(W_T^0 > x, m_0^T < m) &= P(\widetilde{W}_T^0 < 2m - x) = P(W_T^0 < 2m - x) \\ &= N\left(\frac{2m - x}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad m \leqslant \min(x, 0). \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

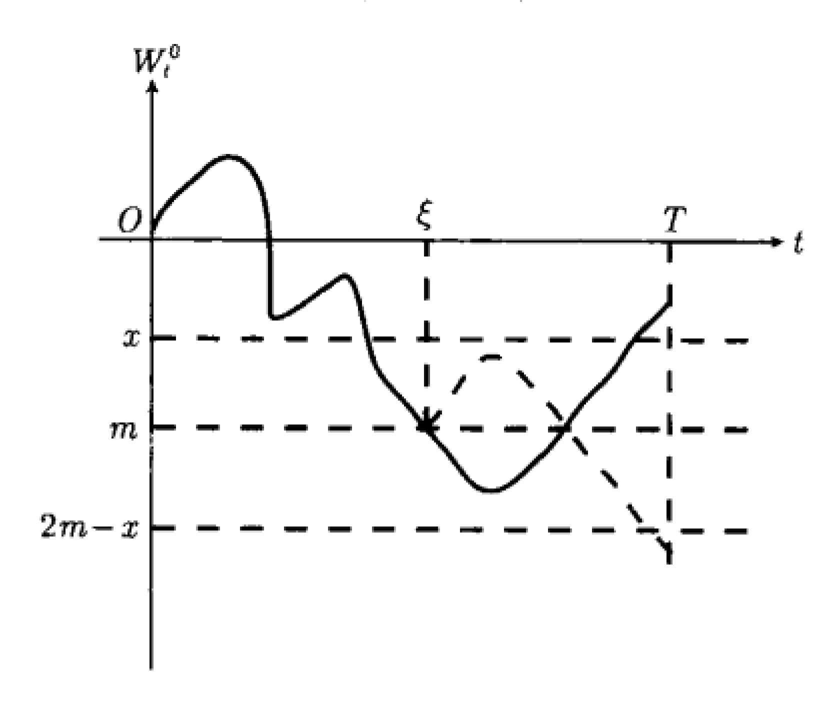


图 4.2 布朗运动 W_t^0 的反射原理的图像表示, ξ 时刻之后的虚线路径是布朗运动路径关于对称轴 m 的反射镜像, 假设 W_T^0 以一个高于 x 的值结束, 那么在时刻 T 的反射路径有一个低于 $2m - x$ 的值

下面利用 Girsanov 定理进行测度变换, 求解具有非零漂移率布朗运动的联合分布函数. 假设在测度 Q 下, W_t^μ 是具有漂移率 μ 的布朗运动. 把测度 Q 变换为 $\widetilde{Q}$, 使得 W_t^μ 在测度 $\widetilde{Q}$ 之下为具有零漂移率的布朗运动过程. 考虑下面的联合分布:

$$\begin{aligned} P(W_T^\mu > x, m_0^T < m) &= E_Q[\mathbf{1}_{\{W_T^\mu > x\}} \mathbf{1}_{\{m_0^T < m\}}] \\ &= E_{\widetilde{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{W_T^\mu > x\}} \mathbf{1}_{\{m_0^T < m\}} \exp\left(\frac{\mu W_T^\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

这里根据 Girsanov 定理 (见式 (2.4.30)). Radon-Nikodym 导数 $\exp\left(\frac{\mu W_T^\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}\right)$ 添加于期望 $E_{\widetilde{Q}}$. 下面利用反射原理, 并注意到 W_T^μ 在测度 $\widetilde{Q}$ 下是一个具有零漂移率的布朗运动, 可以推导出

$$\begin{aligned} P(W_T^\mu > x, m_0^T < m) &= E_{\widetilde{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{2m - W_T^\mu > x\}} \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}(2m - W_T^\mu) - \frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}\right)\right] \\ &= e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} E_{\widetilde{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{W_T^\mu < 2m - x\}} \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} W_T^\mu - \frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{2m-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2 T}} e^{-\frac{\mu z}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}} dz$$

$$= e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{2m-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{(z+\mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right) dz$$

$$= e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} N\left(\frac{2m - x + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad m \leqslant \min(x, 0). \tag{4.1.20}$$

注意：如果 μ, σ^2 与时间有关, 则 Radon-Nikodym 导数中将涉及随机积分. 在这种情况下, 就不能应用反射原理.

假设布朗运动 W_t^μ 在时段 $[0,T]$ 内有下降障碍值 m, 则 $m_0^T > m$. 下面将推导联合分布

$$P(W_T^\mu > x, m_0^T > m), \quad m \leqslant \min(x, 0).$$

根据全概率法则得到

$$\begin{aligned} &P(W_T^\mu > x, m_0^T > m) \\ =&P(W_T^\mu > x) - P(W_T^\mu > x, m_0^T < m) \\ =&N\left(\frac{-x + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} N\left(\frac{2m - x + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad m \leqslant \min(x, 0). \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

在特殊情况 $m = x$ 下, 由于从 $m_0^T > m$ 可以看出 $W_T^\mu > m$, 于是有

$$P(m_0^T > m) = N\left(\frac{-m + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} N\left(\frac{m + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \tag{4.1.22}$$

推广至上升障碍值

当布朗运动 W_t^μ 在时段 $[0,T]$ 内有一个上升障碍值 M 且 $M_0^T < M$ 时, 通过下面 M_0^T 和 m_0^T 之间的关系, 可以推导出 W_T^μ 和 M_0^T 的联合分布函数:

$$M_0^T = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} (\sigma Z_t + \mu t) = -\min_{0 \leqslant t \leqslant T} (-\sigma Z_t - \mu t),$$

其中 Z_t 为标准布朗运动. 由于 $-Z_t$ 具有与 Z_t 相同的分布, 所以 W_t^μ 的最大值和 $W_t^{-\mu}$ 的最小值的相反数具有相同的分布. 在方程 (4.1.20) 中, 用 $-\mu$ 代替 μ, $-M$ 代替 m, $-y$ 代替 x, 则得到

$$P(W_T^\mu < y, M_0^T > M) = e^{\frac{2\mu M}{\sigma^2}} N\left(\frac{y - 2M - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad M \geqslant \max(y, 0). \tag{4.1.23}$$

用同样的方法可以得到

$$\begin{aligned} &P(W_T^\mu < y, M_0^T < M) \\ =&P(W_T^\mu < y) - P(W_T^\mu < y, M_0^T > M) \\ =&N\left(\frac{y - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu M}{\sigma^2}} N\left(\frac{y - 2M - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad M \geqslant \max(y, 0). \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

令 $y=M$, 于是得到

$$P(M_0^T < M) = N\left(\frac{M-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu M}{\sigma^2}} N\left(-\frac{M+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \tag{4.1.25}$$

受限制的布朗过程的密度函数

对 $m \leqslant \min(x,0)$, 定义 $f_{\text{down}}(x,m,T)$ 为 W_T^μ 的具有下降障碍值 m 的密度函数, 即

$$f_{\text{down}}(x,m,T)dx = P(W_T^\mu \in dx, m_0^T > m).$$

对式 (4.1.21) 关于 x 求导, 然后改变符号得到

$$\begin{aligned}
&f_{\text{down}}(x,m,T)\\
&=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[N\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} N\left(\frac{x-2m-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\\
&\quad\times \mathbf{1}_{\{m\leqslant \min(x,0)\}}.
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

类似地, 对 $M > \max(y,0)$, 定义 $f_{\text{up}}(x,M,T)$ 为具有上升障碍值 M 的 W_T^μ 的密度函数, 则

$$\begin{aligned}
&P(W_T^\mu \in dy, M_0^T < M)\\
&= f_{\text{up}}(y,M,T)dy\\
&=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[N\left(\frac{y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\mu M}{\sigma^2}} N\left(\frac{y-2M-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]dy\\
&\quad\times \mathbf{1}_{\{M>\max(y,0)\}}.
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

假设在风险中性测度下, 原生资产价格 S_t 服从几何布朗运动, 并且 $\ln\frac{S_t}{S} = W_t^\mu$, 其中 S 为零时刻的原生资产价格, 漂移率 $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$. 用 $\psi(S_T;S,B)$ 表示 T 时刻原生资产价格 S_T 在 $S_t > B$ 条件下的转移密度函数, 其中 $0\leqslant t\leqslant T$, B 为下降障碍值. 通过方程 (4.1.26), 可以推导出 $\psi(S_T;S,B)$ 如下:

$$\begin{aligned}
\psi(S_T;S,B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}S_T}&\left[N\left(\frac{\ln\frac{S_T}{S} - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right.\\
&\left.-\left(\frac{B}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} N\left(\frac{\ln\frac{S_T}{S} - 2\ln\frac{B}{S} - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

2. 首次通过时间的密度函数

以 $Q(u;m)$ 表示首次通过时间的密度函数, 此时, 布朗路径 W_t^μ 首次达到下降障碍值 m, 即 $Q(u;m)\,du = P(\tau_m \in du)$. 首先, 观察到 $\{\tau_m > u\}$ 和 $\{m_0^u > m\}$ 是等价事件, 下面确定分布函数 $P(\tau_m > u)$. 根据方程 (4.1.22) 得到

$$
\begin{aligned}
P(\tau_m > u) &= P(m_0^u > m) \\
&= N\left(\frac{-m+\mu u}{\sigma\sqrt{u}}\right) - e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} N\left(\frac{m+\mu u}{\sigma\sqrt{u}}\right).
\end{aligned} \tag{4.1.29}
$$

因此, 密度函数 $Q(u;m)$ 如下给出:

$$
\begin{aligned}
Q(u;m)du &= P(\tau_m \in du) \\
&= -\frac{\partial}{\partial u}\left[N\left(\frac{-m+\mu u}{\sigma\sqrt{u}}\right) - e^{\frac{2\mu m}{\sigma^2}} N\left(\frac{m+\mu u}{\sigma\sqrt{u}}\right)\right] du\mathbf{1}_{\{m<0\}} \\
&= -\frac{m}{\sqrt{2\pi\sigma^2 u^3}} \exp\left(-\frac{(m-\mu u)^2}{2\sigma^2 u}\right) du\mathbf{1}_{\{m<0\}}.
\end{aligned} \tag{4.1.30a}
$$

利用类似的方法, 用 $Q(u;M)$ 表示具有上升障碍值 M 的首次通过时间的密度函数. 利用方程 (4.1.25) 的结果有

$$
\begin{aligned}
Q(u;M) &= -\frac{\partial}{\partial u}\left[N\left(\frac{M-\mu u}{\sigma\sqrt{u}}\right) - e^{\frac{2\mu M}{\sigma^2}} N\left(-\frac{M+\mu u}{\sigma\sqrt{u}}\right)\right] \mathbf{1}_{\{M>0\}} \\
&= \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma^2 u^3}} \exp\left(-\frac{(M-\mu u)^2}{2\sigma^2 u}\right) \mathbf{1}_{\{M>0\}}.
\end{aligned} \tag{4.1.30b}
$$

记 B 为上升的或者下降的障碍值. 当它是下降障碍值 (上升障碍值) 时有 $\ln\frac{B}{S} < 0\left(\ln\frac{B}{S} > 0\right)$. 可以将方程 (4.1.30a), (4.1.30b) 合并成下面的一个方程:

$$
Q(u;B) = \frac{\left|\ln\frac{B}{S}\right|}{\sqrt{2\pi\sigma^2 u^3}} \exp\left(-\frac{\left[\ln\frac{B}{S} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right]^2}{2\sigma^2 u}\right). \tag{4.1.31}
$$

假设在时刻 $t\,(0<t<T)$, 原生资产价格路径达到障碍值 B 时, 期权持有者获得的退款为 $R(t)$. 因为在时间段 $[u, u+du]$ 内, 退款额的期望值为 $R(u)Q(u;B)du$, 退款的期望现值可计算如下:

$$
\text{退款额} = \int_0^T e^{-ru} R(u) Q(u;B) du. \tag{4.1.32}
$$

如果 $R(t) = R_0$ 是一个常数, 则对上面积分直接计算得到

$$\text{退款额} = R_0 \left[\left(\frac{B}{S}\right)^{\alpha_+} N\left(\delta \frac{\ln \dfrac{B}{S} + \beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{B}{S}\right)^{\alpha_-} N\left(\delta \frac{\ln \dfrac{B}{S} - \beta T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right], \tag{4.1.33}$$

其中

$$\beta = \sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}, \quad \alpha_\pm = \frac{r - \dfrac{\sigma^2}{2} \pm \beta}{\sigma^2}, \quad \delta = \text{sgn}\left(\ln \frac{S}{B}\right),$$

δ 为一个二值变量. 如果是下降障碍值, 则有 $\delta = 1$; 如果是上升障碍值, 则有 $\delta = -1$.

3. 转移密度函数

下面将推导具有上升吸收障碍值 B 的受限制的布朗运动过程的转移密度函数 $\psi_B(x, t; x_0, t_0)$ 的偏微分方程模型. 这个吸收条件表征了障碍期权的敲出特性. 描述吸收障碍的适当的边界条件如下 (Cox and Miller, 1995):

$$\psi_B(x, t; x_0, t_0)\Big|_{x=B} = 0. \tag{4.1.34}$$

已经知道, ψ_B 所满足的前向 Fokker-Planck 方程如下 [见方程 (2.3.11)]:

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \psi_B}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < B, t > t_0, \tag{4.1.35}$$

具有边界条件 $\psi_B(B, t) = 0$. 因为当 $t \to t_0$ 时, $x \to x_0$, 所以

$$\lim_{t \to t_0} \psi_B(x, t; x_0, t_0) = \delta(x - x_0). \tag{4.1.36}$$

根据方程 (4.1.27) 中的密度函数, ψ_B 如下:

$$\begin{aligned} \psi_B(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t - t_0}} \Bigg[& N\left(\frac{x - x_0 - \mu(t - t_0)}{\sigma\sqrt{t - t_0}}\right) \\ & - e^{\frac{2\mu(B - x_0)}{\sigma^2}} N\left(\frac{(x - x_0) - 2(B - x_0) - \mu(t - t_0)}{\sigma\sqrt{t - t_0}}\right) \Bigg], \\ & x < B, t > t_0, x_0 < B. \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

在 $[t_0, t]$ 内, W_t^μ 没有越过障碍值的概率为

$$\begin{aligned} P(\tau_B > t) &= P\left(W_t^\mu \leqslant B, M_{t_0}^t \leqslant B \Big| W_{t_0}^\mu = x_0\right) \\ &= \int_{-\infty}^{B} \psi_B(x, t; x_0, t_0) dx. \end{aligned} \tag{4.1.38}$$

4. 欧式上升敲出看涨期权的定价公式

考虑一份具有敲定价格 X 和上升障碍值 B 的欧式上升敲出看涨期权. 由于卖方利用敲出特性控制了原生资产价格上升给他带来的风险责任, 因而只有选择 $X < B$, 收益结构才合理. 因为期权被敲出时总处于实值状态, 所以当原生资产价格达到障碍值时, 买方应该获得某种形式的退款.

上升敲出看涨期权的无退款部分的价值计算如下: 根据风险中性定价原理, 无退款的看涨期权价值为

$$\begin{aligned} &e^{-rT}E_Q\left[(S_T - X)\mathbf{1}_{\{X<S_T<B\}}\mathbf{1}_{\{M_0^T<B\}}\right] \\ &= e^{-rT}\int_{\ln X/S}^{\ln B/S}(Se^y - X)f_{\text{up}}(y,B,T)\,dy. \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

回顾之前下降敲出看涨期权 ($B < X$) 的价值为

$$\begin{aligned} &e^{-rT}\int_{\ln X/S}^{\infty}(Se^x - X)f_{\text{down}}(x,B,T)dx \\ &= c_E(S,T;X) - \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1}c_E\left(\frac{B^2}{S},T;X\right), \end{aligned} \tag{4.1.40}$$

其中 $c_E(S,\tau;X)$ 是到期日为 τ 的标准欧式看涨期权的价格函数. 因为 $f_{\text{down}}(x,B,T)$ 和 $f_{\text{up}}(y,B,T)$ 具有相同的解析形式, 所以方程 (4.1.39) 中的积分可以与方程 (4.1.40) 中的积分相联系. 于是得到

$$\begin{aligned} &\text{上升敲出看涨期权的价格} \\ &= \left[c_E(S,T;X) - \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1}c_E\left(\frac{B^2}{S},T;X\right)\right] \\ &\quad - \left[c_E(S,T;B) - \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1}c_E\left(\frac{B^2}{S},T;B\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.1.41}$$

相应的上升敲入看涨期权的价格如下:

$$\begin{aligned} \text{上升敲入看涨期权的价格} &= \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1}c_E\left(\frac{B^2}{S},T;X\right) + c_E(S,T;B) \\ &\quad - \left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1}c_E\left(\frac{B^2}{S},T;B\right). \end{aligned} \tag{4.1.42}$$

其他具有上升障碍值或者下降障碍值的欧式敲出或者敲入看跌期权的定价公式也可以用类似的方法推导 (见习题 4.5). 具有单边障碍值的欧式期权的一系列定价公式请参见文献 (Rich, 1994).

4.1.3 双边障碍期权

双边障碍期权具有两个障碍值, 上升障碍值 U 和下降障碍值 L. 在其最简单的形式中, 当资产价格达到其中一个障碍值时, 期权合约就会终止有效 (敲出) 或者开始有效 (敲入). 在一些较复杂的收益结构中, 当一个敲出障碍值被达到时, 作为补偿, 期权持有者会获得一份退款. 在有顺序的障碍期权中, 只有当两个障碍值按照预设的顺序依次被达到时、期权才开始生效 (见习题 4.12). 在文献 (Luo, 2001) 和 (Kolkiewicz, 2002) 中, 作者对构造出来的各种类型的双边障碍期权进行了全面的讨论.

由于存在两个障碍值, 所以原生资产价格过程 S_t 的首次通过时间应该定义为

$$\tau_U = \inf\{t|S_t = U\}, \quad \tau_L = \inf\{t|S_t = L\}. \tag{4.1.43}$$

在期权的有效期 $[0, T]$ 内, 可以区分下面三种相互排斥的事件: ① 先达到上升障碍值; ② 先达到下降障碍值; ③ 两个障碍值都没有被达到.

按照通常的假设, S_t 在风险中性测度 Q 下服从波动率为 σ 的几何布朗运动. 令 $X_t = \ln \dfrac{S_t}{S}$, 则 $X_0 = 0$, 并且 X_t 是一个漂移率为 $r - \dfrac{\sigma^2}{2}$, 波动率为 σ 的布朗运动过程. 希望求得下面这些密度函数:

$$g(x, T)dx = P(X_T \in dx, \min(\tau_L, \tau_U) > T), \tag{4.1.44a}$$

$$g^+(x, T)dx = P(X_T \in dx, \min(\tau_L, \tau_U) \leqslant T, \tau_U < \tau_L), \tag{4.1.44b}$$

$$g^-(x, T)dx = P(X_T \in dx, \min(\tau_L, \tau_U) \leqslant T, \tau_L < \tau_U). \tag{4.1.44c}$$

利用上面的密度函数, 可以给大部分双边障碍期权定价. 下面给出一些例子.

(1) 双边敲出看涨期权 (如果两个障碍值都没有被达到, 则在到期日, 可以获得看涨期权的收益):

$$\begin{aligned} c_{LU}^o &= e^{-rT} E_Q\left[(S_T - X)\mathbf{1}_{\{S_T > X\}}\mathbf{1}_{\{\min(\tau_L, \tau_U) > T\}}\right] \\ &= e^{-rT}\int_{\ln X/S}^{\ln U/S} (Se^x - X) g(x, T) dx, \quad X \in (L, U). \end{aligned}$$

(2) 上障碍敲入看涨期权 (在期权有效期内, 如果上障碍值先于下障碍值被达到, 即 $\tau_U < \tau_L$, $\tau_U \leqslant T$, 则一份标准的看涨期权开始生效):

$$\begin{aligned} c_U^i &= e^{-rT} E_Q\left[(S_T - X)\mathbf{1}_{\{S_T > X\}}\mathbf{1}_{\{\tau_U < \tau_L\}}\mathbf{1}_{\{\min(\tau_L, \tau_U) \leqslant T\}}\right] \\ &= e^{-rT}\int_{\ln X/S}^{\ln U/S} (Se^x - X) g^+(x, T) dx, \quad X \in (L, U). \end{aligned}$$

$g^+(x,T)$ 的解析形式见习题 4.11.

(3) 下障碍敲出看涨期权 (如果下障碍值没有被达到, 或者上障碍值先于下障碍值被达到, 即 $\tau_L > T$ 或 $\tau_U < \tau_L$, 则在到期日可以获得看涨期权的收益):

由于一份下障碍敲出看涨期权和一份下障碍敲入看涨期权的价值之和等于一份标准的看涨期权的价值, 所以有

$$
\begin{aligned}
c_L^o &= c_E - c_L^i \\
&= c_E - e^{-rT}\int_{\ln X/S}^{\ln U/S}(Se^x - X)g^-(x,T)dx, \quad X \in (L,U),
\end{aligned}
$$

其中, c_E 为一份标准的欧式看涨期权的价格.

具有双边障碍值的布朗运动的密度函数

方程 (4.1.44a), (4.1.44b), (4.1.44c) 中定义的密度函数满足前向 Fokker-Planck 方程. 要得到它们完整的偏微分方程模型, 还需要适当地增加一些辅助条件.

取初始位置为 $X_0 = 0$. 设障碍值满足 $\ell < 0 < u$, 用 $g(x,t;\ell,u)$ 表示具有两个吸收边界 $x = \ell$ 和 $x = u$ 的受限制的布朗运动 X_t 的密度函数. 前面有 $X_t = \ln\dfrac{S_t}{S}$, 并且如果 L 和 U 分别是资产价格 S_t 的两个吸收边界, 则 $\ell = \ln\dfrac{L}{S}$, $u = \ln\dfrac{U}{S}$. 这样, $g(x,t;\ell,u)$ 的偏微分方程模型为

$$
\frac{\partial g}{\partial t} = -\mu\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad \ell < x < u, \quad t > 0, \tag{4.1.45}
$$

辅助条件为

$$
g(\ell,t) = g(u,t) = 0, \quad g(x,0^+) = \delta(x).
$$

进行函数变换

$$
g(x,t) = e^{\frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}}\widehat{g}(x,t),
$$

注意: $\widehat{g}(x,t)$ 满足具有零漂移率的前向 Fokker-Planck 方程

$$
\frac{\partial \widehat{g}}{\partial t}(x,t) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \widehat{g}}{\partial x^2}(x,t). \tag{4.1.46}
$$

$\widehat{g}(x,t)$ 和 $g(x,t)$ 满足的辅助条件一样. 如果没有障碍值, 则全空间上, 方程 (4.1.46) 的基本解为

$$
\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right). \tag{4.1.47}
$$

正如单边障碍的情况, 设法给上面的解添加一些项, 使得 $x=\ell$ 和 $x=u$ 处的边界条件都得以满足. 下面的过程就是将镜像法推广到双边障碍值的情况. 首先, 加上两个负数项, $-\phi(x-2\ell,t)$ 和 $-\phi(x-2u,t)$, 其中

$$[\phi(x,t)-\phi(x-2\ell,t)]\Big|_{x=\ell}=0$$

和

$$[\phi(x,t)-\phi(x-2u,t)]\Big|_{x=u}=0.$$

注意到 $\phi(x-2\ell,t)$ 和 $\phi(x-2u,t)$ 分别对应于具有初始条件 $\delta(x-2\ell)$ 和 $\delta(x-2u)$ 的基本解. 将上面的部分和写成如下三项:

$$\widehat{g}_3(x,t)=\phi(x,t)-\phi(x-2\ell,t)-\phi(x-2u,t).$$

注意: 齐次的边界条件还没有满足, 因为

$$\widehat{g}_3(\ell,t)=-\phi(x-2u,t)\Big|_{x=\ell}\neq 0,$$

$$\widehat{g}_3(u,t)=-\phi(x-2\ell,t)\Big|_{x=u}\neq 0.$$

为了使非零值 $-\phi(x-2u,t)\Big|_{x=\ell}$ 和 $-\phi(x-2\ell,t)\Big|_{x=u}$ 变为零, 添加两个正数项 $\phi(x-2(u-\ell),t)$ 和 $\phi(x+2(u-\ell),t)$. 类似地, 将部分和写成下列 5 项:

$$\widehat{g}_5(x,t)=\widehat{g}_3(x,t)+\phi(x-2(u-\ell),t)+\phi(x+2(u-\ell),t),$$

注意到

$$\widehat{g}_5(\ell,t)=\phi(x-2(u-\ell),t)\Big|_{x=\ell}\neq 0,$$

$$\widehat{g}_5(u,t)=\phi(x+2(u-\ell),t)\Big|_{x=u}\neq 0.$$

每当新加入两个正数项或者负数项时, $x=\ell$ 和 $x=u$ 处部分和的值就更接近于零. 用迭代的方式, 依次一对一对地添加正数项和负数项, 这样就可以使得 $x=\ell$ 和 $x=u$ 处的齐次边界条件逐渐得到满足. 显然, 两个吸收边界可以被形象地看成是把物体放在原点处的一对镜子 (图 4.3 中的图像表示). 原点的原像关于 $x=\ell$ 处的镜面的像在 $x=2\ell$, 关于 $x=u$ 处的镜面的另一个像在 $x=2u$. 继续下去, $x=2\ell$ $(x=2u)$ 处的像关于 $x=u$ $(x=\ell)$ 处的镜面的原像在 $x=2(u-\ell)$ $[x=2(\ell-u)]$. 再依次继续下去, 就会得到无限个正数项和负数项的和. 可以推导出解 $g(x,t)$ 为

$$
\begin{aligned}
g(x,t) &= e^{\frac{\mu x}{\sigma^2}-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}}\widehat{g}(x,t)\\
&= e^{\frac{\mu x}{\sigma^2}-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\phi(x-2n(u-\ell,t),t)-\phi(x-2\ell-2n(u-\ell),t)]\\
&= \frac{e^{\frac{\mu x}{\sigma^2}-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{[x-2n(u-\ell)]^2}{2\sigma^2 t}\right)\right.\\
&\quad\left.-\exp\left(-\frac{[(x-2\ell)-2n(u-\ell)]^2}{2\sigma^2 t}\right)\right].
\end{aligned}\tag{4.1.48}
$$

两个镜面的类推法使得可以从直观上理解为什么 $g(x,t)$ 涉及无限多项. 一旦得到了 $g(x,t)$, 就能直接推导出 c_{LU}^{o} 的价格公式 (见习题 4.8).

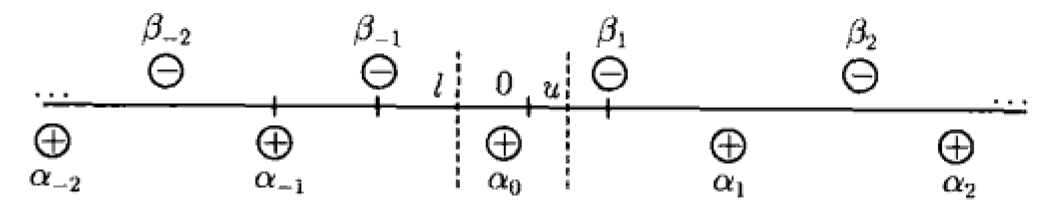


图 4.3　物体放在原点时具有两个吸收边界 (镜面) 的无限多个源和汇的图像表示, 源和汇的位置为 $\alpha_j=2(u-\ell)j\ (j=0,\pm1,\pm2,\cdots),\beta_j=2u+2(u-\ell)(j-1)\ (j>0)$, $\beta_j=2\ell+2(u-\ell)(j-1)\ (j<0)$

下面来求原生资产价格穿过某一个障碍值的首次通过时间的密度函数, 定义如下:

$$
q(t;\ell,u)\,dt=P(\min(\tau_\ell,\tau_u)\in dt),\tag{4.1.49}
$$

其中 $\tau_\ell=\inf\{t|X_t=\ell\}$, $\tau_u=\inf\{t|X_t=u\}$. 首先, 考虑它的分布函数

$$
\begin{aligned}
P(\min(\tau_\ell,\tau_u)\leqslant t) &= 1-P(\min(\tau_\ell,\tau_u)>t)\\
&= 1-\int_\ell^u g(x,t)dx,
\end{aligned}
$$

这样

$$
q(t;\ell,u)=-\frac{\partial}{\partial t}\int_\ell^u g(x,t)dx,
$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
q(t;\ell,u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}&[2n(u-\ell)-\ell]\exp\left(\frac{\mu\ell}{\sigma^2}-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{[2n(u-\ell)-\ell]^2}{2\sigma^2 t}\right)\\
&+[2n(u-\ell)+u]\exp\left(\frac{\mu u}{\sigma^2}-\frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{[2n(u-\ell)+u]^2}{2\sigma^2 t}\right).
\end{aligned}\tag{4.1.50}
$$

可能还想研究一下原生资产价格首先穿过某一障碍值的逸出时间. 如下定义下障碍值和上障碍值逸出时间的密度函数:

$$q^-(t;\ell,u)dt = P(\tau_\ell \in dt, \tau_\ell < \tau_u), \tag{4.1.51a}$$

$$q^+(t;\ell,u)dt = P(\tau_u \in dt, \tau_u < \tau_\ell). \tag{4.1.51b}$$

由于 $\{\tau_\ell \in dt, \tau_\ell < \tau_u\} \cup \{\tau_u \in dt, \tau_u < \tau_\ell\} = \{\min(\tau_\ell, \tau_u) \in dt\}$, 所以有

$$q(t;\ell,u) = q^-(t;\ell,u) + q^+(t;\ell,u). \tag{4.1.52}$$

根据经验, 将方程 (4.1.50) 中的 $q(t;\ell,u)$ 分解成两个部分 (参见文献 Karatzas and Shreve, 1991, 也可见习题 4.10), 这样就有

$$\begin{aligned} q^-(t;\ell,u) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2n(u-\ell)-\ell] \\ & \times \exp\left(\frac{\mu\ell}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{[2n(u-\ell)-\ell]^2}{2\sigma^2 t}\right), \end{aligned} \tag{4.1.53a}$$

$$\begin{aligned} q^+(t;\ell,u) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2n(u-\ell)+u] \\ & \times \exp\left(\frac{\mu u}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{[2n(u-\ell)+u]^2}{2\sigma^2 t}\right). \end{aligned} \tag{4.1.53b}$$

为了证明这个猜想, 定义这样一个概率流

$$J(x,t) = \mu g(x,t) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t).$$

注意到

$$q(t;\ell,u) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\ell^u g(x,t)dx = \int_\ell^u -\frac{\partial g}{\partial t}dx.$$

由于 g 满足前向 Fokker-Planck 方程, 所以有

$$q(t;\ell,u) = \int_\ell^u \left(\mu\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)dx = J(u,t) - J(\ell,t). \tag{4.1.54}$$

可以形象地将通过 $x=\ell$ 和 $x=u$ 时的概率流看成

$$-J(\ell,t) = P(\tau_\ell \in dt, \tau_\ell < \tau_u),$$

$$J(u,t) = P(\tau_u \in dt, \tau_u < \tau_\ell).$$

可以看出, 逸出时间的密度函数 $q^-(t;\ell,u)$ 和 $q^+(t;\ell,u)$ 满足

$$q^-(t;\ell,u) = -J(\ell,t) = -\left[\mu g(x,t) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right]\bigg|_{x=\ell}, \tag{4.1.55a}$$

$$q^+(t;\ell,u) = J(u,t) = \left[\mu g(x,t) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right]\bigg|_{x=u}. \tag{4.1.55b}$$

式 (4.1.55a), (4.1.55b) 的另一种证明可以参见文献 (Kolkiewicz, 2002). 假设在期权有效期内, 当下 (上) 障碍值首先达到时, 支付退款为 $R^-(t)\,[R^+(t)]$, 于是, 双边障碍期权退款部分的价值如下:

$$\text{退款额} = \int_0^T e^{-r\xi}[R^-(\xi)q^-(\xi;\ell,u) + R^+(\xi)q^+(\xi;\ell,u)]d\xi. \tag{4.1.56}$$

4.1.4 离散观察的障碍期权

当连续观察障碍值 (一旦达到障碍值, 敲入或者敲出就会立刻发生) 时, 障碍期权的定价模型用解析的方法很好处理. 但在金融市场中, 参与者往往需要确定离散观察障碍值的频率. Kat 和 Verdonk (1995) 证明了即使每天观察障碍值, 离散观察和连续观察的障碍期权的价格也可能会有很明显的差别. 同连续观察相比, 预期离散观察会降低敲入期权的期权金, 但是提高敲出期权的期权金. 可以推导离散观察的障碍期权的解析价格公式, 但是它们的数值计算过程非常烦琐. 其解析表达式将会涉及多变量正态分布函数 (见习题 4.13).

离散观察的障碍期权的修正公式

通过对连续观察的障碍期权的公式作一个简单的连续性修正, Broadie 等 (1997) 得到了一个离散观察的障碍期权的近似公式. 假设在到期日前共有 m 个观察时刻, 而且每两个相邻观察时刻之间都有等距间隔 δt. 设障碍值为常数 B, 记 $V_d(B)$ 为离散观察的敲入或者敲出下降看涨期权或者上升看跌期权的价格, $V(B)$ 为相应的连续观察的障碍期权的价格. 它们的解析近似公式如下:

$$V_d(B) = V(Be^{\pm\beta\sigma\sqrt{\delta t}}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{4.1.57}$$

其中 $\beta = -\xi\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\sqrt{2\pi} \approx 0.5826$, ξ 为 Riemann zeta 函数, σ 为波动率. 当 $B > S$ 时, 选择正号 "+"; 当 $B < S$ 时, 选择负号 "−". 可以看到, 修正项使得障碍值偏离当前的原生资产价格, 偏离值为 $e^{\beta\sigma\sqrt{\delta t}}$. 文献 (Broadie et al., 1997) 中大量的数值试验都表明以上这个近似公式非常准确.

4.2 回望期权

回望期权是一种路径相关期权, 它们的收益依赖于在某一时段 (被称为**回望期** (lookback period)) 内原生资产价格达到过的最大值或者最小值. 首先考虑回望期为期权的整个有效期的回望期权. 用 T 表示期权的到期日, $[T_0, T]$ 为回望期. 记从 T_0 到当前时刻 t ($T_0 \leqslant t \leqslant T$) 原生资产价格达到过的最小值和最大值分别为

$$m_{T_0}^t = \min_{T_0 \leqslant \xi \leqslant t} S_\xi \tag{4.2.1a}$$

和

$$M_{T_0}^t = \max_{T_0 \leqslant \xi \leqslant t} S_\xi. \tag{4.2.1b}$$

以上公式要求连续观察原生资产价格, 但是在实际操作中, 往往是离散观察最值. 回望期权可以分为两种: **固定敲定价** (fixed strike) 和**浮动敲定价** (floating strike). 浮动敲定价的回望看涨期权的持有者可以以回望期内的最低价格购买原生资产, 而浮动敲定价的回望看跌期权的持有者可以以回望期内的最高价格卖出原生资产. 因为 $S_T \geqslant m_{T_0}^T$, $M_{T_0}^T \geqslant S_T$, 所以浮动敲定价的回望期权的持有者总是会实施期权. 因此, 回望看涨期权和看跌期权的到期日收益分别为 $S_T - m_{T_0}^T$ 和 $M_{T_0}^T - S_T$. 从某种意义上来说, 浮动敲定价的回望期权并不是期权. 固定敲定价的回望看涨 (看跌) 期权是一份基于原生资产历史最高 (最低) 价格的看涨 (看跌) 期权. 固定敲定价的回望看涨 (看跌) 期权的到期日收益分别为 $\max(M_{T_0}^T - X, 0)$ 和 $\max(X - m_{T_0}^T, 0)$, 其中 X 为敲定价格. 对持有者而言, 回望期权保证了到期日收益总是最有利的, 这样持有者就不会为决定最优进入或者退出市场的时间而烦恼. 一般来说, 那些对于资产价格在某一时段内的变化很有把握的投资者最亲睐回望期权. 我们认为回望期权的价格对波动率应该更敏感. 同时, 由于收益更有利于持有者, 所以卖方理应收取更高的期权金.

回望期权模型与动态投资基金保险密切相关. 基金保险的基本形式如下: 当基金价值跌到某个门槛值之下时, 保证人就会立刻注资到基金中去, 这样被保险后的基金价值永远不会低于这个保护门槛值. 可以看到, 被保险后的基金价值与原始基金在保险期内达到的最小值有关. 习题 4.24 讨论了如何给具有常数保险门槛值的动态投资基金保险定价. Chu 和 Kwok (2004) 对具有随机保险门槛值 (如门槛值与某个股指相关) 和退出权利的动态基金保险作了全面的分析.

下面将推导不同类型的回望期权的价格公式, 包括那些具有新型收益结构的回望期权. 只有欧式的回望期权才有解析公式. 另外, 假设总是**连续观察** (continuous monitoring) 原生资产价格的最值. 采用常用的 Black-Scholes 定价模型, 并且假设

原生资产服从几何布朗运动. 在中性风险测度下, 随机变量 $U_\xi = \ln \frac{S_\xi}{S}$ 服从布朗运动, 其漂移率为 $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$, 波动率为 σ, 其中 r 为无风险利率, S 为当前时刻 t 的资产价格 (为了简便起见, 省略下标 t).

定义随机变量

$$y_T = \ln \frac{m_t^T}{S} = \min\{U_\xi, \xi \in [t, T]\}, \tag{4.2.2a}$$

$$Y_T = \ln \frac{M_t^T}{S} = \max\{U_\xi, \xi \in [t, T]\}, \tag{4.2.2b}$$

记 $\tau = T - t$. 从具有一个下降障碍值的布朗运动的转移密度函数 (见方程 (4.1.21)) 可以推导出 U_T 和 y_T 的联合分布函数为

$$P(U_T \geqslant u, y_T \geqslant y) = N\left(\frac{-u + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} N\left(\frac{-u + 2y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \tag{4.2.3a}$$

其中 $y \leqslant 0$, $y \leqslant u$. 相应地, U_T 和 Y_T 的联合分布函数如下 (见方程 (4.1.24)):

$$P(U_T \leqslant u, Y_T \leqslant y) = N\left(\frac{u - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} N\left(\frac{u - 2y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \tag{4.2.3b}$$

其中 $y \geqslant 0$, $y \geqslant u$. 在上面两个联合分布函数中取 $y = u$, 得到 y_T 和 Y_T 的分布函数分别为

$$P(y_T \geqslant y) = N\left(\frac{-y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} N\left(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad y \leqslant 0, \tag{4.2.4a}$$

$$P(Y_T \leqslant y) = N\left(\frac{y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} N\left(\frac{-y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad y \geqslant 0. \tag{4.2.4b}$$

对上面的分布函数求微分, 可以得到 y_T 和 Y_T 的密度函数 (见习题 4.14).

4.2.1 欧式固定敲定价格回望期权

考虑欧式固定敲定价的回望期权, 它的到期日收益是 $\max(M_{T_0}^T - X, 0)$. 在时刻 t, 这份回望看涨期权的价值为

$$c_{fix}(S, M, t) = e^{-r(T-t)} E_Q \left[\max(\max(M, M_t^T) - X, 0)\right], \tag{4.2.5}$$

其中 $S_t = S, M_{T_0}^t = M$, Q 为风险中性测度. 对于 $M \leqslant X$ 或者 $M > X$, 到期日收益函数可以被简化成下面的形式:

(i) $M \leqslant X$：

$$\max(\max(M, M_t^T) - X, 0) = \max(M_t^T - X, 0);$$

(ii) $M > X$：

$$\max(\max(M, M_t^T) - X, 0) = (M - X) + \max(M_t^T - M, 0).$$

当 $M > X$ 时, 到期日收益具有保底值 $(M - X)$. 显然, 新的敲定价 M 取代了原来的敲定价 X. 当 M_t^T 的值大于 M 时, 到期日收益高于 $(M - X)$.

定义函数 H：

$$H(S, t; K) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(M_t^T - K, 0)],$$

其中 K 为一个正常数. 一旦确定了 $H(S, t; K)$, 则

$$\begin{aligned} c_{fix}(S, M, t) &= \begin{cases} H(S, t; X), & M \leqslant X, \\ e^{-r(T-t)}(M - X) + H(S, t; M), & M > X \end{cases} \\ &= e^{-r(T-t)} \max(M - X, 0) + H(S, t; \max(M, X)). \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

有趣的是, 当 $M \leqslant X$ 时, $c_{fix}(S, M, t)$ 与 M 无关. 这是显然的, 因为当 $M \leqslant X$ 时, 到期日收益与 M 无关. 另一方面, 如果 $M > X$, 则到期日收益有保底值 $M - X$. 如果去掉这个保底值的现值, 则固定敲定价的看涨期权的剩余价值等于一份新的固定敲定价的看涨期权, 但是它的敲定价从 X 上升为 M.

因为 $\max(M_t^T - K, 0)$ 是一个非负的随机变量, 所以它的期望值可以通过一个尾部概率积分给出, 即

$$\begin{aligned} & e^{-r\tau} E_Q[\max(M_t^T - K, 0)] \\ =& e^{-r\tau} \int_0^\infty P(M_t^T - K \geqslant x) dx \\ =& e^{-r\tau} \int_K^\infty P\left(\ln \frac{M_t^T}{S} \geqslant \ln \frac{z}{S}\right) dz \quad (z = x + K) \\ =& e^{-r\tau} \int_{\ln \frac{K}{S}}^\infty S e^y P(Y_T \geqslant y) dy \quad \left(y = \ln \frac{z}{S}\right) \\ =& e^{-r\tau} \int_{\ln \frac{K}{S}}^\infty S e^y \left[N\left(\frac{-y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} N\left(\frac{-y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right] dy, \end{aligned}$$

其中 $\tau = T - t$. 上面最后一个等式的推导利用了方程 (4.2.4b) 中的分布函数. 通过直接积分得到

$$H(S,\tau;K)=SN(d)-e^{-r\tau}KN(d-\sigma\sqrt{\tau})$$
$$+e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}S\left[e^{r\tau}N(d)-\left(\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}N\left(d-\frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right)\right],\quad (4.2.7)$$

其中

$$d=\frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

用同样的方式, 可以对到期日收益为 $\max(X-m_{T_0}^T,0)$ 的欧式固定敲定价格的回望看跌期权定价. 记 $m=m_{T_0}^t$, 定义函数

$$h(S,t;K)=e^{-r(T-t)}E_Q[\max(K-m_t^T,0)],$$

则回望看跌期权的价值可以表示为

$$p_{fix}(S,m,t)=e^{-r(T-t)}\max(X-m,0)+h(S,t;\min(m,X)),\quad (4.2.8)$$

其中

$$\begin{aligned}h(S,\tau;K)&=e^{-r\tau}\int_0^\infty P(\max(K-m_t^T,0)\geqslant x)dx\\&=e^{-r\tau}\int_0^K P(K-m_t^T\geqslant x)dx\quad (\text{因为 } 0\leqslant\max(K-m_t^T,0)\leqslant K)\\&=e^{-r\tau}\int_0^K P(m_t^T\leqslant z)dz\quad (z=K-x)\\&=e^{-r\tau}\int_0^{\ln\frac{K}{S}} Se^yP(y_T\leqslant y)dy\quad \left(y=\ln\frac{z}{S}\right)\\&=e^{-r\tau}\int_0^{\ln\frac{K}{S}} Se^y\left[N\left(\frac{y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)+e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}N\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]dy\\&=e^{-r\tau}KN(-d+\sigma\sqrt{\tau})-SN(-d)+e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}S\\&\quad\times\left[\left(\frac{S}{K}\right)^{-2r/\sigma^2}N\left(-d+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right)-e^{r\tau}N(-d)\right],\quad \tau=T-t.\end{aligned}$$

4.2.2 欧式浮动敲定价格回望期权

通过对具固定敲定价格和浮动敲定价格回望期权价格关系的研究, 可以从固定敲定价的期权价格公式推导出浮动敲定价的回望期权的价格函数. 考虑到期日收益为 $S_T-m_{T_0}^T$ 的欧式浮动敲定价的回望看涨期权, 记 $\tau=T-t$, 则该看涨期权的现值如下:

$$
\begin{aligned}
c_{f\ell}(S,m,\tau) &= e^{-r\tau}E_Q[S_T - \min(m, m_t^T)] \\
&= e^{-r\tau}E_Q[(S_T - m) + \max(m - m_t^T, 0)] \\
&= S - me^{-r\tau} + h(S,\tau;m) \\
&= SN(d_m) - e^{-r\tau}mN(d_m - \sigma\sqrt{\tau}) + e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}S \\
&\quad \times \left[\left(\frac{S}{m}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d_m + \frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right) - e^{r\tau}N(-d_m)\right],
\end{aligned}
\tag{4.2.9}
$$

其中

$$
d_m = \frac{\ln\dfrac{S}{m} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.
$$

同样, 考虑到期日收益为 $(M_{T_0}^T - S_T)$ 的欧式浮动敲定价格回望看跌期权, 该看跌期权的现值为

$$
\begin{aligned}
p_{f\ell}(S,M,\tau) &= e^{-r\tau}E_Q[\max(M, M_t^T) - S_T] \\
&= e^{-r\tau}E_Q[\max(M_t^T - M, 0) - (S_T - M)] \\
&= H(S,\tau;M) - (S - Me^{-r\tau}) \\
&= e^{-r\tau}MN(-d_M + \sigma\sqrt{\tau}) - SN(-d_M) + e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}S \\
&\quad \times \left[e^{r\tau}N(d_M) - \left(\frac{S}{M}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(d_M - \frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{4.2.10}
$$

其中

$$
d_M = \frac{\ln\dfrac{S}{M} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.
$$

$S = m$ 处的边界条件

如果 $S = m$, 即资产价格的现值就是截至此刻的历史最小值, 情况如何呢?

截至当前时刻的最小值成为截至到期日的最小值的概率应该是零 (见习题 4.16). 而对于 m 的边际变化, 期权价值的变化量是与 m 成为截至到期日的历史最小值的概率成比例的 (Goldman et al., 1979), 因此, 断定浮动敲定价的回望看涨期权的价值对于 m 的微小变化不敏感. 数学上, 这表示为

$$
\left.\frac{\partial c_{f\ell}}{\partial m}(S,m,\tau)\right|_{S=m} = 0. \tag{4.2.11}
$$

对看涨期权的价格公式 (4.2.9) 直接求微分, 就可以验证上述性质.

展期策略和敲定价附加费

在 $c_{f\ell}$ 的表达式中, 前两项之和可以看成是敲定价格为 m 的标准欧式看涨期权的价格函数, 第三项可以看成敲定价附加费 (Garman, 1992). 为了解释敲定价附加费, 考虑用展期策略来对冲浮动敲定价的回望看涨期权. 任何时候都持有一份标准的欧式看涨期权, 它的敲定价是原生资产价格截至当前达到过的最小值. 为了复制这份浮动敲定价的回望看涨期权的到期日收益, 无论何时, 只要原生资产价格达到一个新的最小值, 就立刻卖出原来的看涨期权, 买入一份具有相同到期日, 但是敲定价等于新达到的最小值的看涨期权. 由于具有较低敲定价的看涨期权总是要贵些, 所以实施这种展期策略就需要支付更多的期权金. 实施展期策略所需总成本的期望值的现值就被称为敲定价附加费.

下面将说明如何通过对 m_t^T 和 S_T 的联合概率分布函数积分来得到敲定价附加费. 首先, 注意到

$$\begin{aligned}\text{敲定价附加费} &= c_{fl}(S,m,\tau) - c_E(S,\tau;m)\\ &= h(S,\tau;m) + S - me^{-r\tau} - c_E(S,\tau;m)\\ &= h(S,\tau;m) - p_E(S,\tau;m),\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

其中 $c_E(S,\tau;m)$ 和 $p_E(S,\tau;m)$ 分别为标准欧式看涨期权和看跌期权的价格函数. 最后一个结果由看跌-看涨期权平价公式得到. 回顾之前有

$$h(S,\tau;m) = e^{-r\tau}\int_0^m P(m_t^T \leqslant \xi)d\xi,$$

同样地,

$$\begin{aligned}p_E(S,\tau;m) &= e^{-r\tau}\int_0^\infty P(\max(m-S_T,0) \geqslant x)dx\\ &= e^{-r\tau}\int_0^m P(S_T \leqslant \xi)d\xi.\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

由于两个随机状态变量满足 $0 \leqslant m_t^T \leqslant S_T$, 所以有

$$P(m_t^T \leqslant \xi) - P(S_T \leqslant \xi) = P(m_t^T \leqslant \xi < S_T).$$

因此 (Wong and Kwok, 2003b),

$$\text{敲定价附加费} = e^{-r\tau}\int_0^m P(m_t^T \leqslant \xi \leqslant S_T)d\xi. \tag{4.2.14}$$

4.2.3 其他新型欧式回望期权

前面所讨论的都是最基本的回望期权，它们在到期日的收益函数具有标准形式，并且回望期就是整个期权的有效期. 能否构造一份回望期权，使得它的收益结构和上面原始的回望期权类似，但是价格却更便宜？有一些例子：到期日收益为 $\max(S_T-\lambda m_{T0}^T,0)\,(\lambda>1)$ 的部分回望看涨期权，以及到期日收益为 $\max(\lambda m_{T0}^T-S_T,0)\,(0<\lambda<1)$ 的部分回望看跌期权 (见习题 4.19). 另外，如果回望期只占期权有效期的一部分，则回望期权的价格也会更低. 当投资者不知道何时进入市场 (退出市场) 最优时，他 (或她) 或许就会想要买一份回望期为期权开始生效的一段时间 (接近到期日的一段时间) 的回望期权. 接下来，讨论为进入市场最优时刻而设计的具有有限回望期的浮动敲定价的回望看涨期权的性质. 相应地，习题 4.21 讨论了为退出市场最优时刻而设计的具有固定敲定价的回望期权.

为进入市场最佳时刻设计的回望期权

假设一个投资者认为资产价格将在未来 12 个月大幅度提高，因此，他购买了以该资产为标的，敲定价为当前资产价格的看涨期权. 假设在他购买这份期权之后的几周之内资产价格下跌了几个百分点，虽然在到期日它的确又上涨到了一个很高的价格，但是如果他是在这几周之后才购买这份期权，他的回报就会更高. 因而，进入市场的最佳时刻总是很难确定的. 通过购买有限回望期只占期权有效期开始一段时间的浮动敲定价的回望看涨期权，投资者就可以避开这个难题. 但是如果以购买回望期占整个期权有效期的回望看涨期权来代替购买有限回望期的期权，就会大大提高投资者的购买成本.

以 $[T_0,T_1]$ 表示回望期，其中 $T_1<T$, T 为到期日，并且设当前时刻 $t\in[T_0,T_1]$. 具有有限回望期的回望看涨期权的到期日收益函数为 $\max(S_T-m_{T_0}^{T_1},0)$. 记 $S_t=S, m_{T_0}^t=m$, $\tau=T-t$, 则该回望看涨期权的价格如下：

$$
\begin{aligned}
c(S,m,\tau) &= e^{-r\tau}E_Q[\max(S_T-m_{T_0}^{T_1},0)]\\
&= e^{-r\tau}E_Q[\max(S_T-m,0)\mathbf{1}_{\{m\leqslant m_t^{T_1}\}}]\\
&\quad + e^{-r\tau}E_Q[\max(S_T-m_t^{T_1},0)\mathbf{1}_{\{m>m_t^{T_1}\}}]\\
&= e^{-r\tau}E_Q[S_T\mathbf{1}_{\{S_T>m,m\leqslant m_t^{T_1}\}}]\\
&\quad - e^{-r\tau}mE_Q\left[\mathbf{1}_{\{S_T>m,m\leqslant m_t^{T_1}\}}\right]\\
&\quad + e^{-r\tau}E_Q[S_T\mathbf{1}_{\{S_T>m_t^{T_1},m>m_t^{T_1}\}}]\\
&\quad - e^{-r\tau}E_Q[m_t^{T_1}\mathbf{1}_{\{S_T>m_t^{T_1},m>m_t^{T_1}\}}],\quad t<T_1,
\end{aligned}\tag{4.2.15}
$$

其中的期望都是关于风险中性测度 Q 的. 求解该看涨期权的价格，需要先推导一

些相关的分布函数. 对式 (4.2.15) 第一项, 期望可以写成

$$E_Q\left[S_T\mathbf{1}_{\{S_T>m,m\leqslant m_t^{T_1}\}}\right]=\int_{\ln\frac{m}{S}}^{\infty}\int_y^{\infty}\int_{\ln\frac{m}{S}-x}^{\infty}Se^{x z}k(z)h(x,y)dzdxdy,$$

其中 $k(z)$ 为 $z=\ln\dfrac{S_T}{S_{T_1}}$ 的密度函数, $h(x,y)$ 为 $x=\ln\dfrac{S_{T_1}}{S}$ 和 $y=\ln\dfrac{m_t^{T_1}}{S}$ 的双变量密度函数 (相应的分布函数由 (4.2.3a) 给出). 类似地, 第三项和第四项可以写为

$$E_Q\left[S_T\mathbf{1}_{\{S_T>m_t^{T_1},m>m_t^{T_1}\}}\right]=\int_{-\infty}^{\ln\frac{m}{S}}\int_y^{\infty}\int_{y-x}^{\infty}Se^{x z}k(z)h(x,y)\,dz\,dxdy$$

和

$$E_Q\left[m_t^{T_1}1_{\{S_T>m_t^{T_1},m>m_t^{T_1}\}}\right]=\int_{-\infty}^{\ln\frac{m}{S}}\int_y^{\infty}\int_{y-x}^{\infty}Se^{y}k(z)h(x,y)\,dz\,dx\,dy.$$

在对上述贴现期望进行了烦琐的积分运算之后, 可以推得具有有限回望期的回望看涨期权的价格公式如下 (Heynen and Kat, 1994b):

$$\begin{aligned}c(S,m,\tau)=&SN(d_1)-me^{-r\tau}N(d_2)+SN_2\left(-d_1,e_1;-\sqrt{\frac{T-T_1}{T-t}}\right)\\&+e^{-r\tau}mN_2\left(-f_2,d_2;-\sqrt{\frac{T_1-t}{T-t}}\right)\\&+e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}S\left[\left(\frac{S}{m}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}N_2\left(-f_1+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T_1-t},-d_1+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau};\sqrt{\frac{T_1-t}{T-t}}\right)\right.\\&\left.-e^{r\tau}N_2\left(-d_1,e_1;-\sqrt{\frac{T-T_1}{T-t}}\right)\right]\\&+\ e^{-r(T-T_1)}\left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)SN(e_2)N(-f_1),\quad t<T_1,\end{aligned}\tag{4.2.16}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{S}{m}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau},$$

$$e_1=\frac{\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-T_1)}{\sigma\sqrt{T-T_1}},\quad e_2=e_1-\sigma\sqrt{T-T_1},$$

$$f_1=\frac{\ln\dfrac{S}{m}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},\quad f_2=f_1-\sigma\sqrt{T_1-t}.$$

容易验证, 如果 $T_1 = T$ (全回望期), 则上面的价格公式就简化为价格公式 (4.2.9). 如果当前时刻已经超过了回望期, $t > T_1$, 则历史最小值 $m_{T_0}^{T_1}$ 就是一个已知量. 此时, 这个具有有限回望期的回望看涨期权就变为标准欧式看涨期权, 具有已知的敲定价 $m_{T_0}^{T_1}$.

4.2.4 偏微分方程模型

在本小节, 讨论怎样推导欧式浮动敲定价回望看跌期权价格满足的偏微分方程和相关的辅助条件. 在推导偏微分方程时, 为方便起见, 省略状态变量的下标 t. 首先, 定义

$$M_n = \left[\int_{T_0}^{t} (S_\xi)^n d\xi\right]^{1/n}, \quad t > T_0, \tag{4.2.17}$$

它的微分如下:

$$dM_n = \frac{1}{n}\frac{S^n}{(M_n)^{n-1}}dt, \tag{4.2.18}$$

所以 dM_n 是确定性的. 令 $n \to \infty$, 于是得到

$$M = \lim_{n\to\infty} M_n = \max_{T_0 \leqslant \xi \leqslant t} S_\xi, \tag{4.2.19}$$

这就给出了在回望期 $[T_0, t]$ 内, 原生资产价格的历史最大值. 构造一个经过对冲的投资组合, 它包含一份收益取决于 M_n 的看跌期权, 同时卖空 Δ 份原生资产. 同样, 选择 Δ, 使得期权和原生资产中包含的随机部分相抵消. 用 $p(S, M_n, t)$ 表示回望看跌期权的价格. 如果保持 Δ 瞬间不变, 就可以遵循 "实用的" 的 Black-Scholes 推导过程. 上述投资组合的价值 Π 可以写为

$$\Pi = p(S, M_n, t) - \Delta S.$$

由 Itô 引理, 该投资组合价值的增量为

$$d\Pi = \frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{1}{n}\frac{S^n}{(M_n)^{n-1}}\frac{\partial p}{\partial M_n}dt + \frac{\partial p}{\partial S}dS + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}dt - \Delta dS.$$

同样, 选择 $\Delta = \dfrac{\partial p}{\partial S}$, 使得随机项相抵消. 根据通常的无套利原理, 无风险的对冲投资组合的期望回报率必须与无风险利率相同, 所以有

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

其中 r 为无风险利率. 归纳得到

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{n}\frac{S^n}{(M_n)^{n-1}}\frac{\partial p}{\partial M_n} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 p}{\partial S^2} + rS\frac{\partial p}{\partial S} - rp = 0. \tag{4.2.20}$$

然后令 $n \to \infty$, 注意 $S \leqslant M$. 当 $S < M$ 时, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{S^n}{(M_n)^{n-1}} = 0$; 当 $S = M$ 时, 回望看跌期权的价格对当前的历史最大值不敏感, 故 $\frac{\partial p}{\partial M} = 0$ (见方程 (4.2.11)). 因此, 当 $n \to \infty$ 时, 方程 (4.2.20) 的第二项变为零, 从而推得浮动敲定价的回望看跌期权价格满足如下方程:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 p}{\partial S^2} + rS\frac{\partial p}{\partial S} - rp = 0, \quad 0 < S < M, t > T_0. \tag{4.2.21}$$

上述定价模型中, 除了 S 的定义域有上界 M, 其他方面和通常的 Black-Scholes 方程完全相同 (Goldman et al., 1979). 有趣的是, 可以看到, 变量 M 在方程中并没有出现, 而只是出现在辅助条件中, 到期日条件就是到期日收益函数, 即

$$p(S, M, T) = M - S. \tag{4.2.22a}$$

在这份欧式浮动敲定价的回望看跌期权中, 在 $S = 0$ 和 $S = M$ 处有边界条件. 一旦 S 变成零, 在接下来的时间里它就始终为零, 因此到期日收益为 M. 用无风险利率贴现之后, 当前时刻 t 的回望看跌期权的价值为

$$p(0, M, t) = e^{-r(T-t)}M. \tag{4.2.22b}$$

在另一端 $S = M$ 的边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial M} = 0, \quad S = M. \tag{4.2.22c}$$

注记 (1) 通过直接微分, 可以证明方程 (4.2.10) 中的看跌期权的价格公式满足方程 (4.2.21) 和辅助条件 (4.2.22a), (4.2.22b), (4.2.22c);

(2) 当到期日收益具有更一般的形式 $f(S_T, M_{T_0}^T)$ 时, Xu 和 Kwok (2005) 利用偏微分方程的方法, 得到了回望期权的价格公式的积分形式.

4.2.5 离散观察的回望期权

在实际操作中, 交易者需要确定一个离散观察的频率, 因为连续观察原生资产价格的变化是不切实际的. 我们认为离散观察会使得回望期权的价格变低, 因为只是离散的观察就可能会错过一个新的最值. Heynen 和 Kat (1995) 的数值试验表明, 离散而非连续地观察原生资产价格会给回望期权的价值造成显著的影响.

离散观察的回望期权的解析价格公式 (Heynen and Kat, 1995) 涉及 n 个变量的正态分布函数, 其中 n 为在期权的剩余有效期内的观察时刻数. Levy 和 Mantion (1997) 提出了一个简单但有效的解析近似方法来给离散观察的回望期权定价. 这个方法用到了关于 $\sqrt{\delta t}$ 的期权价值的二阶 Taylor 展开式, 其中 δt 为相邻两个观察

时刻之间的时间间隔 (假设间隔都相等). 令 τ 是距离到期日的时间, 通过设定期权价值近似公式中的 $\delta t = \tau$ 和 $\delta t = \tau/2$, 可以确定 Taylor 展开式的两个系数. 理解和实施这个方法是比较容易的, 其具体细节可见习题 4.23. 数值试验表明, 这个解析近似方法的准确性还是相当好的.

和离散观察的障碍期权类似, Broadie 等 (1999) 用相应的连续观察的回望期权的价格函数推导出了离散观察的回望期权的价格函数的解析近似公式.

4.3 亚式期权

亚式期权是一种平均值观察期权, 它们的到期日收益取决于在部分或者全部期权有效期内原生资产的某种形式的平均价格. 在市场中经常出现这种情况, 交易者想要对某段时间内商品的平均价格进行对冲, 而不是对到期日价格进行对冲. 例如, 假设制造商希望在某段固定的时间内连续地为他的工厂购买一批铜, 公司就希望获得与这段时间内的平均价格相关联的价格保险. 他可以通过购买一份合适的平均值观察期权来对冲平均价格的风险. 对涉及交易量很小的商品的生意, 平均值观察期权非常有用. 使用这种金融工具, 可以避免在临近期末时的价格操纵.

大多数亚式期权都是欧式的, 因为具有美式提前实施特性的亚式期权可能被认为是重新启动了一段平均值观察期, 那就失去了对平均值进行保险的意义. 亚式期权主要有两类, **固定敲定价 (平均率)** (fixed strike (average rate)) 和**浮动敲定价格 (平均敲定价格) 期权** (floating strike(average strike) options). 相应的看涨期权的到期日收益分别为 $\max(A_T - X, 0)$ 和 $\max(S_T - A_T, 0)$, 其中 S_T 为到期日的原生资产价格, X 为敲定价格, A_T 表示在平均值观察期 $[0, T]$ 内原生资产某种形式的平均价格. A_T 的值取决于原生资产价格的变化路径. 最普遍的取平均值的方法就是进行离散的算术平均, 定义如下:

$$A_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}, \tag{4.3.1a}$$

取离散的几何平均定义如下:

$$A_T = \left[\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right]^{1/n}, \tag{4.3.1b}$$

其中 S_{t_i} 为在离散时刻 $t_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的原生资产价格. 取极限 $n \to \infty$, 被离散取样的平均值就变成了被连续取样的平均值.

连续的算术平均定义如下:

$$A_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt, \tag{4.3.2a}$$

连续的几何平均定义如下:

$$A_T = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t\, dt\right). \tag{4.3.2b}$$

至今已经出现了多种平均值观察期权, 对它们的全面总结可参见文献 (Boyle, 1993; Zhang, 1994). 最常用的平均值取样方法是进行离散的算术平均. 如果假设原生资产价格服从几何布朗运动, 则这种亚式期权的解析定价公式基本上是不能得到的. 因为对数密度求和并没有显式表达式. 另一方面, 因为价格的对数积仍然是对数, 所以取几何平均值的欧式亚式期权的解析价格公式是可以推导的.

在本节中, 首先推导亚式期权的偏微分方程模型, 然后考虑具有几何平均和算术平均的连续观察的亚式期权的定价问题, 将得到连续观察的亚式看涨期权和看跌期权之间的平价公式, 以及连续观察的固定敲定价的亚式期权和浮动敲定价的亚式期权之间的对称关系.

对于离散观察的亚式期权, 将推导出几何平均期权的闭合形式的价格公式, 并且利用 Edgeworth 展开技巧推导算术平均期权的解析近似公式.

4.3.1　偏微分方程模型

在本小节, 将应用 Black-Scholes 方法推导出亚式期权价格的微分方程模型. 价格函数 $V(S, A, \tau)$ 是关于距离到期日的时间 τ 和两个状态变量: 原生资产价格 S 和原生资产平均价格 A 的函数. 在利用偏微分方程的方法来推导期权定价模型时, 为简便起见, 总是省略状态变量的下标 t. 将原生资产平均价格记作

$$A = \int_0^t f(S, u)\, du, \tag{4.3.3}$$

其中 $f(S, t)$ 根据亚式期权所采用的平均值类型进行选择. 例如, 对于连续算术平均, 取 $f(S,t) = \dfrac{1}{t}S$; 对于离散几何平均, 取 $f(S,t) = \exp\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta(t - t_i)\ln S\right)$ 等. 假设 $f(S, t)$ 是一个关于时间连续的函数, 那么根据平均值原理,

$$dA = \lim_{\Delta t \to 0}\int_t^{t+\Delta t} f(S, u) du = \lim_{\Delta t \to 0} f(S, u^*) dt = f(S, t)\, dt,$$
$$t < u^* < t + \Delta t, \tag{4.3.4}$$

所以 dA 是确定性的. 因此, 对于亚式期权的无风险对冲, 只需要对冲原生资产所产生的风险, 即可以通过持有适当数量的原生资产, 就可以对冲亚式期权的风险.

考虑包含一份亚式期权和 $-\Delta$ 份原生资产的投资组合. 选择 Δ, 使得期权和原生资产包含的随机部分互相抵消. 假设原生资产价格的运动服从

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma\, dZ, \tag{4.3.5}$$

其中 Z 为标准布朗运动, q 为原生资产的分红率, μ 和 σ 分别为期望回报率和原生资产价格的波动率. 用 $V(S,A,t)$ 表示亚式期权的价格, 用 Π 表示上述投资组合的价值, 则该投资组合的价值为

$$\Pi = V(S,A,t) - \Delta S.$$

设 Δ 瞬间不变, Π 的微分如下:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial A}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS - \Delta qSdt.$$

上面等式的最后一项对应于原生资产的分红额对投资组合价值的贡献. 按照标准的方法, 选择 $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$, 使得包含 dS 的随机项消失. 由无套利原理,

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

其中 r 为无风险利率. 综合上述结果, 可以得出下述 $V(S,A,t)$ 满足的微分方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0. \tag{4.3.6}$$

这是一个退化的扩散方程, 它只包含关于 S 的扩散项, 而没有关于 A 的扩散项. 而定价模型中的辅助条件与亚式期权合约中的具体细节有关.

4.3.2 连续观察的几何平均期权

下面将要推导欧式亚式期权的解析定价公式, 它们的到期日收益取决于连续观察的原生资产价格的几何平均值. 以零时刻为平均值观察期的起始点, t 为当前时刻, T 表示到期日. 如下定义关于原生资产价格 S_u 在时段 $[0,t]$ 内连续观察的几何平均值:

$$G_t = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_u du\right). \tag{4.3.7}$$

固定敲定价和浮动敲定价的看涨期权的到期日收益分别为

$$c_{fix}(S_T, G_T, T; X) = \max(G_T - X, 0),$$

$$c_{f\ell}(S_T, G_T, T) = \max(S_T - G_T, 0), \tag{4.3.8}$$

其中 X 为固定敲定价. 下面将说明怎样用风险中性定价方法推导欧式固定敲定价的亚式看涨期权的价格公式. 另一方面, 将利用偏微分方程方法推导相应的浮动敲定价的期权价格公式.

1. 欧式固定敲定价亚式看涨期权

假设存在风险中性定价测度 Q, 在此测度下, 资产价格的贴现值都是鞅, 这也意味着不存在套利. 在测度 Q 下, 原生资产价格变化服从

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dZ_t, \tag{4.3.9}$$

其中 Z_t 为 Q 布朗运动, 常数 q 为原生资产的分红率. 对于 $0 < t < T$, 随机微分方程 (4.3.9) 的解如下 (见方程 (2.4.16)):

$$\ln S_u = \ln S_t + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(u - t) + \sigma(Z_u - Z_t).$$

将上述关系式代入方程 (4.3.7) 并进行积分得到

$$\begin{aligned}\ln G_T = &\frac{t}{T}\ln G_t + \frac{1}{T}\left[(T - t)\ln S_t + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{(T-t)^2}{2}\right] \\ &+ \frac{\sigma}{T}\int_t^T (Z_u - Z_t)du.\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

可以证明随机项 $\frac{\sigma}{T}\int_t^T (Z_u - Z_t)\,du$ 是一个均值为零, 方差为 $\frac{\sigma^2}{T^2}\frac{(T-t)^3}{3}$ 的高斯过程 (见习题 2.36). 根据风险中性定价原理, 欧式固定敲定价的亚式看涨期权的价值如下:

$$c_{fix}(S_t, G_t, t) = e^{-r(T-t)}E_Q[\max(G_T - X, 0)], \tag{4.3.11}$$

这里都是在测度 Q 下取期望, 信息流是由 Q 布朗运动产生的. 假设当前时刻 t 在平均值观察期内. 令

$$\overline{\mu} = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{(T-t)^2}{2T}, \quad \overline{\sigma} = \frac{\sigma}{T}\sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}},$$

G_T 可以写成

$$G_T = G_t^{t/T} S_t^{(T-t)/T}\exp(\overline{\mu} + \overline{\sigma}\widehat{Z}), \tag{4.3.12}$$

其中 $\widehat{Z}$ 为标准正态随机变量. 根据通常关于看涨期权收益期望的计算得到

$$\begin{aligned}&E_Q[\max(F\exp(\overline{\mu} + \overline{\sigma}\widehat{Z}) - X, 0)] \\ =&Fe^{\overline{\mu}+\overline{\sigma}^2/2}N\left(\frac{\ln\frac{F}{X} + \overline{\mu} + \overline{\sigma}^2}{\overline{\sigma}}\right) - XN\left(\frac{\ln\frac{F}{X} + \overline{\mu}}{\overline{\sigma}}\right),\end{aligned}$$

然后可以推导出

$$c_{fix}(S_t, G_t, t) = e^{-r(T-t)} \left[G_t^{t/T} S_t^{(T-t)/T} e^{\overline{\mu}+\overline{\sigma}^2/2} N(d_1) - XN(d_2) \right], \tag{4.3.13}$$

其中

$$d_2 = \left(\frac{t}{T} \ln G_t + \frac{T-t}{T} \ln S_t + \overline{\mu} - \ln X \right) \Big/ \overline{\sigma},$$

$$d_1 = d_1 + \overline{\sigma}.$$

2. *欧式浮动敲定价的亚式看涨期权*

由于浮动敲定价的亚式看涨期权的到期日收益涉及 S_T 和 G_T, 应用风险中性定价方法给亚式期权定价需要 S_T 和 G_T 的联合分布. 对于浮动敲定价的亚式期权, 也可以利用偏微分方程方法来推导 $c_{f\ell}(S, G, t)$ 的价格公式. 下面说明怎样用相似的降维技巧来降低微分方程的维数.

当采用连续观察的几何平均期权时, $c_{f\ell}(S, G, t)$ 的控制方程可以表示为

$$\frac{\partial c_{f\ell}}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c_{f\ell}}{\partial S^2} + (r-q) S \frac{\partial c_{f\ell}}{\partial S} + \frac{G}{t} \ln \frac{S}{G} \frac{\partial c_{f\ell}}{\partial G} - r c_{f\ell} = 0, \quad 0 < t < T. \tag{4.3.14}$$

下面定义自相似变量:

$$y = t \ln \frac{G}{S}, \quad W(y, t) = \frac{c_{f\ell}(S, G, t)}{S}. \tag{4.3.15}$$

这等价于选择 S 作为计量单位. 利用自相似变量, $c_{f\ell}(S, G, t)$ 的方程可化成

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \frac{\partial W}{\partial y} - qW = 0, \quad 0 < t < T, \tag{4.3.16}$$

终值条件为 $W(y, T) = \max(1 - e^{y/T}, 0)$.

令 $\tau = T - t$, 用 $F(y, \tau; \eta)$ 表示下列具有时间相关系数抛物方程的格林函数:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 (T-\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - \tau) \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau > 0,$$

$\tau = 0$ (对应于 $t = T$) 处的初始条件为

$$F(y, 0; \eta) = \delta(y - \eta).$$

虽然微分方程系数与时间相关, 但是仍然可以写出基本解 (见方程 (3.4.10)) 为

$$F(y, \tau; \eta) = N \left(\frac{y - \eta - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^\tau (T-u) du}{\sigma \sqrt{\int_0^\tau (T-u)^2 du}} \right). \tag{4.2.17}$$

这样即可解出 $W(y,\tau)$ 为

$$W(y,\tau) = e^{-q\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\max(1-e^{\eta/T},0)F(y,\tau;\eta)d\eta. \tag{4.3.18}$$

计算上述积分可以得到 (Wu et al., 1999)

$$c_{f\ell}(S,G,t) = Se^{-q(T-t)}N(\widehat{d}_1) - G^{t/T}S^{(T-t)/T}e^{-q(T-t)}e^{-\widehat{Q}}N(\widehat{d}_2), \tag{4.3.19}$$

其中

$$\widehat{d}_1 = \frac{t\ln\dfrac{S}{G} + \left(r-q+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\dfrac{T^2-t^2}{2}}{\sigma\sqrt{\dfrac{T^3-t^3}{3}}},$$

$$\widehat{d}_2 = \widehat{d}_1 - \frac{\sigma}{T}\sqrt{\frac{T^3-t^3}{3}},$$

$$\widehat{Q} = \frac{r-q+\dfrac{\sigma^2}{2}}{2}\frac{T^2-t^2}{T} - \frac{\sigma^2}{6}\frac{T^3-t^3}{T^2}.$$

4.3.3 连续观察的算术平均期权

考虑一份欧式固定敲定价的亚式看涨期权，它采用连续观察的算术平均值. 到期日收益如下：

$$c_{fix}(S_T,A_T,T;X) = \max\left(A_T - X, 0\right). \tag{4.3.20}$$

He 和 Takahashi (2000) 提出了一种减少变量的方法, 可以把微分方程的维数降低一维. 为了找出一种适当的换元方法, 考虑下述在时刻 t 的亚式看涨期权价格的期望表达式：

$$\begin{aligned} c_{fix}(S_t,A_t,t) &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[\max\left(A_T - X, 0\right)\right] \\ &= e^{-r(T-t)}E_Q\left[\max\left(\frac{1}{T}\int_0^t S_u\,du - X + \frac{1}{T}\int_t^T S_u du, 0\right)\right] \\ &= \frac{S_t}{T}e^{-r(T-t)}E_Q\left[\max\left(x_t + \int_t^T \frac{S_u}{S_t}du, 0\right)\right], \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

其中状态变量 x_t 定义为

$$x_t = \frac{1}{S_t}(I_t - XT), \tag{4.3.22}$$

其中 $I_t = \int_0^t S_u du = tA_t$. 在接下来的讨论中, 为方便起见, 用 I_t 代替 A_t 作为平均值状态变量. 由于资产价格过程的马尔可夫性, 价格比例 $S_u/S_t\,(u>t)$ 与截至

时刻 t 的资产价格历史无关. 因此, 方程 (4.3.21) 中的条件期望是只与 x_t 有关的函数. 这样可以导出对某一个函数 f 有

$$c_{fix}(S_t, I_t, t) = S_t f(x_t, t). \tag{4.3.23}$$

可以看出 $f(x_t, t)$ 为

$$f(x_t, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{T} E_Q \left[\max\left(x_t + \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du, 0\right)\right]. \tag{4.3.24}$$

回顾之前, 固定敲定价看涨期权的价格函数 $c_{fix}(S, I, t)$ 的控制方程为

$$\frac{\partial c_{fix}}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c_{fix}}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial c_{fix}}{\partial S} + S\frac{\partial c_{fix}}{\partial I} - rc_{fix} = 0. \tag{4.3.25}$$

方程 (4.3.21) 中 c_{fix} 的期望表达式促使我们进行下面的变量替换:

$$x = \frac{1}{S}(I - XT), \quad f(x, t) = \frac{c_{fix}(S, I, t)}{S}.$$

这样 $f(x, t)$ 满足的微分方程可以表示为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + [1 - (r-q)x]\frac{\partial f}{\partial x} - qf = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \tag{4.3.26}$$

而到期日条件如下:

$$f(x, T) = \frac{1}{T}\max(x, 0). \tag{4.3.27}$$

注意: 通过寻找一个明智的可以复制平均资产价格的交易策略, 就可以推导出一个相似形式的、只含一个状态变量的控制方程 (见习题 4.31).

当 $x_t \geqslant 0$ 时, 也就是 $\frac{1}{T}\int_0^t S_u\, du \geqslant X$, 可以找到 $f(x, t)$ 的闭合形式的解析解. 由于 x_t 是关于 t 递增的函数, 所以 $x_T \geqslant 0$, 到期日条件 $f(x, T)$ 简化为 x/T. 在这种情况下, 解 $f(x, t)$ 有如下形式:

$$f(x, t) = a(t)x + b(t).$$

将这种形式的解代入方程 (4.3.26), 得到下面两个关于 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的方程:

$$\frac{da(t)}{dt} - ra(t) = 0, \quad a(T) = \frac{1}{T},$$

$$\frac{db(t)}{dt} - a(t) - qb(t) = 0, \quad b(T) = 0.$$

当 $r \neq q$ 时, $a(t)$ 和 $b(t)$ 分别为

$$a(t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{T}, \quad b(t) = \frac{e^{-q(T-t)} - e^{-r(T-t)}}{T(r-q)}.$$

如果 $I \geqslant XT$, 则亚式期权的价格函数为

$$c_{fix}(S, I, t) = \left(\frac{I}{T} - X\right) e^{-r(T-t)} + \frac{e^{-q(T-t)} - e^{-r(T-t)}}{T(r-q)} S. \tag{4.3.28}$$

虽然在上面价格公式中, 波动率 σ 并没有显式地出现, 但它隐含在 S 和 A 中. 容易看出, 当 δ 是一个仅与 t 和 $T-t$ 有关而与 S 和 A 无关的函数时, γ 为零.

对于 $I < XT$, 就找不到闭合形式的解析解了. Curran(1994) 以及 Rogers 和 Shi(1995) 提出条件方法来寻找亚式期权价格的一个**下界** (lower bound). 他们都是采用将平均状态变量 A_T 投影到 $\mathcal{F}_T$ 可测的高斯随机变量 Y 上的方法. 根据 Jensen 不等式 (见习题 4.36) 得到

$$\begin{aligned} E_Q[\max(A_T - X, 0)] &= E_Q\left[E_Q\left[\max(A_T - X, 0)|Y\right]\right] \\ &\geqslant E_Q\left[\max\left(E_Q[A_T - X|Y], 0\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

最后关于 Y 的期望的闭合形式是可以求出来的. 很自然地可以选择 Y 是几何平均的对数. 近似误差很小, 因为几何平均和算术平均之间的相关系数接近于 1. 条件均值方法的应用详见习题 4.37.

解析近似方法也被用于给连续观察的浮动敲定价的亚式期权定价. Bouaziz 等 (1994) 使用线性近似技巧通过联合对数分布来估计 $\{A_T, S_T\}$ 的分布 (也可以参见文献 (Chung et al., 2003) 中的二次近似的扩展). 给亚式期权定价的其他解析近似方法可以在文献 (Milevsky and Posner, 1998; Nielsen and Sandmann, 2003; Tsao et al., 2003) 中找到, 其中对一些结果的说明见习题 4.38 和习题 4.39.

4.3.4　看跌–看涨期权平价公式和固定–浮动敲定价格期权的对称关系

众所周知, 标准欧式看涨期权和看跌期权价格之间的差等于一份欧式远期合约. 欧式亚式期权之间是否也存在相似的看跌–看涨期权的平价公式呢? 另外, 能否像回望期权那样, 建立具有固定敲定价和浮动敲定价的亚式期权价格之间的对称关系呢? 在本小节中, 在 Black-Scholes 框架下推导连续观察的亚式期权的平价公式和对称关系, 其中一些关系可以被推广, 使之适用于更为一般的随机价格运动 (Hoogland and Neumann, 2000).

1. *看跌–看涨期权的平价公式*

用 $c_{fix}(S, I, t)$ 和 $p_{fix}(S, I, t)$ 分别表示固定敲定价格算术平均的亚式看涨期权

和看跌期权的价格函数, 它们的到期日收益函数分别为

$$c_{fix}(S,I,T)=\max\left(\frac{I}{T}-X,0\right), \tag{4.3.30a}$$

$$p_{fix}(S,I,T)=\max\left(X-\frac{I}{T},0\right), \tag{4.3.30b}$$

其中 $I=\int_0^T S_u du$. 用 $D(S,I,t)$ 代表 c_{fix} 和 p_{fix} 之间的差. 因为 c_{fix} 和 p_{fix} 都满足相同的微分方程 (见方程 (4.3.25)), 因此, $D(S,I,t)$ 也满足同一个微分方程. 差 $D(S,I,t)$ 的到期日条件如下:

$$D(S,I,T)=\max\left(\frac{I}{T}-X,0\right)-\max\left(X-\frac{I}{T},0\right)=\frac{I}{T}-X.$$

上面的到期日条件和 $I\geqslant XT$ 时连续观察算术平均期权满足的到期日条件相同. 因此, 当 $r\neq q$ 时, 连续观察算术平均固定敲定价格的亚式期权价格之间的看跌–看涨平价公式如下 (也可见方程 (4.3.28)):

$$\begin{aligned}&c_{fix}(S,I,t)-p_{fix}(S,I,t)\\&=\left(\frac{I}{T}-X\right)e^{-r(T-t)}+\frac{e^{-q(T-t)}-e^{-r(T-t)}}{T(r-q)}S.\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

同样的技巧也可以用来推导其他类型的亚式期权 (浮动/固定敲定价格和几何/算术平均) 之间的看跌–看涨平价公式 (见习题 4.28 和习题 4.29).

2. 固定–浮动敲定价格期权的对称关系

通过转换测度, 并且将布朗运动的时间反向 (Henderson and Wojakowski, 2002), 可以建立在平均值观察期初浮动敲定价格和固定敲定价的算术平均亚式期权价格之间的对称关系.

把平均值观察期初 (设为零时刻) 各个连续观察的算术平均期权的价格函数分别记作

$$\begin{aligned}c_{f\ell}(S_0,\lambda,r,q,T)&=e^{-rT}E_Q\left[\max\left(\lambda S_T-A_T,0\right)\right],\\p_{f\ell}(S_0,\lambda,r,q,T)&=e^{-rT}E_Q\left[\max\left(A_T-\lambda S_T,0\right)\right],\\c_{fix}(X,S_0,r,q,T)&=e^{-rT}E_Q\left[\max\left(A_T-X,0\right)\right],\\p_{fix}(X,S_0,r,q,T)&=e^{-rT}E_Q\left[\max\left(X-A_T,0\right)\right].\end{aligned}$$

在风险中性测度 Q 下, 资产价格 S_t 服从几何布朗运动

$$\frac{dS_t}{S_t}=(r-q)dt+\sigma dZ_t, \tag{4.3.32}$$

其中 Z_t 为一个 Q 布朗运动. 将资产价格作为计价单位, 于是

$$\begin{aligned} c_{f\ell}^* = \frac{c_{f\ell}}{S_0} &= \frac{e^{-rT}}{S_0} E_Q\left[\max\left(\lambda S_T - A_T, 0\right)\right] \\ &= E_Q\left[\frac{S_T e^{-rT}}{S_0}\frac{\max\left(\lambda S_T - A_T, 0\right)}{S_T}\right]. \end{aligned} \tag{4.3.33}$$

为了进行计价单位的转换, 定义测度 Q^* 如下:

$$\left.\frac{dQ^*}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma Z_T} = \frac{S_T e^{-rT}}{S_0 e^{-qT}}. \tag{4.3.34}$$

根据 Girsanov 原理, $Z_T^* = Z_T - \sigma T$ 是一个 Q^* 布朗运动 (见习题 3.10). 如果记 $A_T^* = A_T/S_T$, 则

$$c_{f\ell}^* = e^{-qT} E_{Q^*}\left[\max\left(\lambda - A_T^*, 0\right)\right], \tag{4.3.35}$$

其中 E_{Q^*} 代表在测度 Q^* 下的期望. 现在, 考虑

$$A_T^* = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{S_u}{S_T} du = \frac{1}{T}\int_0^T S_u^*(T) du, \tag{4.3.36}$$

其中

$$S_u^*(T) = \exp\left(-\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-u) - \sigma(Z_T - Z_u)\right).$$

使用服从 Q^* 布朗运动的 Z_t^*, 其中 $Z_T - Z_u = \sigma(T-u) + Z_T^* - Z_u^*$, 于是可以得到

$$S_u^*(T) = \exp\left(\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(u-T) + \sigma(Z_u^* - Z_T^*)\right). \tag{4.3.37}$$

进一步, 用 $\widehat{Z}_t$ 表示一个起点为零的反射的 Q^* 布朗运动, 其中 $\widehat{Z}_t = -Z_t^*$, 则根据布朗运动的增量不变性质, $\widehat{Z}_{T-u}$ 和 $Z_u^* - Z_T^*$ 服从相同的分布. 因此有

$$A_T^* \overset{\text{law}}{=} \widehat{A}_T = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\sigma \widehat{Z}_{T-u} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(u-T)} du. \tag{4.3.38}$$

通过对 $\widehat{Z}_{T-u}$ 进行时间反向得到

$$\widehat{A}_T = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\sigma \widehat{Z}_\xi + \left(q - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\xi} d\xi. \tag{4.3.39}$$

注意: $\widehat{A}_T S_0$ 是漂移率为 $q-r$ 的价格过程的算术平均. 综合上述结果有

$$c_{f\ell} = S_0 c_{f\ell}^* = e^{-qT} E_{Q^*}\left[\max\left(\lambda S_0 - \widehat{A}_T S_0, 0\right)\right]. \tag{4.3.40}$$

因此可以推导出下述固定–浮动敲定价格期权之间的对称关系:

$$c_{f\ell}(S_0,\lambda,r,q,T)=p_{fix}(\lambda S_0,S_0,q,r,T). \tag{4.3.41}$$

将浮动和固定敲定价格亚式期权的看跌-看涨平价公式和上面的对称关系相结合, 可以推导出下面 c_{fix} 和 $p_{f\ell}$ 之间固定-浮动敲定价格对称关系 (见习题 4.30):

$$c_{fix}(X,S_0,r,q,T)=p_{f\ell}\left(S_0,\frac{X}{S_0},q,r,T\right). \tag{4.3.42}$$

4.3.5 离散几何平均的固定敲定价格期权

在均匀分布的离散时刻 $t_i=i\Delta t\,(i=1,2,\cdots,n)$ 取资产价格的离散几何平均, 其中 Δt 为相等的时间间隔, $t_n=T$ 为到期日. 定义一个几何平均过程

$$G_k=\left[\prod_{i=1}^{k}S_{t_i}\right]^{1/k},\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{4.3.43}$$

取离散几何平均的欧式平均值看涨期权的到期日收益为 $\max(G_n-X,0)$, 其中 X 为敲定价. 假设原生资产价格服从几何布朗运动, 则资产价格比率 $R_i=\dfrac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 服从对数分布. 假设在风险中性测度 Q 下,

$$\ln R_i\sim N\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t,\sigma^2\Delta t\right),\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{4.3.44}$$

其中 r 为无风险利率, $N(\mu,\sigma^2)$ 代表一个均值为 μ, 方差为 σ^2 的正态分布.

1. 欧式固定敲定价格看涨期权

欧式固定敲定价格看涨期权的价格公式与当前时刻 t 是在时刻 t_0 之前还是之后有关. 首先, 考虑 $t<t_0$, 并且记

$$\frac{G_n}{S_t}=\frac{S_{t_0}}{S_t}\left\{\frac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}}\left[\frac{S_{t_{n-1}}}{S_{t_{n-2}}}\right]^2\cdots\left[\frac{S_{t_1}}{S_{t_0}}\right]^n\right\}^{1/n},$$

所以有

$$\ln\frac{G_n}{S_t}=\ln\frac{S_{t_0}}{S_t}+\frac{1}{n}\left[\ln R_n+2\ln R_{n-1}+\cdots+n\ln R_1\right],\quad t<t_0. \tag{4.3.45}$$

由于 $\ln R_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $\ln\dfrac{S_{t_0}}{S_t}$ 代表在不重叠的时间间隔之间独立的布朗增量, 所以它们服从正态分布且相互独立.

注意: $\ln\dfrac{G_n}{S_t}$ 是这些独立的布朗增量的线性组合, 所以它服从正态分布, 均值为

$$\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_0-t)+\frac{1}{n}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\sum_{i=1}^{n}i$$
$$=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left[(t_0-t)+\frac{n+1}{2n}(T-t_0)\right],$$

而方差为

$$\sigma^2(t_0-t)+\frac{1}{n^2}\sigma^2\Delta t\sum_{i=1}^{n}i^2=\sigma^2\left[(t_0-t)+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}(T-t_0)\right].$$

令 $\tau=T-t$, 其中 τ 为距离到期日的时间. 记

$$\sigma_G^2\tau=\sigma^2\left\{\tau-\left[1-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right](T-t_0)\right\},$$
$$\left(\mu_G-\frac{\sigma_G^2}{2}\right)\tau=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left[\tau-\frac{n-1}{2n}(T-t_0)\right],$$

则在给定时刻 $t<t_0$ 的资产价格 S_t 下, T 时刻 G_n 的转移密度函数可以表示成

$$\psi(G_n;S_t)=\frac{1}{G_n\sqrt{2\pi\sigma_G^2\tau}}\exp\left(-\frac{\left\{\ln G_n-\left[\ln S_t+\left(\mu_G-\frac{\sigma_G^2}{2}\right)\tau\right]\right\}^2}{2\sigma_G^2\tau}\right).\quad(4.3.46)$$

通过风险中性定价方法, 取离散几何平均值的欧式固定敲定价的看涨期权的价格为

$$\begin{aligned}c_G(S_t,t)&=e^{-r\tau}E_Q[\max(G_n-X,0)]\\&=e^{-r\tau}\int_X^{\infty}(G_n-X)\psi(G_n;S_t)dG_n\\&=e^{-r\tau}\left[S_te^{\mu_G\tau}N(d_1)-XN(d_2)\right],\quad t<t_0\end{aligned}\quad(4.3.47)$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{S_t}{X}+\left(\mu_G+\frac{\sigma_G^2}{2}\right)\tau}{\sigma_G\sqrt{\tau}},\quad d_2=d_1-\sigma_G\sqrt{\tau}.$$

考虑两种极端情况：$n=1$ 和 $n\to\infty$. 当 $n=1$ 时, $\sigma_G^2\tau$ 和 $\left(\mu_G-\frac{\sigma_G^2}{2}\right)\tau$ 分别简化为 $\sigma^2\tau$ 和 $\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$, 因此, 看涨期权的价格退化成一份标准欧式看涨期权的价格.

注意：$\sigma_G^2\tau$ 是关于 n 递减的函数, 这与我们的直觉是一致的, 即取平均值

的频率越高, 波动率就越小. 当 $n \to \infty$ 时, $\sigma_G^2\tau$ 和 $\left(\mu_G - \dfrac{\sigma_G^2}{2}\right)\tau$ 分别趋于 $\sigma^2\left[\tau - \dfrac{2}{3}(T-t_0)\right]$ 和 $\left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\left(\tau - \dfrac{T-t_0}{2}\right)$. 相应地, 离散几何平均变成一个连续几何平均. 特别地, 取连续几何平均的欧式固定敲定价的看涨期权在 $t=t_0$ 的价格如下 [也可见方程 (4.3.13)]:

$$c_G(S_{t_0}, t_0) = S_{t_0} e^{-\frac{1}{2}\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)(T-t_0)} N(\widehat{d_1}) - Xe^{-r(T-T_0)}N(\widehat{d_2}), \tag{4.3.48}$$

其中

$$\widehat{d_1} = \frac{\ln \dfrac{S_{t_0}}{X} + \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{\sigma^2}{6}\right)(T-t_0)}{\sigma\sqrt{\dfrac{T-t_0}{3}}}, \quad \widehat{d_2} = \widehat{d_1} - \sigma\sqrt{\frac{T-t_0}{3}}.$$

接下来, 考虑一份处于平均值观察期的期权, 也就是说, 当前时刻 t 在平均值观察期内, 即 $t \geqslant t_0$, 其中 $t = t_k + \xi\Delta t$ 对于整数 $k\,(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 和 $0 \leqslant \xi < 1$. 现在, $S_{t_1}, S_{t_2}, \cdots, S_{t_k}, S_t$ 都是已知量, 而价格比率 $\dfrac{S_{t_{k+1}}}{S_t}, \dfrac{S_{t_{k+2}}}{S_{t_{k+1}}}, \cdots, \dfrac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}}$ 为相互独立的对数随机变量. 令

$$G_n = [S_{t_1}\cdots S_{t_k}]^{1/n} S_t^{(n-k)/n} \times \left\{ \frac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}} \left[\frac{S_{t_{n-1}}}{S_{t_{n-2}}}\right]^2 \cdots \left[\frac{S_{t_{k+1}}}{S_t}\right]^{n-k} \right\}^{1/n},$$

于是

$$\ln \frac{G_n}{\widetilde{S}_t} = \frac{1}{n}\left[\ln R_n + 2\ln R_{n-1} + \cdots + (n-k-1)\ln R_{k+2} + (n-k)\ln R_t\right], \tag{4.3.49}$$

其中

$$\widetilde{S}_t = [S_{t_1}\cdots S_{t_k}]^{1/n} S_t^{(n-k)/n} = G_k^{k/n} S_t^{(n-k)/n}, \quad R_t = S_{t_{k+1}}/S_t.$$

将 $\ln \dfrac{G_n}{\widetilde{S}_t}$ 的方差和均值分别记作 $\widetilde{\sigma}_G^2\tau$ 和 $\left(\widetilde{\mu}_G - \dfrac{\widetilde{\sigma}_G^2}{2}\right)\tau$, 则它们为

$$\widetilde{\sigma}_G^2\tau = \sigma^2\Delta t\left[\frac{(n-k)^2}{n^2}(1-\xi) + \frac{(n-k-1)(n-k)(2n-2k-1)}{6n^2}\right]$$

和

$$\left(\widetilde{\mu}_G - \frac{\widetilde{\sigma}_G^2}{2}\right)\tau = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t\left[\frac{n-k}{n}(1-\xi) + \frac{(n-k-1)(n-k)}{2n}\right].$$

与式 (4.3.47) 类似, 处于平均值观察期的欧式固定敲定价的看涨期权的价格公式具有下列形式:

$$c_G(S_t, \tau) = e^{-r\tau}\left[\widetilde{S}_t e^{\widetilde{\mu}_G\tau} N(\widetilde{d_1}) - XN(\widetilde{d_2})\right], \quad t \geqslant t_0, \tag{4.3.50}$$

其中

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln\dfrac{\widetilde{S}_t}{X} + \left(\widetilde{\mu}_G + \dfrac{\widetilde{\sigma}_G^2}{2}\right)\tau}{\widetilde{\sigma}_G\sqrt{\tau}}, \quad \tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 - \widetilde{\sigma}_G\sqrt{\tau}.$$

再令 $n \to \infty$, $\tilde{\sigma}_G^2, \tilde{\mu}_G - \dfrac{\tilde{\sigma}_G^2}{2}$ 和 $\tilde{S}(t)$ 的极限值分别为

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\sigma}_G^2 = \left(\frac{T-t}{T-t_0}\right)^2 \frac{\sigma^2}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}_G - \frac{\widetilde{\sigma}_G^2}{2} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T-t}{2(T-t_0)} \tag{4.3.51a}$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S}_t = S_t^{\frac{T-t}{T-t_0}} \widetilde{G}_t, \quad \widetilde{G}_t = \exp\left(\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{t} \ln S_u \, du\right). \tag{4.3.51b}$$

将这些极限值代入价格公式 (4.3.50), 就可以推导出相应的连续几何平均值看涨期权的价格.

2. 欧式固定敲定价格的看跌期权

通过类似的推导过程, 可以得到相应的离散几何平均欧式固定敲定价的看跌期权的价格

$$p_G(S,\tau) = \begin{cases} e^{-r\tau}\left[XN(-d_2) - Se^{\mu_G\tau}N(-d_1)\right], & t < t_0, \\ e^{-r\tau}\left[XN(-\tilde{d}_2) - \widetilde{S}e^{\tilde{\mu}_G\tau}N(-\tilde{d}_1)\right], & t \geqslant t_0, \end{cases} \tag{4.3.52}$$

其中 d_1 和 d_2 由式 (4.3.47) 给出, $\tilde{d}_1$ 和 $\tilde{d}_2$ 由式 (4.3.50) 给出. 也可以推导出离散几何平均欧式固定敲定价格亚式期权的看跌–看涨平价公式

$$c_G(S,\tau) - p_G(S,\tau) = \begin{cases} e^{-r\tau}Se^{\mu_G\tau} - Xe^{-r\tau}, & t < t_0, \\ e^{-r\tau}\widetilde{S}e^{\tilde{\mu}_G\tau} - Xe^{-r\tau}, & t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{4.3.53}$$

其他的几何平均欧式亚式期权的解析价格公式可以参见文献 (Boyle, 1993).

4.3.6 离散算术平均的固定敲定价格期权

最一般形式的亚式期权是到期日收益由原生资产历史价格的离散算术平均值决定的固定敲定价格期权. 由于服从对数正态分布的分量之和没有闭合形式的表达式, 所以此时原生资产服从几何布朗运动使得我们很难求得期权价格.

设在时段 $[t_0, t_n]$ 内的离散时间点 $t_i = t_0 + i\Delta t\,(i = 0, 1, \cdots, n)$, $\Delta t = \dfrac{t_n - t_0}{n}$ 计算资产价格的平均值. 截至当前时刻 $t\,(t_m \leqslant t < t_{m+1})$ 的平均值 $A(t)$ 定义如下:

$$A(t) = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} S_{t_i}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n. \tag{4.3.54}$$

对于 $t < t_0$, $A(t) = 0$. 记 t_n 为到期日, 这样在到期日, 固定敲定价格看涨期权的收益函数为 $\max(A(t_n) - X, 0)$, 其中 X 为敲定价格. 为方便起见, 用如下的 $\tilde{A}(t_n; t)$ 来表示到期日收益:

$$\widetilde{A}(t_n; t) = A(t_n) - \frac{m+1}{n+1}A(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=m+1}^{n} S_{t_i}, \tag{4.3.55}$$

这是当前时刻之后未知的随机部分的平均值. 例如, 固定敲定价格看涨期权的到期日收益可以重新写为 $\max(\widetilde{A}(t_n; t) - X^*, 0)$, 其中

$$X^* = X - \frac{m+1}{n+1}A(t) \tag{4.3.56}$$

是期权的有效敲定价格. 容易看出, 如果 X^* 为负数, 则亚式看涨期权在到期日肯定会被实施.

$A(t_n)$ 或者 $\widetilde{A}(t_n; t)$ 的概率分布都没有显式表达式. 推导近似解析价格公式最好的方法就是通过**广义 Edgeworth 级数展开** (generalized Edgeworth series expansion), 利用近似对数分布来逼近 $A(t_n)$ (或者 $\widetilde{A}(t_n; t)$) 的分布, 其中 Edgeworth 级数展开类似于复变函数论中解析函数的 Taylor 展开式. 关于 Edgeworth 级数展开的简要讨论将在下面给出 (Jarrow and Rudd, 1982).

1. Edgeworth 级数展开

给定一个真实的概率分布 $F_t(s)$, 将通过一个近似分布 $F_a(s)$ 来逼近 $F_t(s)$. 只考虑 $\dfrac{dF_t(s)}{ds} = f_t(s)$ 和 $\dfrac{dF_a(s)}{ds} = f_a(s)$ 都存在的分布, 即具有连续密度函数的分布. 首先, 定义下面这些量:

(i) 分布 F 的 j 阶矩:

$$\alpha_j(F) = \int_{-\infty}^{\infty} s^j f(s)ds;$$

(ii) 分布 F 的 j 阶中心矩:

$$\mu_j(F) = \int_{-\infty}^{\infty} [s - \alpha_1(F)]^j f(s)ds;$$

(iii) F 的特征函数:

$$\phi(F, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} f(s)ds, \quad i = \sqrt{-1},$$

其中假设对于 $j \leqslant n$, $\alpha_j(F)$ 存在. 接下来, 定义累积量 $k_j(F)$,

$$\ln \phi(F, t) = \sum_{j=1}^{n-1} k_j(F)\frac{(it)^j}{j!} + o(t^{n-1}). \tag{4.3.57}$$

通过理论分析可以证明, 只要 $\alpha_n(F)$ 存在, 前 $n-1$ 个累积量就都存在. 前 4 个累积量分别为

$$k_1(F)=\alpha_1(F),\quad k_2(F)=\mu_2(F),\quad k_3(F)=\mu_3(F),\quad k_4(F)=\mu_4(F)-3[\mu_2(F)]^2.$$

另外, 假设导数 $\dfrac{d^jF_a(s)}{ds^j}$ $(j\leqslant m)$ 存在. 记 $N=\min(n,m)$, 则 $\ln\phi(F_t,t)$ 和 $\ln\phi(F_a,t)$ 的差可以表示为

$$\ln\phi(F_t,t)=\sum_{j=1}^{N-1}[k_j(F_t)-k_j(F_a)]\frac{(it)^j}{j!}+\ln\phi(F_a,t)+o(t^{N-1}).$$

对上面等式两边取指数 (注意到 $e^{o(t^{N-1})}=1+o(t^{N-1})$) 得到

$$\phi(F_t,t)=\exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}[k_j(F_t)-k_j(F_a)]\frac{(it)^j}{j!}\right)\phi(F_a,t)+o(t^{n-1}). \tag{4.3.58}$$

将上面的指数项按照 it 的幂指数展开, 于是有

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}[k_j(F_t)-k_j(F_a)]\frac{(it)^j}{j!}\right)=\sum_{j=0}^{N-1}E_j\frac{(it)^j}{j!}+o(t^{N-1}),$$

其中前面几个系数如下:

$$E_0=1,\quad E_1=k_1(F_t)-k_1(F_a),\quad E_2=[k_2(F_t)-k_2(F_a)]+E_1^2,$$

$$E_3=[k_3(F_t)-k_3(F_a)]+3E_1[k_2(F_t)-k_2(F_a)]+E_1^3,\quad\cdots.$$

利用累积量, 可以将 (4.3.58) 写为

$$\phi(F_t,t)=\left[\sum_{j=0}^{N-1}E_j\frac{(it)^j}{j!}\right]\phi(F_a,t)+o(t^{N-1}). \tag{4.3.59}$$

最后, 对上面方程进行逆傅里叶变换. 利用下述关系式:

$$f_t(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-its}\phi(F_t,t)dt,$$

$$(-1)^j\frac{d^jf_a(s)}{ds^j}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-its}(it)^j\phi(F_a,t)\,dt,\quad j=0,1,\cdots,N-1,$$

可以得出 Edgeworth 级数展开的表达式

$$f_t(s)=f_a(s)+\sum_{j=1}^{N-1}E_j\frac{(-1)^j}{j!}\frac{d^jf_a(s)}{ds^j}+\epsilon(s,N), \tag{4.3.60}$$

其中

$$\epsilon(s,N)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{its}o(t^{N-1})dt.$$

为了使得对所有的 s, $\epsilon(s,N)$ 都存在, 需要注意:

$$\lim_{N\to\infty}|\epsilon(s,N)|=0 \quad 对所有\ s.$$

假设可以计算出真实的和近似的分布所有的矩, 理论上就可以断定无论需要怎样的精确度, 都可以用另一个分布来逼近给定的真实分布.

在算术平均亚式期权的定价问题中, 使用对数分布作为近似分布是最方便的, 因为由此得出的近似价格公式与 Black-Scholes 型公式很相近. 如果选择近似对数分布的参数, 使得它的前两个矩与真实分布的前两个矩相符, 即 $\alpha_1(F_t)=\alpha_1(F_a)$ 和 $\mu_2(F_t)=\mu_2(F_a)$, 则由于 $E_1=\alpha_1(F_t)-\alpha_1(F_a)=0$ 和 $E_2=\mu_2(F_t)-\mu_2(F_a)+E_1^2=0$, 相应的两项 Edgeworth 级数展开为

$$f_t(s)=f_a(s)+\epsilon(s,3). \tag{4.3.61}$$

2. 固定敲定价格看涨期权

考虑一份离散算术平均的固定敲定价格看涨期权, 其到期日收益为 $\max(A(t_n)-X,0)$. 利用风险中性定价方法, 固定敲定价格亚式看涨期权的价格如下:

$$\begin{aligned}c(S,A,t)&=e^{-r\tau}E_Q[\max(A(t_n)-X,0)]\\&=e^{-r\tau}E_Q[\max(\widetilde{A}(t_n;t)-X^*,0)],\end{aligned} \tag{4.3.62}$$

其中, 在风险中性测度 Q 和条件 $S_t=S$, $A(t)=A$, $\tau=t_n-t$ 下取条件期望. 而 $\widetilde{A}(t_n;t)$ 和 X^* 的定义见方程 (4.3.55), (4.3.56).

希望通过对数分布来逼近 $\widetilde{A}(t_n;t)$ 的分布. 更具体地说, 用一个均值和方差分别为 $\mu(t)$ 和 $\sigma(t)^2$ 的正态分布来逼近 $\ln\widetilde{A}(t_n;t)$ 的分布. 近似对数分布的前两个矩分别为 (见习题 2.28)

$$\begin{aligned}\alpha_1(F_a)&=\mu(t)+\frac{\sigma(t)^2}{2},\\\alpha_2(F_a)&=2\mu(t)+2\sigma(t)^2.\end{aligned}$$

假设采用 $\widetilde{A}(t_n;t)$ 的两项 Edgeworth 逼近, 这使得近似对数分布的前两个矩与 $\widetilde{A}(t_n;t)$ 分布的前两个矩相等, 即

$$\mu(t)+\frac{\sigma(t)^2}{2}=\ln E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)],$$

$$2\mu(t)+2\sigma(t)^2=\ln E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)^2].$$

求解 $\mu(t)$ 和 $\sigma(t)^2$ 得到

$$\mu(t) = 2\ln E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)] - \frac{1}{2}\ln E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)^2],$$

$$\sigma(t)^2 = \ln E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)^2] - 2\ln E_Q(\widetilde{A}[t_n;t)].$$

假设 $\ln \widetilde{A}(t_n;t)$ 服从一个均值为 $\mu(t)$ 和方差为 $\sigma(t)^2$ 的正态分布, 那么固定敲定价格亚式看涨期权的价格为

$$c(S,A,t) = e^{-r\tau}\{E_Q[\tilde{A}(t_n;t)]N(d_1) - X^*N(d_2)\}, \tag{4.3.63}$$

其中 $\tau = t_n - t$,

$$d_1 = \frac{\mu(t) + \sigma(t)^2 - \ln X^*}{\sigma(t)}, \quad d_2 = d_1 - \sigma(t).$$

接下来, 只要讨论如何确定 $E[\widetilde{A}(t_n;t)]$ 和 $E[\widetilde{A}(t_n;t)^2]$.

用 S_t 代表时间 $-t$ 资产价格, 其中 $t = t_m + \xi\Delta t\,(0 \leqslant \xi < 1)$. 对于 $t \geqslant t_0$ 有

$$E_Q[\tilde{A}(t_n;t)] = \frac{1}{n+1}\sum_{i=m+1}^{n} E_Q[S_{t_i}]. \tag{4.3.64}$$

在风险中性测度 Q 下, 资产价格的运动服从

$$\frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma dZ_t, \tag{4.3.65}$$

其中 Z_t 为 Q 布朗运动. 因此有

$$E_Q[S_{t_i}] = S_t e^{r(i-m-\xi)\Delta t},$$

这样就得到

$$E_Q[\tilde{A}(t_n;t)] = \frac{S_t}{n+1}e^{r(1-\xi)\Delta t}\left[\frac{1-e^{r(n-m)\Delta t}}{1-e^{r\Delta t}}\right], \quad t \geqslant t_0. \tag{4.3.66}$$

对于 $t < t_0$, 同样可以证明

$$E_Q[\tilde{A}(t_n;t)] = \frac{S_t}{n+1}e^{r(t_0-t)}\left[\frac{1-e^{r(n+1)\Delta t}}{1-e^{r\Delta t}}\right], \quad t < t_0. \tag{4.3.67}$$

接下来, 考虑 $E[\widetilde{A}(t_n;t)^2]$. 对于 $t \geqslant t_0$ 有

$$E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)^2] = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n} E[S_{t_i}S_{t_j}]$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n} e^{r(i+j-2\xi)\Delta t + \sigma^2(\min(i,j)-\xi)\Delta t}S_t^2.$$

在经过一些烦琐的处理之后得到 (Levy, 1992)

$$E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)^2] = \frac{S_t^2}{(n+1)^2} e^{-2\xi\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}(A_1 - A_2 + A_3 - A_4), \quad t \geqslant t_0, \tag{4.3.68}$$

其中

$$A_1 = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - e^{(2r+\sigma^2)(N-m+1)\Delta t}}{(1-e^{r\Delta t})[1-e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}]},$$
$$A_2 = \frac{e^{[r(N-m+2)+\sigma^2]\Delta t} - e^{(2r+\sigma^2)(N-m+1)\Delta t}}{(1-e^{r\Delta t})[1-e^{(r+\sigma^2)\Delta t}]},$$
$$A_3 = \frac{e^{(3r+\sigma^2)\Delta t} - e^{[r(N-m+2)+\sigma^2]\Delta t}}{(1-e^{r\Delta t})[1-e^{(r+\sigma^2)\Delta t}]},$$
$$A_4 = \frac{e^{2(2r+\sigma^2)\Delta t} - e^{(2r+\sigma^2)(N-m+1)\Delta t}}{[1-e^{(r+\sigma^2)\Delta t}][1-e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}]}.$$

当 $t < t_0$ 时, 也可以同样地计算 $E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)^2]$ (见习题 4.33).

4.4 习　题

4.1　考虑函数

$$f(S,\tau) = \left(\frac{S}{B}\right)^{\lambda} c_E\left(\frac{B^2}{S},\tau\right),$$

其中 $c_E(S,\tau)$ 为一份平凡欧式看涨期权的价格, λ 为一个常数参数.

证明当 $\lambda = -\frac{2r}{\sigma^2}+1$ 时, $f(S,\tau)$ 满足 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS\frac{\partial f}{\partial S} - rf.$$

提示: 将 $f(S,\tau)$ 代入 Black-Scholes 方程就得出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial \tau} - \left[\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS\frac{\partial f}{\partial S} - rf\right]\\ =&\left(\frac{S}{B}\right)^{\lambda}\left[\frac{\partial c_E}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\xi^2\frac{\partial^2 c_E}{\partial \xi^2}\right.\\ &\left.+(\lambda-1)\sigma^2\xi\frac{\partial c_E}{\partial \xi} - \lambda(\lambda-1)\frac{\sigma^2}{2}c_E - r\lambda c_E + r\xi\frac{\partial c_E}{\partial \xi} + rc_E\right],\end{aligned}$$

其中 $c_E = c_E(\xi,\tau)$ $\left(\xi = \frac{B^2}{S}\right)$.

4.2　考虑一份具有指数障碍值的欧式无退款上升敲出看跌期权 $B(\tau) = Be^{-\gamma\tau}$, 其中对所有的 τ 有 $B(\tau) > X$. 证明这份障碍看跌期权的价格为

$$p(S,\tau) = p_E(S,\tau) - \left[\frac{B(\tau)}{S}\right]^{\delta-1} p_E\left(\frac{B(\tau)^2}{S},\tau\right), \quad \delta = \frac{2(r-\gamma)}{\sigma^2},$$

其中 $p_E(S,\tau)$ 为相应的标准欧式看跌期权的价格. 推导相应的具有相同障碍值的欧式上升敲入看跌期权的价格.

提示: 令 $y = \ln\frac{S}{B(\tau)}$, 证明 $p(y,\tau)$ 满足

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \gamma\right)\frac{\partial p}{\partial y} - rp.$$

4.3　通过对 Black-Scholes 方程中的独立变量进行变换

$$c = e^{\alpha y + \beta\tau} w,$$

其中 $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \beta = -\frac{\alpha^2\sigma^2}{2} - r$, 证明方程 (4.1.3a) 可以被简化成一个原始的扩散方程

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

同时辅助条件可以转换为

$$w(0,\tau) = e^{-\beta\tau}R(\tau), \quad w(y,0) = \max(e^{\alpha y}(e^y - X), 0).$$

考虑下面定义在半无界区域内的扩散方程:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0, a \text{ 为一个正常数},$$

初始条件为 $v(x,0) = f(x)$, 边界条件为 $v(0,t) = g(t)$, 这个扩散方程的解如下 (Kevorkian, 1990):

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\xi)[e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} - e^{-(x+\xi)^2/4a^2t}]\,d\xi + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-x^2/4a^2\omega}}{\omega^{3/2}} g(t-\omega)d\omega.$$

利用上述形式的解, 证明欧式下降敲出看涨期权的价格为

$$c(y,\tau) = e^{\alpha y + \beta\tau}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma}\int_0^\infty \max(e^{-\alpha\xi}(e^\xi - X), 0) \times \left[e^{-(y-\xi)^2/2\sigma^2\tau} - e^{-(y+\xi)^2/2\sigma^2\tau}\right] d\xi + \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^\tau \frac{e^{-\beta(\tau-\omega)}e^{-y^2/2\sigma^2\omega}}{\omega^{3/2}} R(\tau-\omega)\,d\omega\right\}.$$

假设 $B < X$, 证明欧式下降敲出看涨期权的价格为 (见方程 (4.1.11))

$$c(S,\tau)=c_E(S,\tau)-\left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1}c_E\left(\frac{B^2}{S},\tau\right)+\int_0^\tau e^{-r\omega}\frac{\ln\frac{S}{B}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{\exp\left(\frac{-\left[\ln\frac{S}{B}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\omega\right]^2}{2\sigma^2 w}\right)}{\omega^{3/2}}R(\tau-\omega)d\omega,$$

最后一项代表由于存在退款额而增加的期权费用.

4.4 假设资产价格在风险中性测度 Q 下服从几何布朗运动过程, 它的漂移率为 r, 波动率为 σ. 求出当 0 时刻的资产价格 S 低于障碍值 B, 然后达到障碍值, 最后在到期日又低于障碍值时, 到期日 T 的资产价格 S_T 的密度函数.

4.5 定义

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{K}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau},$$

$$d_3=\frac{2\ln\frac{B}{S}}{\sigma\sqrt{\tau}}+d_1,\quad d_4=d_3-\sigma\sqrt{\tau},\quad \delta=\frac{2r}{\sigma^2}$$

和

$$V_b(S,\tau;K)=[Xe^{-r\tau}N(-d_2)-SN(-d_1)]-\left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1}\left[Xe^{-r\tau}N(-d_4)-\frac{B^2}{S}N(-d_3)\right],$$

证明各类欧式障碍看跌期权的价格函数如下:

$$p_{uo}(S,\tau;X,B)=V_b(S,\tau;\min(X,B)),$$
$$p_{do}(S,\tau;X,B)=\max(V_b(S,\tau;X)-V_b(S,\tau;B),0),$$
$$p_{ui}(S,\tau;X,B)=p_E(S,\tau;X)-p_{uo}(S,\tau;X,B),$$
$$p_{di}(S,\tau;X,B)=p_E(S,\tau;X)-p_{do}(S,\tau;X,B),$$

其中 $p_E(S,\tau;X)$ 为标准欧式看跌期权的价格函数, B 为障碍值, X 为敲定价格.

4.6 考虑一份欧式下降敲出看涨期权, 它的到期日收益与收益状态变量 S_1 有关, 并且当障碍值状态变量 S_2 达到下降障碍值 B_2 时期权被敲出. 假设在风险中性测度 Q 下, $S_{1,t}$ 和 $S_{2,t}$ 的运动服从

$$\frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}}=rdt+\sigma_i dZ_{i,t},\quad i=1,2,\quad dZ_1dZ_2=\rho dt.$$

用 X_1 表示期权的敲定价, 证明这份具有一个**外部障碍值** 的下降敲出看涨期权的价格为 (Kwok et al., 1998)

$$\begin{aligned}\text{看涨期权价格} &= e^{-rT}E_Q[(S_{1,T}-X_1)\mathbf{1}_{\{S_{1,T}>X_1\}}\mathbf{1}_{\{m_{2,0}^T>B_2\}}]\\ &= S_{1,0}\left[N_2(d_1,e_1;\rho)-\left(\frac{B_2}{S_{2,0}}\right)^{\delta_2-1+2\gamma_{12}}N(d_1',e_1';\rho)\right]\\ &\quad -e^{-rT}X_1\left[N(d_2,e_2;\rho)-\left(\frac{B_2}{S_{2,0}}\right)^{\delta_2-1}N(d_2',e_2';\rho)\right],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\frac{S_{1,0}}{X_1}+\left(r+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1\sqrt{T}},\quad d_2=d_1-\sigma_1\sqrt{T},\\ d_1' &= d_1+\frac{2\gamma_{12}\ln\frac{B_2}{S_{2,0}}}{\sigma_1\sqrt{T}},\quad d_2'=d_1'-\sigma_1\sqrt{T},\\ e_1 &= \frac{\ln\frac{S_{2,0}}{B_2}+\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}+\rho\sigma_1\sigma_2\right)T}{\sigma_2\sqrt{T}},\quad e_2=e_1-\rho\sigma_1\sqrt{T},\\ e_1' &= e_1+\frac{2\ln\frac{B_2}{S_{2,0}}}{\sigma_2\sqrt{T}},\quad e_2'=e_1'-\rho\sigma_1\sqrt{T},\\ \delta_2 &= \frac{2r}{\sigma_2^2},\quad \gamma_{12}=\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}.\end{aligned}$$

4.7　考虑一份欧式下降敲出**部分障碍** (partial barrier) 看涨期权, 其障碍值在期权生效日 (0 时刻) 和 t_1 之间才有效, 其中 $t_1\,(0<t_1<T)$ 为到期日 T 之前的某个时刻. 用 B 和 X 分别代表下降障碍值和敲定价, $B<X$. 假设 S_t 在风险中性测度 Q 下服从

$$\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma Z_t.$$

假设 $S_0>B$, 证明下降敲出看涨期权的价格如下 (Heynen and Kat, 1994a):

$$\begin{aligned}&\text{看涨期权价格}\\ &= e^{-rT}E_Q\left[(S_T-X)\mathbf{1}_{\{S_T>X\}}\mathbf{1}_{\{m_0^{t_1}>B\}}\right]\\ &= S_0\left[N\left(d_1,e_1;\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)-\left(\frac{B}{S}\right)^{\delta+1}N\left(d_1',e_1';\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)\right]\\ &\quad -e^{-rT}X\left[N\left(d_2,e_2;\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)-\left(\frac{B}{S}\right)^{\delta-1}N\left(d_2',e_2';\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)\right],\end{aligned}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$d_1' = d_1 + \frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{T},$$

$$e_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{B} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}}, \quad e_2 = e_1 - \sigma\sqrt{t_1},$$

$$e_1' = e_1 + \frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{t_1}}, \quad e_2' = e_1' - \sigma\sqrt{t_1},$$

$$\delta = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

证明当 $t_1 = T$ 时, 上面的价格公式可以简化为方程 (4.1.12a), (4.1.12b) 中定义的价格函数.

提示: 通过设定 $\rho = \sqrt{\frac{t_1}{T}}$, $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sqrt{\frac{t_1}{T}}\sigma$, 则 $\gamma_{12} = 1$, 即可修正习题 4.6 中的价格公式.

4.8 考虑 $g(x,t)$ 中的一个典型项

$$\frac{\exp\left(\frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2 t}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2 t}\right),$$

其中 ξ 可以为 $2n(u-\ell)$ 或者 $2\ell + 2n(u-\ell)$. 证明上面的项也可以写为

$$\frac{e^{\frac{\mu\xi}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(\frac{-(x-\xi-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right).$$

由此证明

$$\begin{aligned}\int_\ell^u g(x,t)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} & \exp\left(\frac{2\mu n(u-\ell)}{\sigma^2}\right) \\ & \times \left[N\left(\frac{u-\mu t-2u(u-\ell)}{\sigma\sqrt{t}}\right) - N\left(\frac{\ell-\mu t-2n(u-\ell)}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right] \\ & - \exp\left(\frac{2\mu[\ell+n(u-\ell)]}{\sigma^2}\right) \\ & \times \left[N\left(\frac{u-\mu t-2\ell-2n(u-\ell)}{\sigma\sqrt{t}}\right) - N\left(\frac{\ell-\mu t-2\ell-2n(u-\ell)}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right].\end{aligned}$$

利用上面的结果推导欧式双障碍值敲出看涨期权的价格公式 c_{LU}^o (见 4.1.3 小节).

推广障碍值为时间的指数函数. 假设上边界和下边界分别为 $Ue^{\delta_1 t}$ 和 $Le^{\delta_2 t}$ ($t \in [0,T]$), 其中 δ_1 和 δ_2 为常数参量, 并且在 $[0,T]$ 内两个障碍边界互不相交. 证明欧式双障碍值敲出看涨期权的价格公式可以表示成 (Kunitomo and Ikeda, 1992)

$$
\begin{aligned}
c_{LU}^o = S \sum_{n=-\infty}^{\infty} & \left\{ \left(\frac{U^n}{L^n}\right)^{\mu_1} \left(\frac{L}{S}\right)^{\mu_2} [N(d_1) - N(d_2)] \right. \\
& - \left(\frac{L^{n+1}}{U^n S}\right)^{\mu_3} [N(d_3) - N(d_4)] \\
& - Xe^{-rT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{U^n}{L^n}\right)^{\mu_1 - 2} \left(\frac{L}{S}\right)^{\mu_2} N(d_1 - \sigma\sqrt{T}) - N(d_2 - \sigma\sqrt{T}) \right] \\
& \left. - \left(\frac{L^{n+1}}{U^n S}\right)^{\mu_3 - 2} [N(d_3 - \sigma\sqrt{T}) - N(d_4 - \sigma\sqrt{T})] \right\},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln \dfrac{SU^{2n}}{XL^{2n}} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln \dfrac{SU^{2n}}{FL^{2n}} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\
d_3 &= \frac{\ln \dfrac{L^{2n+2}}{XSU^{2n}} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_4 = \frac{\ln \dfrac{L^{2n+2}}{FSU^{2n}} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\
\mu_1 &= \frac{2[r - \delta_2 - n(\delta_1 - \delta_2)]}{\sigma^2} + 1, \quad \mu_2 = 2n\frac{\delta_1 - \delta_2}{\gamma^2}, \\
\mu_3 &= \frac{2[r - \delta_2 + n(\delta_1 - \delta_2)]}{\sigma^2} + 1, \quad F = Ue^{\delta_1 T}.
\end{aligned}
$$

4.9 用 $P(x,t;x_0,t_0)$ 表示在 $x=0$ 和 $x=\ell$ 有两个吸收边界, 被限制的布朗运动 $W_t^\mu = \mu t + \sigma Z_t$ 的转移密度函数, 利用分离变量方法 (Kevorkian, 1990), 证明解 $P(x,t;x_0,t_0)$ 具有下面的特征函数展开式 (这同方程 (4.1.48) 中的解析形式很不一样):

$$
P(x,t;x_0,t_0) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(x-x_0)} \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k(t-t_0)} \sin\frac{k\pi x}{\ell} \sin\frac{k\pi x_0}{\ell},
$$

其中特征值为

$$
\lambda_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{k^2\pi^2\sigma^2}{\ell^2}\right).
$$

提示: $P(x,t;x_0,t_0)$ 满足正向 Fokker-Planck 方程以及定解条件 $P(0,t) = P(\ell,t) = 0$ 和 $P(x,t_0^+;x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$. Pelsser (2000) 通过对布朗维奇围道积分进行拉普拉斯转换得出了上述解.

4.10 假设逸出时间密度 $q^+(t;x_0,t_0)$ 依赖于初始状态值 $X(t_0)=x_0$. 记 $\tau=t-t_0$, 使得 $q^+(t;x_0,t_0)=q^+(x_0,\tau)$. 证明其满足的偏微分方程如下:

$$\frac{\partial q^+}{\partial \tau}=\mu\frac{\partial q^+}{\partial x_0}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 q^+}{\partial x_0^2},\quad \ell<x_0<u,\quad \tau>0,$$

定解条件为

$$q^+(u,\tau)=0,\quad q^+(\ell,\tau)=0,\quad q^+(x_0,0)=\delta(x_0).$$

利用偏微分方程方法求解 $q^+(x_0,\tau)$, 并且把这个解与方程 (4.1.53b) 中的解进行比较. 再证明

$$\int_{t_0}^t q^+(s;x_0,t_0)ds+\int_{t_0}^t q^-(s;x_0,t_0)ds+\int_\ell^u P(x,t;x_0,t_0)dx=1,$$

其中 $P(x,t;x_0,t_0)$ 为习题 4.9 中定义的转移密度函数.

4.11 利用路径计算方法, Sidenius (1998) 证明了方程 (4.1.44b) 中定义的 $g^+(x,T)$ 具有下述解析形式:

$$\begin{aligned}g^+(x,T)=&\exp\left(\frac{\mu x}{\sigma^2}-\frac{\mu^2}{\sigma^2}T\right)\\&\times\left[\sum_{n=1}^{\infty}\phi(x;\alpha_n^+,\sigma\sqrt{T})-\phi(x;\beta_n^+,\sigma\sqrt{T})\right],\end{aligned}$$

其中

$$\phi(x;\lambda,\nu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}}\exp\left(-\frac{(x-\lambda)^2}{2\nu^2}\right),$$
$$\alpha_n^+=2n(u-\ell)+2\ell,\quad \beta_n^+=2n(u-\ell).$$

求出欧式上升障碍值敲入看涨期权 c_U^i 的闭合形式的价格公式 (见 4.1.3 小节及文献 (Luo, 2001)).

4.12 有顺序障碍值期权是一份具有双边障碍值的障碍期权, 只有当两个障碍值按照预先设定的顺序 (如先上升后下降) 被达到时, 期权才终止有效. 证明有顺序先上升后下降敲出看涨期权的价格公式可以从双障碍敲出看涨期权的价格公式 (见习题 4.8) 推导出来, 其中对于 n 的无限项求和由两项求和取代 (Li, 1999).

提示: 在原生资产价格到达上边界之后, 有顺序先上升后下降敲出看涨期权变成相应的下降敲出看涨期权.

4.13 考虑一份离散观察的下降敲出看涨期权, 它的敲定价为 X, 在离散时刻 $t_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的障碍值为 B_i. 证明欧式障碍值看涨期权的价格如下 (Heynen and Kat, 1996):

$$\begin{aligned}&c_{d_0}(S_0,T;X,B_1,B_2,\cdots,B_n)\\&=S_0N_{n+1}(d_1^1,d_1^2,\cdots,d_1^{n+1};\Gamma)-e^{-rT}N_{n+1}(d_2^1,d_2^2,\cdots,d_2^{n+1};\Gamma),\end{aligned}$$

其中

$$d_1^i = \frac{\ln \frac{S_0}{B_{t_i}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) t_i}{\sigma\sqrt{t_i}}, \quad d_2^i = d_1^i - \sigma\sqrt{t_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$d_1^{n+1} = \frac{\ln \frac{S_0}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2^{n+1} = d_1^{n+1} - \sigma\sqrt{T},$$

Γ 为 $(n+1) \times (n+1)$ 型的相关系数矩阵, 它的值为

$$\rho_{jk} = \frac{\min(t_j, t_k)}{\sqrt{t_j}\sqrt{t_k}}, 1 \leqslant j, k \leqslant n, \quad \rho_{j,n+1} = \sqrt{\frac{t_j}{T}}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

4.14　用 $f_{\min}(y)$ 和 $f_{\max}(y)$ 分别代表 y_T 和 Y_T 的密度函数, 证明

$$\begin{aligned} f_{\min}(y) = & \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \frac{2\mu}{\sigma^2} e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} N\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ & + e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \\ f_{\max}(y) = & \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \frac{2\mu}{\sigma^2} e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} N\left(\frac{-y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ & + e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{-y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right). \end{aligned}$$

比较式 (4.1.26), (4.1.27) 中与 $f_{\text{down}}(x, m, T)$ 和 $f_{\text{up}}(y, M, T)$ 相关的结果.

4.15　作为推导欧式浮动敲定价格回望看涨期权价值的另一种方法, 考虑

$$\begin{aligned} c_{f\ell}(S, m, \tau) &= e^{-r\tau} E_Q[S_T - \min(m, m_t^T)] \\ &= S - e^{-r\tau} E_Q[\min(m, m_t^T)], \end{aligned}$$

其中 $S_t = S, m_{T_0}^t = m$, $\tau = T - t$. 可以将上面期望的计算拆成两项:

$$E_Q[\min(m, m_t^T)] = mP(m \leqslant m_t^T) + E_Q[m_t^T \mathbf{1}_{\{m > m_t^T\}}].$$

证明第一项为

$$\begin{aligned} & mP\left(\ln \frac{m_t^T}{S} \geqslant \ln \frac{m}{S}\right) \\ = & m\left[N\left(\frac{-\ln \frac{m}{S} + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \left(\frac{S}{m}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln \frac{m}{S} + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right], \end{aligned}$$

第二项可以表示成

$$E_Q[m_t^T \mathbf{1}_{\{m_t^T > m\}}] = \int_{-\infty}^{\ln \frac{m}{S}} Se^y f_{\min}(y)dy.$$

经过复杂的积分运算之后, 同样可以得到价格函数 $c_{f\ell}(S, m, \tau)$(见方程 (4.2.9)).

4.16 利用如下 m_t^T 的分布函数 (见方程 (4.2.4a)):

$$P(m \leqslant m_t^T) = N\left(\frac{-\ln \dfrac{m}{S} + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \left(\frac{S}{m}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln \dfrac{m}{S} + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

证明当 $S = m$ 时, $P(m \leqslant m_t^T) = 0$.

4.17 在展期策略中, 利用一个跨式期权 (包含具有相同敲定价格 m 的一份看涨期权和一份看跌期权) 来对冲浮动敲定价格回望看涨期权, 并记

$$c_{f\ell}(S, m, \tau) = c_E(S, \tau; m) + p_E(S, \tau; m) + \text{敲定价附加费}.$$

用 S_T 和 m_t^T 的分布函数来表示敲定价附加费的积分表达式. 当在展期策略中使用欧式看涨期权时, 试比较方程 (4.2.14) 中给出的敲定价附加费.

4.18 证明固定敲定价格回望看涨期权和浮动敲定价格回望看跌期权价格之间的看跌–看涨平价公式

$$c_{fix}(S, M, \tau; X) = p_{f\ell}(S, \max(M, X), \tau) + S - Xe^{-r\tau},$$

并证明

$$\frac{\partial c_{fix}}{\partial M} = 0, \quad M < X.$$

试从金融意义上说明, 为什么当 $M < X$ 时, c_{fix} 对 M 的变化会很敏感 (也可见方程 (4.2.6)).

4.19 设部分回望看涨和看跌期权的到期日收益函数分别为 $\max(S_T - \lambda m_{T_0}^T, 0)$ $(\lambda > 1)$ 和 $\max\left(\lambda M_{T_0}^T - S_T, 0\right)$ $(0 < \lambda < 1)$. 证明这些回望期权的价格公式分别为 (Conze and Viswanathan, 1991)

$$\begin{aligned} c(S, m, \tau) = {} & SN\left(d_m - \frac{\ln \lambda}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \lambda m e^{-r\tau} N\left(d_m - \frac{\ln \lambda}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau}\right) \\ & + e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}\lambda S\left[\left(\frac{S}{m}\right)^{-2r/\sigma^2} N\left(-d_m + \frac{2r}{\sigma}\sigma - \frac{\ln \lambda}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right. \\ & \left. - e^{r\tau}\lambda^{2r/\sigma^2} N\left(-d_m - \frac{\ln \lambda}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p(S,M,\tau) = & -SN\left(-d_M + \frac{\ln\lambda}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
& + \lambda M e^{-r\tau} N\left(-d_M + \frac{\ln\lambda}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) \\
& - e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}\lambda S\left[\left(\frac{S}{M}\right)^{-2r/\sigma^2} N\left(d_M - \frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau} + \frac{\ln\lambda}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right. \\
& \left. - e^{r\tau}\lambda^{2r/\sigma^2} N\left(d_M + \frac{\ln\lambda}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right],
\end{aligned}
$$

其中 d_m 和 d_M 分别见方程 (4.2.9) 和 (4.2.10).

4.20　回望价差期权的到期日收益为

$$
c_{sp}(S,m,M,0) = \max(M_{T_0}^T - m_{T_0}^T - X, 0).
$$

证明欧式回望价差期权的价格可以表示为 (Wong and Kwok, 2003b)

(i) 处于平价或者实值状态, 即 $M - m - X \geqslant 0$, 则

$$
c_{sp}(S,m,M,\tau) = c_{f\ell}(S,m,\tau) + p_{f\ell}(S,M,\tau) - Xe^{-r\tau};
$$

(ii) 处于虚值状态, 即 $M - m - X < 0$, 则

$$
\begin{aligned}
c_{sp}(S,m,M,\tau) = & \ c_{f\ell}(S,m,\tau) + p_{f\ell}(S,M,\tau) - Xe^{-r\tau} \\
& + e^{-r\tau}\int_M^{m+X} P(M_t^T < \xi \leqslant m_t^T + X)d\xi.
\end{aligned}
$$

4.21　如果在到期日之前, 原生资产价格大幅度下跌, 则原本处于实值状态的欧式看涨期权的持有者可能就会遭受损失. “有限期” 固定敲定价格回望的特征可以解决这类持有者的退出市场问题. 为了求得退出市场的最佳时机, 应该选择一个回望期, 开始于期权生效日之后的某个时刻, 结束于期权到期日. 用 $[T_1, T]$ 代表回望期, 并考虑这份固定敲定价格回望看涨期权在回望期之前时刻 t 的定价问题, 其到期日收益为 $\max(M_{T_1}^T - X, 0)$.

注意: 当 $S_{T_1} > X$ 时, 在到期日, 这份看涨期权必定是盈利的, 因为 $M_{T_1}^T \geqslant S_{T_1}$. 证明欧式 “有限期” 回望看涨期权的价格为

$$
\begin{aligned}
c(S,\tau) = & \ e^{-r\tau}E_Q\left[\max\left(M_{T_1}^T - X, 0\right)\right] \\
= & \ e^{-r\tau}E_Q\left[\left\{S_{T_1}\left(\frac{M_{T_1}^T}{S_{T_1}}\right) - X\right\}\mathbf{1}_{\{m_{T_1}^T > X, S_{T_1} < X\}}\right] \\
& + e^{-r\tau}E_Q\left[\left\{S_{T_1}\left(\frac{M_{T_1}^T}{S_{T_1}}\right) - X\right\}\mathbf{1}_{\{S_{T_1} > X\}}\right], \quad t < T_1,
\end{aligned}
$$

其中在风险中性测度 Q 下取期望, X 为敲定价格. 假设在测度 Q 下, 资产价格服从通常的几何布朗运动, 证明

$$\begin{aligned}c(S,\tau)=&SN(d_1)-e^{-r\tau}XN(d_2)-SN_2\left(-e_1,d_1;-\sqrt{\frac{T-T_1}{T-t}}\right)\\&-e^{-r\tau}XN_2\left(f_2,-d_2;-\sqrt{\frac{T_1-t}{T-t}}\right)+e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}S\left[-\left(\frac{S}{X}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\right.\\&\times N_2\left(d_1-\frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau},-f_1+\frac{2r}{\sigma}\sqrt{T_1-t};-\sqrt{\frac{T_1-t}{T-t}}\right)\\&\left.+e^{r\tau}N_2\left(e_1,d_1;\sqrt{\frac{T-T_1}{T-t}}\right)\right]\\&+e^{-r(T-T_1)}\left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right)SN(f_1)N(-e_2),\quad t<T_1,\end{aligned}$$

其中 $d_1,e_1,f_1,\cdots$ 的定义与方程 (4.2.16) 中相同, 但是用 X 代替 m(Heynen and Kat, 1994b). 试推导到期日收益函数为 $\max(X-m_{T_1}^T,0)$ 的 "有限期" 固定敲定价格回望看跌期权的价格公式.

4.22 利用方程 (4.2.21) 推导出下述浮动敲定价格回望看跌期权的偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial\tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2V}{\partial\xi^2}-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial\xi},\quad 0<\xi<\infty,\tau>0,$$

其中 $V(\xi,\tau)=p_{f\ell}(S,M,t)/S$, $\tau=T-t$, $\xi=\ln\dfrac{M}{S}$. 定解条件为

$$V(\xi,0)=e^{\xi}-1,\quad \frac{\partial V}{\partial\xi}(0,\tau)=0.$$

求解上面的 Neumann 边值问题, 并与方程 (4.2.10) 中看跌期权的价格公式作比较.

提示: 定义 $W=\dfrac{\partial V}{\partial\xi}$, 使得 W 满足相同的微分方程, 但是边界条件变成 $W(0,\tau)=0$. 求解 $W(\xi,\tau)$, 对 W 关于 ξ 求积分可以得到 V.

注意: 关于 ξ 求积分时会产生一个任意函数 $\phi(t)$. 通过将 V 的解代入最初的微分方程可以得到 $\phi(t)$ 满足的常微分方程.

4.23 用 $p(S,t;\delta t)$ 代表离散观察资产历史最高价的浮动敲定价回望看跌期权的价格, 其中 δt 为相邻观察时刻的时间间隔. 假设 $p(S,t;\delta t)$ 按照 $\sqrt{\delta t}$ 幂指数的两项泰勒展开式如下 (Levy and Mantion, 1997):

$$p(S,t;\delta t)\approx p(S,t;0)+\alpha\sqrt{\delta t}+\beta\delta t.$$

若 $\delta t=0$, 则 $p(S,t;0)$ 表示连续观察浮动敲定价格回望看跌期权的价值. 用 τ 表示距离到期日的时间. 通过设 $\delta t=\tau$ 和 $\delta t=\tau/2$, 推导出下面 α 和 β 满足的两个线性方程:

$$\alpha\sqrt{\frac{\tau}{2}}+\frac{\beta\tau}{2}=p\left(S,t;\frac{\tau}{2}\right)-p(S,t;0),$$

$$\alpha\sqrt{\tau}+\beta\tau=p(S,t;\tau)-p(S,t;0).$$

因此, $p(S,t;\tau)$ 就是敲定价等于截至当前时刻资产历史最高价 M 的平凡看跌期权的价值. 如果只在剩余的期权有效期的时间中点观察一次, 证明 $p\left(S,t;\frac{\tau}{2}\right)$ 为

$$\begin{aligned}&p\left(S,t;\frac{\tau}{2}\right)\\=&-e^{-q\tau}S+e^{-r\tau}\left[MN_2\left(-d_M\left(\frac{\tau}{2}\right)+\sigma\sqrt{\frac{\tau}{2}},-d_M(\tau)+\sigma\sqrt{\tau};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right.\\&+e^{(r-q)\tau}SN_2\left(d_M(\tau),d\left(\frac{\tau}{2}\right);\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&\left.+\ e^{(r-q)\frac{\tau}{2}}SN_2\left(d_M\left(\frac{\tau}{2}\right),-d\left(\frac{\tau}{2}\right)+\sigma\sqrt{\frac{\tau}{2}};0\right)\right],\end{aligned}$$

其中

$$d_M(\tau)=\frac{\ln\dfrac{S}{M}+\left(r-q+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\quad d(\tau)=\frac{\left(r-q+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}}{\sigma}.$$

一旦确定了 α 和 β, 就可以推导出离散观察的浮动敲定价的回望看跌期权的近似价格公式.

4.24　证券连接基金产品的动态基金保护特征为持有这份标的基金的投资者提供了一个事先确定的保护水平 K. 用 S_t 表示这份标的基金的价值, 动态保护重置了原生资产的初始价值, 使之更新为 F_t, 这样就保证 F_t 不会低于 K, 即每当 F_t 低于 K 时, 担保者就会增加资金, 使得更新后的基金价值不会低于 K.

(a) 证明在到期日 T, 更新后的基金价值为

$$F_T=S_T\max\left(1,\max_{0\leqslant u\leqslant T}\frac{K}{S_u}\right).$$

(b) 用 X_T 表示提供动态基金保护的衍生产品的到期日收益. 定义回望状态变量

$$M_t=\max\left(1,\frac{K}{\min\limits_{0\leqslant u\leqslant t}S_u}\right),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

这在当前时刻 t 是已知的. 证明

$$\begin{aligned}X_T &= F_T - S_T \\ &= S_T(M_t - 1) + S_T \max\left(\frac{K}{\min\limits_{t\leqslant u\leqslant T} S_u} - M_t, 0\right).\end{aligned}$$

(c) 在风险中性测度 Q 下, 设 S_t 的运动服从

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dZ_t.$$

证明动态基金保护的公平价格为 (Imai and Boyle, 2001)

$$\begin{aligned}V(S,M,t) &= E_Q[X_T] \\ &= S[MN(d_1) - 1] + \frac{K}{\alpha}\left(\frac{\widehat{K}}{S}\right)^{\alpha} N(d_2) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) Ke^{-r\tau}N(d_3), \quad \tau = T - t,\end{aligned}$$

其中 E_Q 表示当 $S_t = S$ 和 $M_t = M$ 时, 在测度 Q 下的条件期望. 其他的参数定义如下:

$$\alpha = 2r/\sigma^2, \quad \widehat{K} = K/M, \quad k = \ln\frac{S}{\widehat{K}},$$

$$d_1 = \frac{k + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = \frac{-k + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_3 = \frac{-k - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

4.25 解释为什么有

$$\text{call}_{\text{European}} \geqslant \text{Asian call}_{\text{arithmetic}} \geqslant \text{Asian call}_{\text{geometric}}.$$

提示: 从一列价格计算得到的平均值具有更小的波动率.

4.26 基于固定敲定价格亚式看涨期权的价格公式, 应用交换期权定价公式 (见习题 3.34), 给浮动敲定价格亚式看涨期权定价.

提示: S_T 和 G_T 之间的协方差等于 $\dfrac{\sigma^2(T-t)^2}{2}$.

4.27 定义在时段 $[t, t+T]$ 内, 资产价格 $S_i\,(i=1,2)$ 价格路径的几何平均为

$$G_i(t+T) = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_i(t+u)\,du\right).$$

考虑一份涉及两种资产的亚式期权, 其到期日收益为 $\max(G_1(t+T)-G_2(t+T),0)$. 证明该欧式亚式期权在时刻 t 的价格公式如下 (Boyle, 1993):

$$V(S_1,S_2,t;T)=\widetilde{S}_1N(d_1)-\widetilde{S}_2N(d_2),$$

其中

$$\widetilde{S}_i=S_i\exp\left(-\left(\frac{r^2}{2}+\frac{\sigma^2}{12}\right)T\right),\quad i=1,2,\quad \sigma^2=\frac{\sigma_1^2}{3}+\frac{\sigma_2^2}{3}-\frac{2}{3}\rho\sigma_1\sigma_2,$$

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{\widetilde{S}_1}{\widetilde{S}_2}+\dfrac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}.$$

提示: 利用习题 3.34 中交换期权的价格公式.

4.28　推导连续观察几何平均的欧式固定敲定价格亚式看涨期权和看跌期权之间的看跌–看涨平价公式

$$\begin{aligned}&c(S,G,t)-p(S,G,t)\\&=e^{-r(T-t)}\left\{G^{t/T}S^{(T-t)/T}\exp\left((T-t)\left[\frac{\sigma^2}{6}\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\right.\right.\right.\\&\left.\left.\left.\quad+\frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{2}\frac{T-t}{T}\right]-X\right)\right\}.\end{aligned}$$

4.29　设 T 是到期日, 从 $t=0$ 到 T 连续取资产价格的算术平均值. 浮动敲定价格看涨期权和看跌期权的到期日收益函数分别为

$$\max\left(S_T-\frac{1}{T}\int_0^T S_u du,0\right),\quad \max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du-S_T,0\right).$$

证明上面两个欧式浮动敲定价期权的看跌–看涨平价公式为

$$c-p=Se^{-q(T-t)}+\frac{S}{(r-q)T}[e^{-r(T-t)}-e^{-q(T-t)}]-e^{-r(T-t)}A_t,$$

其中

$$A_t=\frac{1}{T}\int_0^t S_u du.$$

如果连续取资产价格的几何平均值, 证明相应的看跌–看涨平价公式如下:

$$\begin{aligned}c-p=&Se^{-q(T-t)}-G^{t/T}S^{(T-t)/T}\\&\times\exp\left(\frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}+\frac{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2}{2T}-r(T-t)\right),\end{aligned}$$

其中

$$G_t = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_u du\right).$$

4.30 证明在平均值观察期的起始点, 浮动敲定价格和固定敲定价格亚式期权之间的看跌–看涨平价公式为

$$p_{f\ell}(S_0, \lambda, r, q, T) - c_{f\ell}(S_0, \lambda, r, q, T) = \frac{S(e^{-qT} - e^{-rT})}{(r-q)T} - \lambda S_0,$$

$$c_{fix}(X, S_0, r, q, T) - p_{fix}(X, S_0, r, q, T) = \frac{S(e^{-qT} - e^{-rT})}{(r-q)T} - e^{-rT}X.$$

通过将上面的看跌–看涨平价公式与 c_{fix} 和 p_{fix} 之间的固定–浮动对称关系相联系, 推导下面 c_{fix} 和 p_{fix} 之间的对称关系:

$$c_{fix}(X, S_0, r, q, T) = p_{fix}\left(S_0, \frac{X}{S_0}, q, r, T\right).$$

4.31 在时段 $[0, T]$ 考虑一个自融资的交易策略, 它包含一份支付红利的资产和一个资金市场账户. 设在风险中性测度 Q 下, 资产价格 S_t 服从

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-q)dt + \sigma dZ_t,$$

其中 q 为红利率, $q \neq r$. 采用这样一个交易策略: 在时刻 t 持有 n_t 份资产, 其中

$$n_t = \frac{1}{(r-q)T}\left[e^{-q(T-t)} - e^{-r(T-t)}\right].$$

用 X_t 表示 t 时刻投资组合的价值, 它的运动服从

$$dX_t = n_t dS_t + r(X_t - n_t S_t)dt + q n_t S_t dt.$$

令投资组合的初始价值 X_0 为

$$X_0 = n_0 S_0 - e^{-rT}X,$$

证明

$$X_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - X.$$

定义 $Y_t = \dfrac{X_t}{e^{qt}S_t}$, 证明

$$dY_t = -(Y_t - e^{-qt}n_t)\sigma dZ_t^*,$$

其中 $Z_t^* = Z_t - \sigma t$ 是以 $e^{qt}S_t$ 为计价单位, Q^* 测度下的布朗运动.

注意：以 X 为敲定价格的固定敲定价格亚式看涨期权的价格函数如下：

$$c_{fix}(S_0, 0; X) = e^{-rT} E_Q[\max(X_T, 0)] = S_0 e^{-rT} E_{Q^*}[\max(Y_T, 0)],$$

其中

$$Y_0 = \frac{X_0}{S_0} = \frac{e^{-qT} - e^{-rT}}{(r-q)T} - e^{-rT}\frac{X}{S_0},$$

证明

$$c_{fix}(S_0, 0; X) = S_0 u(Y_0, 0),$$

其中 $u(y,t)$ 满足下面的一维偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(y - e^{-qt} n_t)^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

终值为 $u(y,T) = \max(y, 0)$.

4.32　考虑一份连续观察的欧式算术平均亚式期权，它具有如下的终期收益函数：

$$\max(A_T - X_1 S_T - X_2, 0),$$

其中

$$A_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_u du.$$

在当前时刻 $t > 0$，时段 $[0,t]$ 内的平均价值为 A_t. 用 $V(S, \tau; X_1, X_2)$ 表示在平均值观察期开始时亚式期权的价格函数，证明处于平均值观察期内亚式期权的价值为

$$\frac{T-t}{T} V\left(S_t, T-t; \frac{X_1 T}{T-t}, \frac{X_2 T}{T-t} - \frac{A_t - t}{T-t}\right).$$

4.33　考虑方程 (4.3.68) 中定义的 $E_Q\left[\widetilde{A}(t_n;t)^2\right]$，证明当 $t < t_0$ 时有 (Levy, 1992)

$$E_Q[\widetilde{A}(t_n;t)^2] = \frac{S_t^2}{(n+1)^2} e^{(2r+\sigma)(t_0-t)}(B_1 - B_2 + B_3 - B_4),$$

其中

$$B_1 = \frac{1 - e^{(2r+\sigma^2)(n+1)\Delta t}}{(1 - e^{r\Delta t})[1 - e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}]}, \quad B_2 = \frac{e^{r(n+1)\Delta t} - e^{(2r+\sigma^2)(n+1)\Delta t}}{(1 - e^{r\Delta t})[1 - e^{(r+\sigma^2)\Delta t}]},$$

$$B_3 = \frac{e^{r\Delta t} - e^{r(n+1)\Delta t}}{(1 - e^{r\Delta t})[1 - e^{(r+\sigma^2)\Delta t}]}, \quad B_4 = \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - e^{(2r+\sigma^2)(n+1)\Delta t}}{[1 - e^{(r+\sigma^2)\Delta t}][1 - e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}]}.$$

4.34　在风险中性测度 Q 下，设 S_t 满足

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-q)dt + \sigma dZ_t.$$

定义

$$A(t,T)=\frac{1}{T-t}\int_t^T S_u du,$$

证明 (Milevsky and Posner, 1998)

$$E_Q[A(t,T)]=\begin{cases} S_t\dfrac{\exp((r-q)(T-t))-1}{(r-q)(T-t)}, & r\neq q,\\ S_t, & r=q,\end{cases}$$

$$E_Q[A(t,T)^2]=\begin{cases} \dfrac{2S_t^2}{(T-t)^2}\left\{\dfrac{\exp([2(r-q)+\sigma^2](T-t))}{(r-q+\sigma^2)(2r-2q+\sigma^2)},\right.\\ \left.+\dfrac{1}{r-q}\left[\dfrac{1}{2(r-q)+\sigma^2}-\dfrac{\exp((r-q)(T-t))}{r-q+\sigma^2}\right]\right\}, & r\neq q,\\ \dfrac{2S_t^2}{(T-t)^2}\dfrac{e^{\sigma^2(T-t)}-1-\sigma^2(T-t)}{\sigma^4}, & r=q.\end{cases}$$

4.35　定义在 n 个均等分布时刻资产价格的可变几何平均值 $G_F(n)$ 为

$$G_F(n)=\prod_{i=1}^{n}S_i^{\omega_i},\quad \omega_i=\frac{i^\alpha}{\sum\limits_{i=1}^{n}i^\alpha},$$

其中 S_i 为时刻 t_i 的资产价格, ω_i 为与 S_i 相关的权重因子.

注意: α 的值越大, 赋予近期的资产价格的权重越大. 设在风险中性测度下, 资产价格服从几何布朗运动

$$\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma dZ_t.$$

考虑固定敲定价格亚式期权, 它的到期日收益为

$$V(S,G_F,T)=\max(\phi(G_F(n)-X),0),$$

其中 X 为敲定价, ϕ 为一个二值变量, 对看涨期权为 1, 对看跌期权为 -1. 证明亚式期权的价值为 (Zhang, 1994)

$$V(S,G_F,t)=\phi\left\{SA_j^fN\left[\phi\left(d_{n-j}^f+\sigma\sqrt{T_{n-j}^f}\right)\right]-Xe^{-r\tau}N\left(\phi d_{n-j}^f\right)\right\},$$

其中

$$A_j^f = \exp\left(-r\left(\tau - T_{\mu,n-j}^f\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(T_{\mu,n-j}^f - T_{n-j}^f\right)\right) B_j^f,$$

$$B_0^f = 1, \quad B_j^f = \prod_{i=1}^{j}\left(\frac{S_{n-i}}{S}\right)^{\omega_i}, \ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$d_{n-j}^f = \frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T_{\mu,n-j}^f + \ln B_j^f}{\sigma\sqrt{T_{n-j}^f}},$$

$$T_{\mu,n-j}^f = \sum_{i=j+1}^{n} \omega_i[\tau - (n-i)\Delta t],$$

$$T_{n-j}^f = \sum_{i=j+1}^{n} \omega_i^2[\tau - (n-i)\Delta t] + 2\sum_{i=2}^{n-j}\sum_{k=1}^{i-1} \omega_i\omega_k[\tau - (n-k)\Delta t],$$

n 为用来取平均值的资产价格数目, Δt 为相邻观察时刻的时间间隔, j 为已经观察过的时刻数目, B_j^f 可以被认为是那些已经观察过的观察时刻回报的加权平均值.

4.36　证明对于任意随机变量 X 有

$$0 \leqslant E[\max(X,0)] - \max(E[X],0) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{var}(X)},$$

并利用这个结果证明方程 (4.3.29) 中的结论.

4.37　以 Z_t 表示标准布朗运动, 证明双变量高斯随机变量的协方差阵 $\left(Z_t, \int_0^1 Z_u\,du\right)$ 为

$$E\left[\left(Z_t, \int_0^1 Z_u du\right)^{\mathrm{T}}\left(Z_t, \int_0^1 Z_u\,du\right)\right] = \begin{pmatrix} t & t\left(1-\frac{t}{2}\right) \\ t\left(1-\frac{t}{2}\right) & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

并且证明给定 $\int_0^1 Z_u du = z$, Z_t 的条件分布是一个均值为 $3t\left(1-\frac{t}{2}\right)z$, 方差为 $t - 3t^2\left(1-\frac{t}{2}\right)^2$ 的正态分布. 利用方程 (4.3.29), 选定 Y 为 $\int_0^1 Z_u du$, $T = 1$, 证明 (Thompson, 1999)

$$c_{fix}(S,I,0) \geqslant e^{-r}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{3}n(\sqrt{3}z) \times \int_0^1 \max\left(Se^{3\sigma t(1-t/2)z+(r-q)t+\frac{\sigma^2}{2}\left[t-3t^2\left(1-\frac{t}{2}\right)^2\right]} - X, 0\right) dtdz,$$

其中 $n(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$.

4.38 用 $S(t_i)$ 表示在时刻 $t_i\,(i = 1, 2, \cdots, N)$ 的资产价格, 其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$. 定义离散观察的算术平均值和几何平均值如下:

$$A(T) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S(t_i), \quad G(T) = \left[\prod_{i=1}^{N} S(t_i)\right]^{1/N}.$$

用 $c_A(0; X)$ 和 $c_G(0; X)$ 表示 0 时刻敲定价为 X 且标的分别为 $A(T)$ 和 $G(T)$ 的欧式亚式固定敲定价格看涨期权的价值. 假设资产价格服从通常的几何布朗运动, 试证明 (Nielsen and Sandmann, 2003)

$$c_G(0, X) \leqslant c_A(0, X) \leqslant c_G(0, X) + e^{-rT} E_Q[A(T) - G(T)],$$

其中

$$E_Q[A(T)] = \frac{S(0)}{N} e^{-r\Delta} \frac{1 - e^{rN\Delta}}{e^{r\Delta}}, \quad \Delta = t_{i+1} - t_i, i = 1, 2, \cdots, N-1,$$
$$E_Q[G(T)] = \exp\left(m_G + \frac{\sigma_G^2}{2}\right),$$
$$m_G = \ln S(0) + \left(r - \frac{\sigma_G^2}{2}\right)\frac{N+1}{2}\Delta, \quad \sigma_G^2 = \sigma^2\Delta\left[1 + \frac{(N-1)(2N-1)}{6N}\right].$$

第5章 美式期权

美式期权最显著的特征就是持有者拥有提前实施的特权. 也就是说, 持有者可以在期权到期日之前实施期权. 因为这个额外的权利应该有价值, 所以美式期权应该比相应的欧式期权价值更高. 这个额外的期权金被称为**提前实施附加费**(early exercise premium).

首先, 回顾在 1.2 节讨论过的关于美式期权定价的一些性质. 提前实施美式看涨期权或者美式看跌期权都会损失持有期权所附的保险价值. 对美式看涨期权来说, 持有者因为提前获得原生资产而得到更多的分红, 但是却损失了敲定价的时间价值. 如果美式看涨期权的原生资产不分红, 则提前实施是没有好处可言的. 原生资产不分红致使这种提前实施的权利没有任何价值, 所以在这种情况下, 美式期权与相应的欧式期权具有相同的价值, 而且显然, 美式期权至少应该等于它的内在价值, 对看涨期权而言即为 $\max(S-X,0)$, 对看跌期权而言为 $\max(X-S,0)$, 其中 S 和 X 分别为原生资产的价格和敲定价. 虽然在欧式看涨期权和欧式看跌期权之间存在一个平价公式, 但对美式期权, 只能得到看涨期权和看跌期权价值之差的上界和下界.

如果原生资产分红, 当原生资产价格 S 上升到某一个临界值时, 对持有者来说, 提前实施期权是最优选择, 则称这个临界值为**最佳实施价格**(optimal exercise price). 因为保险价值和敲定价时间价值的损失都是与时间有关的, 所以最佳实施价格也取决于距离到期日的剩余时间. 对于一个存续期还较长的美式看涨期权, 长期持有的保险价值更高, 敲定价的时间价值也更高. 因此, 最佳实施价格也应该更高. 这样, 由于提前实施期权而后悔的概率就更小, 而且因持有原生资产而得到的红利也更多. 当原生资产连续分红时, 每个时刻的最佳实施价格的集合就形成了一条连续的曲线, 这条曲线通常被称为**最佳实施边界**(optimal exercise boundary). 对于一个美式看跌期权来说, 提前实施期权意味着获得更多的敲定价的时间价值, 所以如果无风险利率是正数, 则总是存在一个最佳实施价格, 当原生资产价格低于此价格时, 应该提前实施期权.

美式期权的最佳实施边界事先是不知道的, 而是在求解定价模型时逐步被确定的. 因为美式期权模型的区域边界是一条自由边界, 所以这个定价问题就成为一个**自由边界问题**(free boundary value problem). 5.1 节中, 介绍美式期权最佳实施边界在距离到期日无穷远处和到期日前一时刻的特性. 利用期权价值曲线同内在价值

曲线之间的平滑粘贴性得出最优条件. 当原生资产离散分红时, 只有恰好在某个除息日之前提前实施美式看涨期权, 才是最优的. 这样提前实施策略就比较简单, 因此, 可以得到原生资产离散分红的美式看涨期权闭合形式的价格公式. 也讨论了原生资产离散分红的美式看跌期权的最佳实施策略.

在 5.2 节中, 介绍了美式期权的两种定价方法, 即线性互补方法和最优停时方法. 将会说明怎样利用最佳实施边界的积分形式表示提前实施附加费, 并且研究怎样用积分方程的解来确定最佳实施边界. 提前实施附加费可以看成因为持有者延迟执行了可以提前实施的权利而应得到的补偿; 否则, 对他来说更早的执行期权是最优的. 在一份期权合约中, 提前实施的特性可以与其他路径相关的特性相结合. 研究了美式障碍期权中障碍这一特性对提前实施策略的影响. 同时, 得到了俄罗斯式期权价格的解析公式, 实质上它是一个永久美式回望期权.

一般来说, 除了一些特殊类型的美式期权, 都得不到美式期权价格的解析公式. 在 5.3 节中, 介绍了几种用于美式期权定价的近似解析方法. 一种方法是限制其实施特权, 使得美式期权只能在有限多个时间点被实施. 另一种方法是用循环积分法求解实施边界所满足的积分方程. 第三种方法, 被称为二次近似方法, 是将 Black-Scholes 方程简化成为常微分方程, 从而加强了它的解析可解性.

对包含可以自由重置合约中某些条款这类权利的金融衍生产品的模型, 如允许将敲定价重置为原生资产的当前价格, 这类问题也包含了自由边界的求解问题. 在 5.4 节中, 为允许重置敲定价的看跌期权建立了定价模型, 并且研究了期权持有者的最佳重置策略. 虽然美式期权只能被实施一次, 但是可以允许重置多次. 也研究了允许重置多次的看跌期权的定价行为. 有趣的是, 当允许重置无限多次时, 这种看跌期权就变为欧式回望期权.

5.1 最佳实施边界的特性

美式期权的最优提前实施策略的特性, 与其原生资产是否分红、红利是连续支付还是离散支付都密切相关. 在所有的讨论中, 都假定红利的支付数量和支付时间都是预先给定的. 在本节中, 将会详尽地定量分析提前实施边界的一些性质, 将会说明当连续分红或者不分红时, 美式看跌期权最佳实施边界是关于到期时间 τ 的**连续递减** (continuous decreasing) 函数. 然而, 当原生资产离散地分红时, 美式看跌期权的最佳实施边界可能存在也可能不存在**不连续的跳动** (jumps of discontinuity), 这取决于离散分红数量的大小. 对于原生资产连续分红的美式看涨期权, 将会解释为什么在一个足够高的价格 S 就应该实施期权. 相应的最优实施边界是关于到期时间 τ 的**连续递增** (continuous increasing) 函数. 当美式看涨期权的原生资产离散分红时, 只有在资产红利支付之前的那些时刻立即实施期权才是最优的. 对于最优

实施边界还需要附加一些其他的条件, 包括① 离散支付的红利相对敲定价要足够的大; ②红利支付日要离到期日比较近; ③ 在红利支付日之前资产价格必须高于一些门限值. 因为期权只可能在一些离散的红利支付日之前被提前实施, 所以如果美式看涨期权的原生资产离散地支付预先确定的红利, 通过与一个欧式复合期权相联系, 则可以得到这个美式看涨期权的定价公式.

美式期权定价模型中需要的一些辅助条件包括穿过最优实施边界时美式期权价值所具有的价值匹配条件和**平滑粘贴性条件**(smooth pasting condition). 通过在所有的提前实施策略中选择使美式期权的价值最大化那个策略, 可以得到平滑粘贴性条件 (见 5.1.2 小节).

5.1.1　原生资产分红的美式期权

首先, 考虑连续分红 (分红率为常数 $q > 0$) 对美式看涨期权提前实施策略的影响. 当原生资产价格 S 格外高时, 几乎可以肯定原生资产连续分红的欧式看涨期权在到期日肯定处于实值状态. 美式看涨期权价格的变化与原生资产几乎一样, 但是它没有红利收入, 并且还要减掉敲定价 X 的现值. 当这个看涨期权处于浓度实值状态时, 注意在欧式看涨期权的价格公式 (3.4.4) 中

$$N(\widehat{d}_1) \sim 1, \quad N(\widehat{d}_2) \sim 1,$$

于是得到

$$c(S,\tau) \sim e^{-q\tau}S - e^{-r\tau}X, \quad S \gg X. \tag{5.1.1}$$

由于在 S 前存在因子 $e^{-q\tau}$, 所以当原生资产价格足够高时, 欧式看涨期权的价值也许会低于它的内在价值 $S - X$. 尽管欧式期权的价值可能低于它的内在价值, 但是具有提前实施特权的美式期权的持有者不会允许期权价值低于它的内在价值, 所以当原生资产价格充分高时, 对于原生资产连续分红的美式期权, 在到期日之前提前实施是最优的, 并且只要没实施, 美式期权的价值就不会比它的内在价值低.

在图 5.1 中, 美式看涨期权的价格曲线 $C(S,\tau)$ 在某个最佳实施价格 $S^*(\tau)$ 与虚线表示的期权内在价值曲线**相切** (tangentially). 注意: 最佳实施价格依赖于距离到期日的时间 τ. 将会在下一小节对美式期权的价格曲线在 $S^*(\tau)$ 处相切的行为 (δ 值的连续性) 加以解释. 当 $S \geqslant S^*(\tau)$ 时, 美式看涨期权的价值与其内在价值 $S - X$ 相等. 在 $S\tau$ 平面中, 对于所有的 $\tau \in (0,T]$, 点 $(S^*(\tau),\tau)$ 的集合构成了最佳实施边界. 美式看涨期权只有在**继续持有区域**(continuation region)$\mathcal{C} = \{(S,\tau) : 0 \leqslant S < S^*(\tau), 0 < \tau \leqslant T\}$ 内才被继续持有. $\mathcal{C}$ 的余集被称为**停止持有区域**(stopping region), 在此区域内实施美式期权是最优的 (图 5.2).

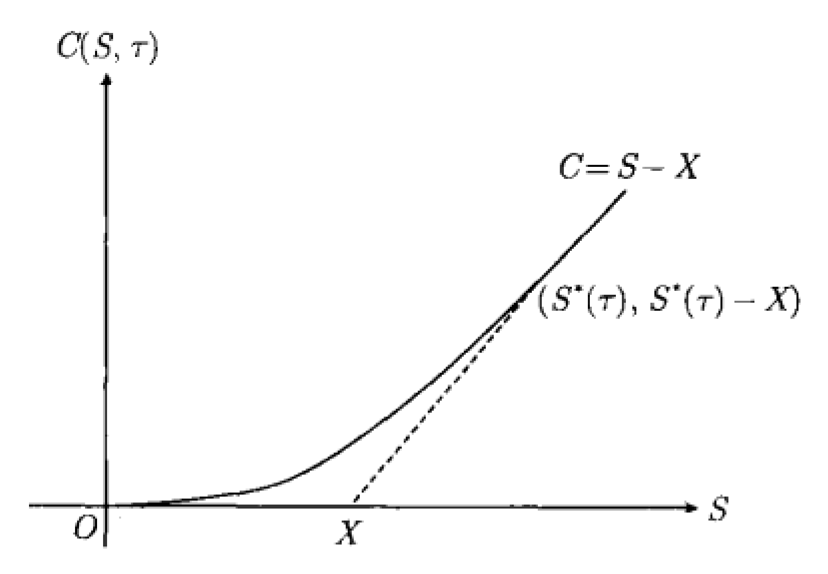


图 5.1 实曲线表示原生资产连续分红的美式看涨期权的价格函数 $C(S,\tau)$, 价格曲线在点 $(S^*(\tau),S^*(\tau)-X)$ 处与虚线所表示的内在价值曲线相切, 其中 $S^*(\tau)$ 就是最佳实施价格, 当 $S\geqslant S^*(\tau)$ 时, 美式看涨期权的价值就是 $S-X$

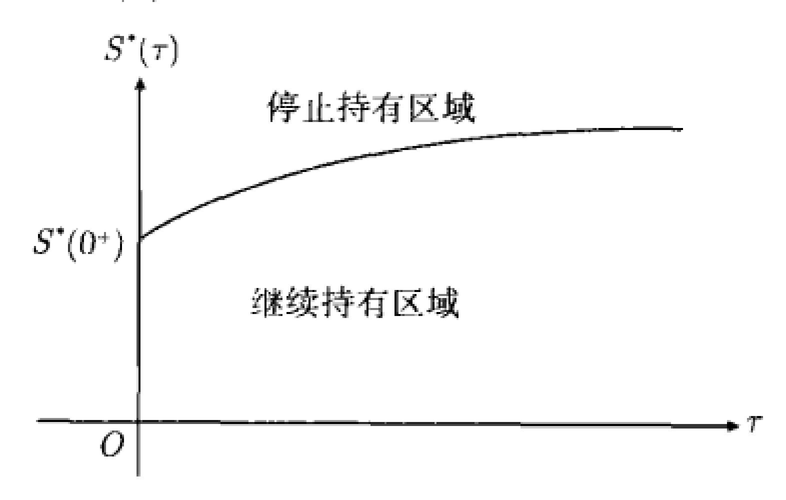


图 5.2 原生资产连续分红的美式看涨期权在连续区域 $\mathcal{C}=\{(S,\tau):S\in[0,S^*(\tau)),\tau\in(0,T]\}$ 内被继续持有, 最佳实施边界 $S^*(\tau)$ 是 τ 的连续递增函数

如果假设资产价格运动的轨迹和分红率都是连续的, 则期望对于所有的 $\tau>0$, 最佳实施边界也是 τ 的连续函数. 但是严格证明 $S^*(\tau)$ 的连续性是非常需要技巧的, 下面将给出一个探索性的论证. 如果不连续, 则假设当 τ 减小到时刻 $\widehat{\tau}$ 时, $S^*(\tau)$ 有一个向下的跳动. 假设 $\widehat{\tau}$ 时的资产价格 S 满足 $S^*(\widehat{\tau}^-)<S<S^*(\widehat{\tau}^+)$, 因为 $S<S^*(\widehat{\tau}^+)$, 所以美式看涨期权在 $\widehat{\tau}^+$ 时刻的价值就严格地大于其内在价值 $S-X$, 并且由于 $S>S^*(\widehat{\tau}^-)$, 所以在 $\widehat{\tau}^-$ 时刻, 期权价值就等于其内在价值 $S-X$. 这表示期权价格在时刻 $\widehat{\tau}$ 发生了一个向下的不连续的跳动. 因为对于一个长期持有的美式看涨期权, 在时刻 $\widehat{\tau}$ 没有产生现金流, 这个不连续的期权价值的跳动将会导致一个套利机会.

5.1.2 平滑粘贴性条件

下面将研究原生资产连续分红的美式看涨期权最佳实施边界处的平滑粘贴性条件 (相切条件). 在 $S=S^*(\tau)$, 美式看涨期权被实施, 价值为 $S^*(\tau)-X$, 所以

$$C(S^*(\tau),\tau)=S^*(\tau)-X. \tag{5.1.2}$$

自然地, 这被称为价值匹配条件.

假设 $S^*(\tau)$ 是一个已知的连续函数, 那么定价模型就变成了一个与一条依赖于时间的边界相关的边值问题. 然而, 在美式看涨期权定价模型中, $S^*(\tau)$ 事先是不知道的. 相反, 它必须在求解过程中被确定. 为了反映蕴涵在美式期权里实施权利的最优化本质, 需要赋予 $S^*(\tau)$ 另外一个辅助条件.

按照 Merton (1973, 第一章) 的论证过程来说明美式看涨期权在最佳实施价格 $S^*(\tau)$ 处价值增量 Δ 的连续性. 若 $b(\tau)$ 是一条已知边界, 用 $f(S,\tau;b(\tau))$ 表示在区域 $\{(S,\tau)\colon S\in(0,b(\tau)),\tau\in(0,T]\}$ 中 Black-Scholes 方程的解. 美式看涨期权的持有者选择一个提前实施策略来使得他的期权价值最大化. 根据以上分析, 美式看涨期权价值可以如下这样给出:

$$C(S,\tau)=\max_{\{b(\tau)\}} f(S,\tau;b(\tau)), \tag{5.1.3}$$

其中最大化是对于所有的连续函数 $b(\tau)$. 对于一个给定的 τ, 为简便起见, 将 $f(S,\tau;b(\tau))$ 记作 $F(S,b)$, 其中 $0\leqslant S\leqslant b$. 可以看出, $F(S,b)$ 是一个可微函数, 关于第二个参数凹. 进一步, 令 $h(b)=F(b,b)$, 这是 b 的一个可微函数. 对于一个美式看涨期权, $h(b)=b-X$. 在边界 $S=b$ 上, 求 F 关于 b 的全导数

$$\frac{dF}{db}=\frac{dh}{db}=\frac{\partial F}{\partial S}(S,b)\bigg|_{S=b}+\frac{\partial F}{\partial b}(S,b)\bigg|_{S=b},$$

这里用到了如下性质: 在 $S=b$ 上, $\dfrac{\partial S}{\partial b}=1$. 用 b^* 表示使得 F 最大化的那个 b. 根据函数在极大值点一阶导数必须满足的条件, 如果 $b=b^*$, 则 $\dfrac{\partial F}{\partial b}(S,b^*)=0$. 另一方面, 根据美式看涨期权实施时的支付函数有

$$\frac{dh}{db}\bigg|_{b=b^*}=\frac{d}{db}(b-X)\bigg|_{b=b^*}=1.$$

综合以上结果, 可以得到

$$\frac{\partial F}{\partial S}(S,b^*)\bigg|_{S=b^*}=1. \tag{5.1.4}$$

注意: 最佳选择 $b^*(\tau)$ 正是最佳实施价格 $S^*(\tau)$. 以上条件可以用以下形式表示:

$$\frac{\partial C}{\partial S}(S^*(\tau),\tau)=1. \tag{5.1.5}$$

条件 (5.1.5) 通常被称为**平滑粘贴性**(smooth pasting)条件或者**相切条件**(tangency condition). 两个辅助条件 (5.1.2) 和 (5.1.5), 分别说明 $C(S,\tau)$ 和 $\dfrac{\partial C}{\partial S}(S,\tau)$ 在最佳实施边界上连续 (图 5.1).

平滑粘贴性条件适用于所有类型的美式期权. 对于美式看跌期权, 内在价值曲线的斜率是 -1. 在 $S = S^*(\tau)$ 处, 美式看跌期权价值增量的连续性告诉我们,

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S^*(\tau), \tau) = -1. \tag{5.1.6}$$

将在习题 5.5 中给出美式看跌期权的上述平滑性粘贴条件的另一种证明方法.

5.1.3 美式看涨期权的最佳实施边界

考虑原生资产连续分红的美式看涨期权, 最佳实施边界 $S^*(\tau)$ 是关于 τ 的连续递增函数. 递增性是因为长期持有美式看涨期权意味着保险价值的损失, 而且对于一个存续期较长的美式看涨期权, 敲定价的时间价值更为关键, 这样如果要持有者提前实施期权, 那么这个期权必须极具实值. 另外, 作为补偿的原生资产分红也应该更高. 因此, 相对于存续期较短的美式看涨期权, 这份美式看涨期权应该在一个更高的最佳实施价格 $S^*(\tau)$ 被实施.

$S^*(\tau)$ 的递增性质也可以用关于 τ 的价格曲线 $C(S, \tau)$ 的递增性质来解释 (见式 (1.2.5a)). 以 S 为横轴作图, 存续期较长的美式看涨期权的价格曲线总是在存续期较短的美式看涨期权的价格曲线之上. 处于上方的存续期较长的美式看涨期权的价格曲线与内在价值曲线在一个更高的资产价格 $S^*(\tau)$ 处相切.

此外, 从图 5.1 中容易看出, 美式看涨期权的价格曲线总是在一个比 X 大的资产价格处与内在价值曲线相切. 因此, 对所有 $\tau \geqslant 0$ 都有 $S^*(\tau) \geqslant X$. 如果不然, 假设 $S^*(\tau) < X$, 则提前实施的收益 $S^*(\tau) - X$ 是负数. 由于提前实施的特权并不是一种义务, $S^*(\tau) < X$ 这种情况不可能出现, 所以 $S^*(\tau) \geqslant X$.

接下来, 分析一下 $S^*(\tau)$ 在 $\tau \to 0^+$ 和 $\tau \to \infty$ 处的渐近性.

1. $S^*(\tau)$ 在到期日附近的渐近性态

当 $\tau \to 0^+$ 和 $S > X$ 时, 由美式看涨期权价格的连续性, 期权价值趋于实施收益, 所以 $C(S, 0^+) = S - X$. 如果美式看涨期权仍然有效, 则该期权价值还满足 Black-Scholes 方程. 将上述看涨期权的价值代入 Black-Scholes 方程, 如果 (S, τ) 位于继续持有区域, 则有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial C}{\partial \tau}\right|_{\tau=0^+} &= \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right|_{\tau=0^+} + (r-q)S\left.\frac{\partial C}{\partial S}\right|_{\tau=0^+} - rC\Big|_{\tau=0^+} \\ &= (r-q)S - r(S-X) = rX - qS.\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

假设 $\frac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+) < 0$, 在到期日之前的瞬间, $C(S, \tau)$ 就会小于 $C(S, 0) = S - X$ (美式看涨期权的内在价值). 由于美式看涨期权价值总是高于它的内在价值, 这就导致了一个矛盾. 因此, 为了使美式看涨期权在到期日之前仍然被继续持有, 必须令

$\dfrac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+) \geqslant 0$. 当 $\dfrac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+)$ 变号时, S 的值是 $S = \dfrac{r}{q}X$. 只有当 $q < r$ 时, $\dfrac{r}{q}X$ 也在区间 $S > X$ 中. 下面分别考虑两种情况: $q < r$ 和 $q \geqslant r$.

(1) $q < r$. 在到期日之前的一瞬间, 可以证明当 $S < \dfrac{r}{q}X$ 时, 美式看涨期权才应该被继续持有. 这是因为在到期日之前的一个很小的时间段 δt 内, 因持有资产而得到的红利 $qS\delta t$ 比将现金 X 存进银行账户, 以无风险利率 r 而得到的收益 $rX\delta t$ 要少. 以上结果与当 $S \leqslant \dfrac{r}{q}X$ 时, $\dfrac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+)$ 的非负性相吻合. 当 $S > \dfrac{r}{q}X$ 时, 美式看涨期权应该被实施, 因为 $\dfrac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+)$ 是负数会与美式看涨期权价值总高于其内在价值 $S - X$ 相矛盾. 因此, 对于 $q < r$, 最佳实施价格 $S^*(0^+)$ 在 $\dfrac{\partial C}{\partial \tau}(S, 0^+)$ 改变符号的地方被确定. 于是得到

$$S^*(0^+) = \frac{r}{q}X.$$

特别地, 当 $q = 0$ 时, $S^*(0^+)$ 趋于无穷大, 而且由于 $S^*(\tau)$ 是 τ 的单增函数, 可以推断对所有的 τ 都有 $S^*(\tau) \to \infty$. 这一结果与众所周知的原生资产不分红时美式看涨期权不应该被提前实施这一事实相吻合.

(2) $q \geqslant r$. 如果 $q \geqslant r$, 则 $\dfrac{r}{q}X$ 比 X 小, 必须修改上述论证过程. 首先, 说明 $S^*(0^+)$ 不能大于 X. 假设不然, 如果 $S^*(0^+) > X$, 则在离到期日很近时, 若 $X < S < S^*(0^+)$, 美式看涨期权还是应该被继续持有. 如果 $q \geqslant r$ 和 $S > X$ 同时成立, 可以观察到如果美式看涨期权在到期日之前的一小段时间 δt 内不被实施, 那么损失的红利 $qS\delta t$ 比得到的利息 $rX\delta t$ 多. 于是表明这不是一个最佳的提前实施策略. 因此, $S^*(0^+) \leqslant X$ 一定成立, 而且对 $\tau > 0$ 有 $S^*(\tau) \geqslant X$. 又由于 $S^*(\tau)$ 是 τ 的连续递增函数, 所以如果 $q \geqslant r$, 就得到

$$S^*(0^+) = X.$$

综合上述讨论, 在离到期日很近时, 原生资产连续分红的美式看涨期权的最佳实施价格 $S^*(\tau)$ 如下给出:

$$\lim_{\tau \to 0^+} S^*(\tau) = \begin{cases} \dfrac{r}{q}X, & q < r \\ X, & q \geqslant r \end{cases} = X \max\left(1, \frac{r}{q}\right). \tag{5.1.8}$$

在到期日 $\tau = 0$, 只要 $S \geqslant X$, 美式看涨期权就应该被实施, 所以 $S^*(0) = X$. 因此, 如果 $q < r$, 则 $S^*(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处有一个不连续的跳跃.

2. 距到期日无穷远处 $S^*(\tau)$ 的渐近性态

因为 $S^*(\tau)$ 是 τ 的单调递增函数, 对 $\tau > 0$, 最佳实施边界 $S^*(\tau)$ 的下界就是 $\lim_{\tau \to 0^+} S^*(\tau)$. 我们感兴趣的是 $\lim_{\tau \to \infty} S^*(\tau)$ 是否有一个有限的界限. 没有到期日的期权被称为**永久期权**(perpetual option). $\lim_{\tau \to \infty} S^*(\tau)$ 的确定是与相应的对永久美式期权的价格函数的分析相联系的.

用 $C_\infty(S; X, q)$ 表示一个永久美式看涨期权的价格, 其敲定价为 X, 原生资产的连续分红率为 q. (注意: 永久美式看涨期权的价格函数与时间无关.) 由于永久期权的价值与时间变化无关, 所以 Black-Scholes 方程可以简化成为如下的常微分方程:

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2 C_\infty}{dS^2} + (r-q)S\,\frac{dC_\infty}{dS} - rC_\infty = 0, \quad 0 < S < S_\infty^*, \tag{5.1.9a}$$

其中 S_∞^* 为永久美式看涨期权应该被实施的最佳实施价格. (注意: S_∞^* 是与 τ 无关的, 因为它就是极限值 $\lim_{\tau \to \infty} S^*(\tau)$.) 永久美式看涨期权的定价模型的边界条件为

$$C_\infty(0) = 0, \quad C_\infty(S_\infty^*) = S_\infty^* - X. \tag{5.1.9b}$$

对于给定的 S_∞^*, 用 $f(S; S_\infty^*)$ 表示方程 (5.1.9a), (5.1.9b) 的解. 因为方程 (5.1.9a) 是一个线性等量纲的常微分方程, 它有如下形式的通解:

$$f(S; S_\infty^*) = c_1 S^{\mu_+} + c_2 S^{\mu_-},$$

其中 c_1 和 c_2 为任意常数, μ_+ 和 μ_- 分别为如下辅助方程的正根和负根:

$$\frac{\sigma^2}{2}\,\mu^2 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mu - r = 0.$$

由于 $f(0; S_\infty^*) = 0$, 于是有 $c_2 = 0$. 在 S_∞^* 处运用边界条件有

$$f(S_\infty^*; S_\infty^*) = c_1 S_\infty^{*\mu_+} = S_\infty^* - X,$$

这样就得到

$$c_1 = \frac{S_\infty^* - X}{S_\infty^{*\mu_+}}.$$

解 $f(S; S_\infty^*)$ 可以简化成为如下形式:

$$f(S; S_\infty^*) = (S_\infty^* - X)\,\left(\frac{S}{S_\infty^*}\right)^{\mu_+} \tag{5.1.10}$$

其中

$$\mu_+ = \frac{-(r - q - \frac{\sigma^2}{2}) + \sqrt{(r - q - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2} > 0.$$

为了求得完整的解, 还要确定 S_∞^* . 在所有可能的最佳实施价格中选择一个 S_∞^*, 使得永久美式看涨期权的价值最大, 也就是说,

$$C_\infty(S;X,q)=\max_{\{S_\infty^*\}}\left\{(S_\infty^*-X)\ \left(\frac{S}{S_\infty^*}\right)^{\mu_+}\right\}. \tag{5.1.11}$$

微积分知识告诉我们要使 $f(S;S_\infty^*)$ 最大, 必须满足

$$S_\infty^*=\frac{\mu_+}{\mu_+-1}X. \tag{5.1.12}$$

记 $S_{\infty,C}^*=\dfrac{\mu_+}{\mu_+-1}X$, 永久美式看涨期权的价值有以下形式:

$$C_\infty(S;X,q)=\left(\frac{S_{\infty,C}^*}{\mu_+}\right)\ \left(\frac{S}{S_{\infty,C}^*}\right)^{\mu_+}. \tag{5.1.13}$$

容易验证上述解也满足平滑粘贴性条件

$$\left.\frac{dC_\infty}{dS}\right|_{S=S_{\infty,C}^*}=1. \tag{5.1.14}$$

也可以不用上述最大化过程, 而直接应用平滑粘贴性条件来解出 $S_{\infty,C}^*$. 实际上, 应用平滑粘贴性条件就隐含地包括了通过在所有可能的 $S_{\infty,C}^*$ 中选择来使得期权价值最大化的过程.

5.1.4 看涨–看跌期权的对称关系

一旦建立起看涨–看跌期权的价格函数与最佳实施价格之间的对称关系, 原生资产连续分红的美式看跌期权最佳实施边界的性质就可以从与其对应的美式看涨期权推导出来. 以 S 为横轴, 美式看跌期权的价格函数 $P(S,\tau)$ 的图形如图 5.3 所示.

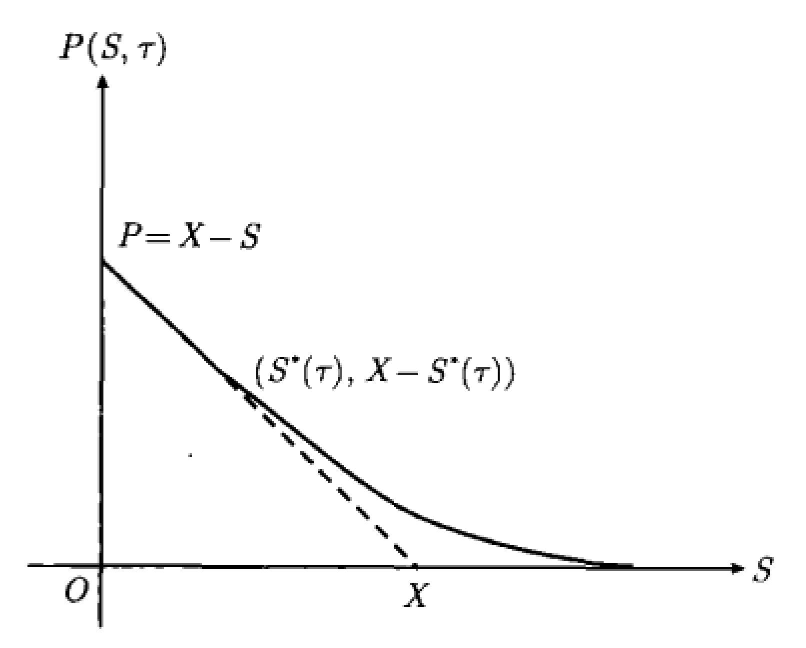


图 5.3　实曲线表示在距到期日为 τ 时美式看跌期权的价格函数, 价格函数曲线在点 $(S^*(\tau), X-S^*(\tau))$ 处与虚线所标示的内在价值曲线相切, 其中 $S^*(\tau)$ 为最佳实施价格, 当 $S\leqslant S^*(\tau)$ 时, 美式看跌期权的价格就变成 $X-S$

可以将美式看涨期权看成提供了这样一个权利, 即在期权有效期内的任何时刻, 持有者可以用 X 美元的现金 (以银行账户的形式) 来换取价值 S 美元的一单位原生资产. 如果用资产一来代表原生资产, 用资产二来代表现金, 这样资产一和资产二有它们各自的分红率, 分别为 q 和 r. 上述看涨期权可以看成是一个用资产二换取资产一的交换期权. 同样地, 可以考虑将美式看跌期权看成给持有者提供了在任何时间用价值 S 美元的一单位原生资产来换取 X 美元现金的一个权利. 如果将美式看跌期权中原生资产和现金的角色互换将会怎么样呢? 现在, 这份新的美式看跌期权就可以被当成与一份通常的美式看涨期权等价, 因为这两个期权都赋予了持有者同样的一个用现金换原生资产的权利. 如果用 $P(S,\tau;X,r,q)$ 表示美式看跌期权的价格函数, 那么这个修改后的美式看跌期权 (交换原生资产和现金的角色) 的价格函数就是 $P(X,\tau;S,q,r)$, 其中 S 和 X, r 和 q 都被交换了. 由于修改后的美式看跌期权等价于一个美式看涨期权, 于是就有

$$C(S,\tau;X,r,q) = P(X,\tau;S,q,r). \tag{5.1.15}$$

这个美式看涨期权和美式看跌期权价格函数之间的对称关系被称为**看涨–看跌期权的对称关系**(put-call symmetry relation).

接下来, 建立美式看涨和看跌期权最佳实施价格之间的对称关系. 用 $S_P^*(\tau;r,q)$ 和 $S_C^*(\tau;r,q)$ 分别表示原生资产连续分红美式看跌和看涨期权的最佳实施价格. 当 $S=S_C^*(\tau;r,q)$ 时, 看涨期权的持有者愿意用 X 美元现金换取价值 S_C^* 美元的一单位原生资产, 或者说, 用**一美元**(one dollar) 现金换取价值 $\dfrac{S_C^*}{X}$ 美元的 $\dfrac{1}{X}$ 单位原生资产. 同样地, 当 $S=S_P^*(\tau;r,q)$ 时, 看跌期权的持有者愿意用一美元的 $\dfrac{1}{S_P^*}$ 单位原生资产换取 $\dfrac{X}{S_P^*}$ 美元现金. 如果这两份美式看涨和看跌期权都可以被看成交换期权, 并且现金和原生资产的角色可以互换, 则相应的看涨–看跌期权的最佳实施价格之间的对称性关系如下:

$$S_C^*(\tau;r,q) = \frac{X^2}{S_P^*(\tau;q,r)}. \tag{5.1.16}$$

美式期权价格之间的对称性关系的数学证明是很容易的 (见习题 5.7). 实际上, 美式看涨和看跌期权的价格函数之间的对称性关系还有更为奇特的形式 (见习题 5.8, 习题 5.9).

1. 到期日附近 $S_P^*(\tau)$ 的性质

从式 (5.1.16) 和 $S_C^*(\tau)$ 的单调递增性可以知道, $S_P^*(\tau)$ 是 τ 的单调递减函数.

因为当 $\tau \to 0^+$ 时, 方程 (5.1.16) 仍然成立, $S_P^*(\tau)$ 的上界如下给出:

$$\lim_{\tau\to 0^+} S_P^*(\tau; r, q) = \frac{X^2}{\lim\limits_{\tau\to 0^+} S_C^*(\tau; q, r)} = \frac{X^2}{X\max\left(1, \dfrac{q}{r}\right)} = X\min\left(1, \frac{r}{q}\right). \tag{5.1.17}$$

从方程 (5.1.17) 可以看出, 当 $q \leqslant r$ 时, $\lim\limits_{\tau\to 0^+} S_P^*(\tau) = X$. 此时, 即使 $q = 0$, $S_P^*(\tau)$ 也是非零的, 因为对 $\tau > 0$, $S_P^*(\tau)$ 是 τ 的连续递减函数, 而且它的上界等于 X. 因此, 即使原生资产不分红, 实施美式看跌期权也会更好. 另一方面, 当利率为零时, $\lim\limits_{\tau\to 0^+} S_P^*(\tau)$ 变成零. 因为 $S_P^*(\tau)$ 是 τ 的单调递减函数, 所以对 $\tau > 0$ 有 $S_P^*(\tau) = 0$. 因此, 如果利率为零, 则提前实施美式看跌期权永远不是最佳的. 从金融意义上来看, 这样的结论是显然的, 也很直观, 因为当利率为零时, 提前实施美式看跌期权所得到的敲定价没有时间价值.

当 $\tau \to 0^+$ 时, 要从数学上得到 $S_P^*(\tau)$ 更精确的渐近性质是比较困难的. Evans 等(2002) 证明了在到期日附近, 若 $q > r$, 则最佳实施边界是抛物线型的, 但是若 $q \leqslant r$, 它就是对数抛物线型的. 当 $\tau \to 0^+$ 时, 扩展的 $S_P^*(\tau)$ 的渐近性质具有以下的解析形式:

(i) $0 \leqslant q < r$,

$$S_P^*(\tau) \sim X - X\sigma\sqrt{\tau\ln\left(\frac{\sigma^2}{8\pi\tau(r-q)^2}\right)}; \tag{5.1.18a}$$

(ii) $q = r$,

$$S_P^*(\tau) \sim X - X\sigma\sqrt{2\tau\ln\left(\frac{1}{4\sqrt{\pi}q\tau}\right)}; \tag{5.1.18b}$$

(iii) $q > r$,

$$S_P^*(\tau) \sim \frac{r}{q}X(1 - \sigma\alpha\sqrt{2\tau}). \tag{5.1.18c}$$

其中 α 为一个满足以下隐式方程的数值常数:

$$-\alpha^3 e^{\alpha^2}\int_\alpha^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{1-2\alpha^2}{4}.$$

2. *离到期日无穷远处 $S_P^*(\tau)$ 的性质*

与推导永久美式看涨期权在离到期日无穷远时性质的过程类似, 可以推导出永久美式看跌期权的价格

$$P_\infty(S; X, q) = -\frac{S_{\infty,P}^*}{\mu_-}\left(\frac{S}{S_{\infty,P}^*}\right)^{\mu_-}, \tag{5.1.19}$$

其中, $S^*_{\infty,P}$ 为离到期日无穷远时的最佳实施价格, 它的值为

$$S^*_{\infty,P} = \frac{\mu_-}{\mu_- - 1}X, \tag{5.1.20}$$

$$\mu_- = \frac{-\left(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right) - \sqrt{\left(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2} < 0.$$

容易验证

$$S^*_{\infty,P}(r,q) = \frac{X^2}{S^*_{\infty,C}(q,r)}, \tag{5.1.21}$$

这个结果正好与方程 (5.1.16) 给出的关系相吻合.

5.1.5 原生资产单次分红的美式看涨期权

在 1.2 节中, 已经解释了如果原生资产离散的分红, 并且没有其他因素影响收益, 则在除息日之后, 原生资产价格将会下降同分红数额相同的值. 实证研究表明, 股票价格的下降值与分红额之比近似等于一. 在下面的讨论中, 为简便起见, 假定在除息日之后, 原生资产价格下降值就等于离散的红利额. 如果期权价值不随其选择的分红策略而变化, 则这份期权就被称为**不受分红影响的**(dividend protected). 这可以通过根据分红额来调整敲定价做到. 现在, 考虑离散分红对受分红影响的美式期权的提前实施策略的影响, 也就是说, 看涨期权的敲定价不会向下调整与分红额相等的量, 看跌期权的敲定价也不会向上调整与分红额相等的量.

1. 提前实施策略

因为对原生资产离散分红的美式看涨期权的持有者而言, 在相邻的除息日之间, 他得不到任何红利, 所以在不分红的日期实施期权一定不是最佳的. 在除息日之间, 提前实施的特权是没有用的. 如果美式看涨期权最终被实施, 则选择的时间肯定是某个原生资产除息日之前的时刻. 这样, 持有者在原生资产分红之前得到了它, 而且马上就可以得到红利. 研究在何种情况下, 这样的美式看涨期权的持有者选择实施期权是最佳的.

在下面的讨论中, 为方便起见, 用日历时间 t 来刻画最佳实施边界对时间的依赖性. 考虑一份美式看涨期权, 它的原生资产只在一个确定的除息日 t_d 分红 D. 习题 5.15～ 习题 5.17 将会研究推广后的多次分红的模型. 用 $S_d^-(S_d^+)$ 代表时刻 $t_d^-(t_d^+)$ 的原生资产价格, 也就是在除息日 t_d 之前 (后) 瞬间的原生资产价格. 如果美式看涨期权在 t_d^- 被实施, 则期权价值就是 $S_d^- - X$; 否则, 在资产分红之后, 资产价格就会下跌到 $S_d^+ = S_d^- - D$. 既然在 t_d 之后不会再分红, 所以当 $t > t_d^+$ 时, 美式期权的价格函数同相对应的欧式期权的价格函数一样. 因为美式看涨期权的持

有者在除息日得不到任何红利 (这不同于资产持有者), 所以为了排除套利机会, 美式看涨期权的价格函数在除息日附近必须连续.

从方程 (1.2.11) 可以看出, 在 t_d^+ 时刻, 美式看涨期权的价值下界为 $S_d^+ - Xe^{-r(T-t_d^+)}$, 其中 $T-t_d^+$ 为距离到期日的时间. 无论如何, $T-t_d, T-t_d^+$ 和 $T-t_d^-$ 都是相等的. 由于美式看涨期权的价值在越过除息日时的连续性, 在 t_d^- 时刻, 期权价值的下界也应该是 $S_d^+ - Xe^{-r(T-t_d)} = (S_d^- - D) - Xe^{-r(T-t_d)}$. 因为在下一时刻将产生预期的红利 D, 在时刻 t_d^-, 看涨期权价值的下界也随之下降了 D. 现在, 当 D 充分大时, 在 t_d^- 时刻, 期权价值的下界将低于它的实施收益 $S_d^- - X$. 比较下面两个量: 实施收益 $E = S_d^- - X$ 和期权价值的下界 $B = (S_d^- - D) - Xe^{-r(T-t_d)}$. 假定 $E \leqslant B$, 也就是说,

$$S_d^- - X \leqslant (S_d^- - D) - Xe^{-r(T-t_d)}, \quad \text{或} \quad D \leqslant X\left[1 - e^{-r(T-t_d)}\right], \tag{5.1.22}$$

则在时刻 t_d^-, 不应该实施美式看涨期权. 这是因为不管资产价格 S_d^- 为何值, 美式看涨期权被持有时的价值总高于被实施的价值. 然而, 当 D 充分大, 尤其是当 $D > X[1-e^{-r(T-t_d)}]$ 时, 在 t_d^- 时刻, 如果资产 S_d^- 高于某个阈值, 则实施期权是最佳的. 这个对 D 的要求给出了提前实施期权的一个必要条件. 为了抵消在敲定价时间价值上的损失, 即 $X[1-e^{-r(T-t_d)}]$, 分红额 D 必须充分大.

以日历时间 t 作为时间变量, 用 $C_d(S,t)$ 表示原生资产单次分红的美式看涨期权的价格函数. 由于看涨期权价值在越过除息日时的连续性, 所以有

$$C_d(S_d^-, t_d^-) = c(S_d^- - D, t_d^+), \tag{5.1.23}$$

其中 $c(S_d^- - D, t_d^+)$ 是在日历时刻 t_d^+, 资产价格为 $S_d^- - D$ 时, Black-Scholes 公式给出的欧式看涨期权的价值. 为了更好地理解在 t_d^- 时刻为何要提前实施期权, 若资产价格为 S_d^-, 下面来画出看涨期权的价格函数、实施收益 E (对应直线 ℓ_1: $E = S_d^- - X$) 和期权价值的下界 B (对应直线 ℓ_2: $B = S_d^- - D - Xe^{-r(T-t_d)}$)(图 5.4). 当 $D > X[1-e^{-r(T-t_d)}]$ 时, 实施收益直线 l_1 在期权价值下界直线 l_2 的左侧. 这样, 看涨期权的价格函数曲线可能在某个临界的资产价格 S_d^* 与实施收益直线 l_1 相交 (不是相切), 这个临界价格满足下面的代数方程:

$$c(S_d^- - D, t_d) = S_d^- - X. \tag{5.1.24}$$

从数学上可以证明, 当 $D \leqslant X[1-e^{-r(T-t_d)}]$ 时, 方程 (5.1.24) 无解. 这个结果和上面讨论中 (见习题 5.13) 得出的关于 D 必须满足的必要条件相吻合. 若分红额充分大而使得 $D > X[1-e^{-r(T-t_d)}]$, 则只有当 $S_d^- < S_d^*$ 时, 美式看涨期权在除息日之后还被继续持有. 当 $S_d^- \geqslant S_d^*$ 时, 在 t_d^- 时刻实施看涨期权是最佳的. 因此, 在

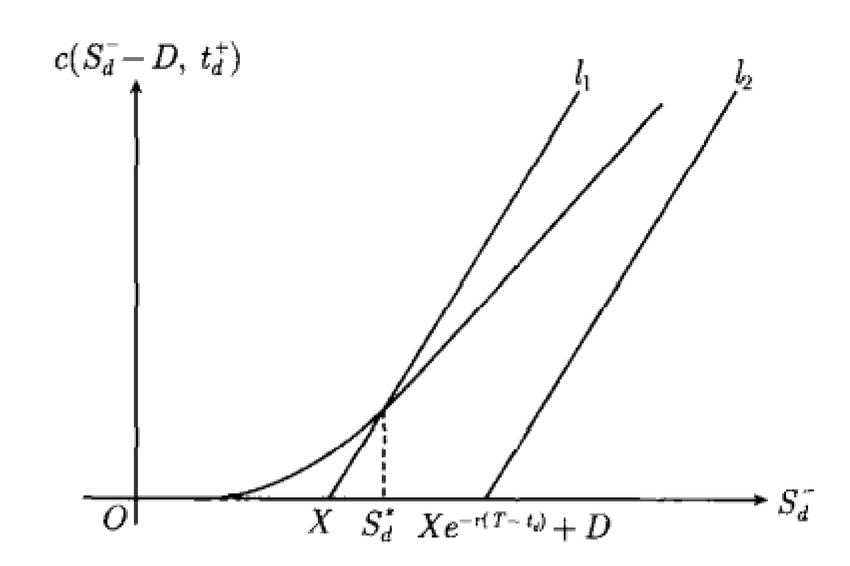


图 5.4 对于 $S_d^- > S_d^*$, 当 ℓ_1 位于期权价值的下界直线 $\ell_2 : B = S_d^- - D - Xe^{-r(T-t_d)}$ 左侧时, 欧式看涨期权的价格曲线 $V = c(S_d^- - D, t_d^+)$ 低于实施收益曲线 $\ell_1 : E = S_d^- - X$, 其中 S_d^* 为欧式看涨期权的价格曲线与实施收益直线 ℓ_1 相交时 S_d^- 的值

t_d^- 时刻, 美式看涨期权的价值为

$$C_d(S_d^-, t_d^-) = \begin{cases} c(S_d^- - D, t_d^+), & S_d^- < S_d^*, \\ S_d^- - X, & S_d^- \geqslant S_d^*. \end{cases} \tag{5.1.25}$$

如果在 t_d^- 时刻实施美式看涨期权不是最佳的, 则在除息日前后期权的价值就不变. 注意: S_d^* 依赖于 D, 它的价值随 D 的增加而减少 (见习题 5.13). 这也与我们的金融直觉相符, 即随着离散分红增多, 人们越来越倾向于提前实施期权 (对应一个较小的 S_d^*).

总而言之, 原生资产单次分红的美式看涨期权的持有者只有在除息日之前的瞬间实施期权才是最佳的, 条件是 $S_d^- \geqslant S_d^*$, 其中 S_d^* 满足方程 (5.1.24). 同时, 只有当 $D > X[1 - e^{-r(T-t_d)}]$ 成立时 S_d^* 才存在, 这意味着分红必须足够大才能够抵消在敲定价时间价值上的损失.

2. 单次分红美式看涨期权价格的解析公式

因为原生资产离散分红的美式看涨期权的持有者只可能在除息日之前的瞬间实施期权, 所以可以利用一个复合欧式期权来复制这个美式期权, 这个复合期权的到期日正好对应那些除息日. 利用这种复制技巧, 可以推导原生资产离散分红的美式看涨期权价格满足的解析公式.

如果原生资产价格 S 服从几何布朗运动, 则当原生资产价格低于除息日的分红额时, 就不可能支付红利. 通过修改扩散过程, 可以克服这个困难. 为此, 用 $\widetilde{S}$ 表示减掉托管分红的现值之后的原生资产净值, 而且假设 $\widetilde{S}$ 服从几何布朗运动过程. 称 $\widetilde{S}$ 为原生资产价格的风险分量.

假设原生资产在 t_d 时刻一次性分红 D，那么 S 的风险分量如下定义：

$$\widetilde{S} = \begin{cases} S, & t_d^+ \leqslant t \leqslant T, \\ S - De^{-r(t_d-t)}, & t \leqslant t_d^-. \end{cases} \tag{5.1.26}$$

注意：在除息日前后 $\widetilde{S}$ 连续. 修改 Black-Scholes 关于原生资产价格变化的假设, 使得在风险中性测度下, 风险分量 $\widetilde{S}$ 服从几何布朗运动过程

$$\frac{d\widetilde{S}}{\widetilde{S}} = r\,dt + \sigma\,dZ, \tag{5.1.27}$$

其中 σ 为 $\widetilde{S}$ 的波动率.

现在推导当 $D > X[1 - e^{-r(T-t_d)}]$ 时, 原生资产在时刻 t_d 一次性分红 D 的美式看涨期权的价格公式. 记日历时间为 t, 用 $C_d(\widetilde{S}, t)$ 表示这个单次分红的美式看涨期权的价格, 用 $c(\widetilde{S}, t)$ 表示满足 Black-Scholes 方程的看涨期权的价格函数, 用 $\widetilde{S}_d$ 表示在除息日 t_d 资产价格的风险分量, 用 $\widetilde{S}_d^*$ 表示在 $t = t_d$ 时风险分量的某个临界值, 只有在其之上实施期权才是最佳的. 这个临界值 $\widetilde{S}_d^*$ 满足如下方程 (见方程 (5.1.24))：

$$\widetilde{S}_d + D - X = c(\widetilde{S}_d, t_d). \tag{5.1.28}$$

可以用一个首次到期日为除息日 t_d 的欧式复合期权来复制这个单次分红的美式看涨期权. 如果 $\widetilde{S}_d \geqslant \widetilde{S}_d^*$, 则在 t_d 时刻复合期权支付 $\widetilde{S}_d + D - X$; 如果 $\widetilde{S}_d < \widetilde{S}_d^*$, 则复合期权支付一个敲定价为 X, 距离到期日还有 $T - t_d$ 的欧式看涨期权. 给定 $t < t_d$ 时的资产价格为 $\widetilde{S}$, 用 $\psi(\widetilde{S}_d, \widetilde{S}; t_d, t)$ 表示 $\widetilde{S}_d$ 在 t_d 的条件转移密度函数, 则对 $t < t_d$, t_d 时刻单次分红的美式看涨期权的价格为 (Whaley, 1981)

$$\begin{aligned} C_d(\widetilde{S}, t) = e^{-r(t_d-t)} \Bigg[& \int_{\widetilde{S}_d^*}^{\infty} [\widetilde{S}_d - (X - D)]\, \psi(\widetilde{S}_d, \widetilde{S}; t_d, t)\, d\widetilde{S}_d \\ & + \int_0^{\widetilde{S}_d^*} c(\widetilde{S}_d, t_d)\, \psi(\widetilde{S}_d, \widetilde{S}; t_d, t)\, d\widetilde{S}_d \Bigg], \quad t < t_d. \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

第一项可看成具有两个不同敲定价的欧式看涨期权的价格. 敲定价 $\widetilde{S}_d^*$ 决定了看涨期权在到期日的价值状况, 另一个敲定价 $X - D$ 是在到期日为了换取原生资产而支付的数额. 第二项表示一个原生资产为一份看涨期权的欧式看跌期权的价格, 它在 t_d 时的敲定价为 $\widetilde{S}_d^*$, 在 T 时的敲定价为 X. 单次分红美式看涨期权的价格公式如下：

$$\begin{aligned} & C_d(\widetilde{S}, t) \\ = & \widetilde{S}N(a_1) - (X - D)e^{-r(t_d-t)}N(a_2) - Xe^{-r(T-t)}N_2\left(-a_2, b_2; -\sqrt{\frac{t_d - t}{T - t}}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\widetilde{S}N_2\left(-a_1,b_1;-\sqrt{\frac{t_d-t}{T-t}}\right)\\
&=\widetilde{S}\left[1-N_2\left(-a_1,-b_1;\sqrt{\frac{t_d-t}{T-t}}\right)\right]+De^{-r(t_d-t)}N(a_2)\\
&\quad -X\left[e^{-r(t_d-t)}N(a_2)+e^{-r(T-t)}N_2\left(-a_2,b_2;-\sqrt{\frac{t_d-t}{T-t}}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{5.1.30}
$$

其中

$$
a_1=\frac{\ln\dfrac{\widetilde{S}}{\widetilde{S}_d^*}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(t_d-t)}{\sigma\sqrt{t_d-t}},\qquad a_2=a_1-\sigma\sqrt{t_d-t},
$$

$$
b_1=\frac{\ln\dfrac{\widetilde{S}}{X}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\qquad b_2=b_1-\sigma\sqrt{T-t}.
$$

这个定价过程将在习题 5.17 中被推广至两次分红美式看涨期权的定价模型.

Black 近似公式

用 $c(S,\tau)$ 代表欧式看涨期权的价格函数, 时间变量 τ 是距离到期日的时间. Black (1975) 提出了单次分红的美式看涨期权的近似价值为

$$
\max(c(\widetilde{S},T-t;X),c(S,t_d-t;X)).
$$

第一项表示当提前实施概率为零时单次分红的美式看涨期权的价值, 第二项则表示提前实施概率为 1 时的期权价值. 因为这两种情况代表了提前实施的次优策略, 显然,

$$
C_d(\widetilde{S},T-t;X)\geqslant \max(c(\widetilde{S},T-t;X),c(S,t_d-t;X)),\quad t<t_d. \tag{5.1.31}
$$

5.1.6 单次和多次分红的美式看跌期权

考虑在生存期内原生资产离散分红的美式看跌期权. 与相应的看涨期权相比较, 看跌期权的最佳实施策略更复杂一些. 在除息日之前的一个很短的时间段, 看跌期权的持有者可能会选择不管资产价格如何都不实施期权, 因为他能得到红利. 也就是说, 为了获得除息日原生资产的红利, 持有者会选择先持有期权, 等到除息日之后立即实施期权. 在最后一次除息日到到期日之间的时间段, 最佳实施边界的性质类似于原生资产不分红的美式看跌期权, 所以最佳实施价格随着日历时间 t 的递增而单调递增. 在除息日之间的时段和首次除息日之前的时段, 随着 t 的增加, $S^*(t)$ 可能会上升或下降, 甚至变成零 (图 5.5 和图 5.6). 由于最佳实施策略的复杂性, 原生资产离散分红的美式看跌期权的价格不存在解析公式.

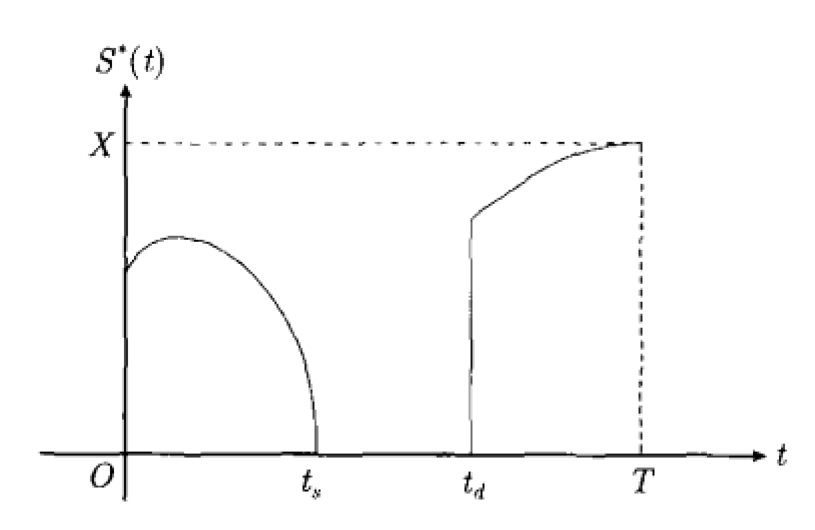


图 5.5　单次分红的美式看跌期权的最佳实施边界 $S^*(t)$ 关于 t 的函数图像

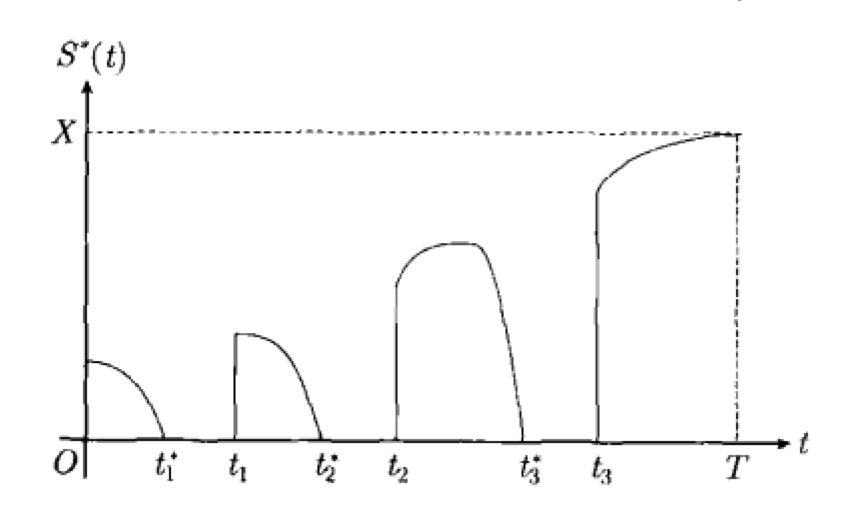


图 5.6　分红三次的美式看跌期权模型中最佳实施边界 $S^*(t)$ 作为日历时间 t 的函数的图像, 在 (t_3,T), $S^*(t)$ 单调递增, 并且 $S^*(T)=X$; 在 $[t_3^*,t_3]$, 它取值为零; 而且像在 (t_2,t_3^*), $S^*(t)$ 会先上升到某个峰值, 然后下降, 或者像在 (t_1,t_2^*) 只是单调递减

1. 单次分红美式看跌期权

首先, 研究单次分红的美式看跌期权的最佳实施策略. 记除息日为 t_d, 到期日为 T, 分红额为 D. 当 $t>t_d$ 时, 最佳实施策略与不分红的美式看跌期权相同, 因此, 只需要考虑除息日之前时间段上的最佳实施策略. 假设美式看跌期权在 t 时刻被实施, 那么在 t 和 t_d 之间, 从敲定价 X 的时间价值上得到的利息为 $X[e^{r(t_d-t)}-1]$, 其中 r 为无风险利率. 当敲定价的时间价值所得低于离散分红额, 即 $X[e^{r(t_d-t)}-1]<D$ 时, 提前实施美式看跌期权必定不是最优. (注意: 利率收入 $X[e^{r(t_d-t)}-1]$ 依赖于 t_d-t, 并且随 t_d-t 递增而递增.) 这样就存在一个临界值 t_s,

$$X[e^{r(t_d-t_s)}-1]=D. \tag{5.1.32}$$

解出 t_s, 于是得到

$$t_s=t_d-\frac{1}{r}\ln\left(1+\frac{D}{X}\right). \tag{5.1.33}$$

在时段 $[t_s,t_d]$, 实施美式看跌期权必定不是最优的.

当 $t < t_s$ 时, $X[e^{r(t_d-t)}-1] > D$. 在这个条件下, 当资产价格低于某个临界值时, 提前实施期权才可能是最佳的. 最佳实施价格 $S^*(t)$ 受两个互相抵消因素的影响, 即敲定价的时间价值和分红额. 当 t 接近 t_s 时, 红利的主导作用越来越大, 这样只有实施收益非常大时, 美式看跌期权才会被实施. 因此, 随着 t 增加而接近 t_s, $S^*(t)$ 会减少. 当 t 离 t_s 充分远时, 红利的作用变小, 所以最佳实施策略更像一份原生资产不分红的美式看跌期权. 在这种情况下, $S^*(t)$ 变成 t 的增函数. 综合这些结果, 在 t_s 之前的时段, $S^*(t)$ 关于 t 的图像更像一条驼峰形状的曲线 (图 5.5).

从方程 (5.1.33) 可以看出, t_s 随着 r 的增加而增加, 所以"不实施区间" $[t_s, t_d]$ 随着利率的升高而减小. 因为提前实施美式看跌期权会得到更多的敲定价时间价值, 所以利率越高, 意味着持有一份正收益的美式看跌期权的机会成本越高. 因此, 持有者更倾向于提前实施期权.

总的来说, 单次分红美式看跌期权模型中最佳实施边界 $S^*(t)$ 具有以下性质 (图 5.5):

(i) 当 $t < t_s$ 时, $S^*(t)$ 随着 t 变大, 光滑地先增加后减小, 直到在 t_s 跌到零;

(ii) $S^*(t)$ 在时段 $[t_s, t_d]$ 取值为零;

(iii) 当 $t \in (t_d, T], S^*(t)$ 是 t 的单调递增函数, 并且 $S^*(T) = X$.

2. *多次分红的美式看跌期权*

在多次分红的美式看跌期权模型中, 也可以按照类似的方式分析最佳实施策略. 假设在除息日 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别分红 $D_1, D_2, \cdots, D_n$, 在除息日 $t_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 之前有一个时段 $[t_j^*, t_j]$, 使得提前实施看跌期权总不是最佳的. 也就是说, 对 $t \in [t_j^*, t_j] (j = 1, 2, \cdots, n)$, $S^*(t) = 0$. 这个临界值 t_j^* 如下给出:

$$t_j^* = t_j - \frac{1}{r}\ln\left(1 + \frac{D_j}{X}\right), \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{5.1.34}$$

注意: 当 D_j 递增时, t_j^* 递减. 当 D_j 充分大时, t_j^* 可能变得比 t_{j-1} 更小.

这里, 使用日历时间 t 描述最佳实施边界. 当 t 落在时段 $(t_{j-1}, t_j^*) (j = 2, \cdots, n)$ 或者 $t \leqslant t_1^*$ 时, 最佳实施价格 $S^*(t)$ 可能随着时间增加达到某个峰值, 然后减小, 最终在时刻 t_j^* 跌到零. 这在分红额较小时才会发生. 当分红额充分大时, 在时段 (t_{j-1}, t_j^*) , $S^*(t)$ 会从某个峰值单调地下降到零. 当 D_j 更大时, t_j^* 可能小于 t_{j-1}. 结果, 在整个时段 $[t_{j-1}, t_j]$, $S^*(t) = 0$. 在最后的时段 $(t_n, T]$, 随着离到期日越来越近, $S^*(t)$ 单调增加至 X.

图 5.6 描绘了三次分红的美式看跌期权模型中最佳实施边界 $S^*(t)$ 关于日历时间 t 的函数图像. Meyer (2001) 对多次分红的美式看跌期权的最佳实施策略作了仔细的数值研究. 他得出的结果与上述 $S^*(t)$ 的特征一致.

5.2 美式期权模型的定价公式

在本节, 讨论美式期权模型的两种定价公式, 即线性互补公式和最优停时公式. 首先, 推导美式期权价格函数满足的变分不等式, 从而得到线性互补公式. 或者, 美式期权价格也可以看成是在所有可能的停时中所得实施收益贴现值的期望的上确界. 可以证明最佳停时公式表示的解也满足线性互补公式. 从扩散过程的控制理论, 可以用最佳实施边界得到美式期权价格公式的积分表示. 也将说明用延迟实施补偿的金融论证法推导提前实施费用的积分表示. 可以发现, 最佳实施价格是这样一种资产价格, 在此价格, 持有者实施和不实施都没有任何区别. 基于这一事实, 可以推导最佳实施价格的积分方程. 最后, 将讨论两类路径依赖的美式期权模型, 即美式障碍期权定价模型和永久美式回望期权的一种特殊形式, 被称为“俄罗斯式期权”的定价模型.

5.2.1 线性互补公式

美式期权的定价问题可以视为一个自由边界问题, 这条自由边界是分隔继续持有区域和停止持有区域的最佳实施边界. 当资产价格落在停止持有区域时, 实施美式看涨期权就是最佳的, 它的值为

$$C(S,\tau)=S-X,\quad S\geqslant S^*(\tau). \tag{5.2.1}$$

实施收益函数 $C=S-X$, 不满足 Black-Scholes 方程, 因为

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}-(r-q)S\frac{\partial}{\partial S}+r\right](S-X)=qS-rX. \tag{5.2.2}$$

在停止持有区域, 注意 $S\geqslant S^*(\tau)>S^*(0^+)=X\max\left(1,\dfrac{r}{q}\right)$, 所以 $qS-rX>0$. 看涨期权价值 $C(S,\tau)$ 满足以下不等式:

$$\frac{\partial C}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}-(r-q)S\frac{\partial C}{\partial S}+rC>0,\quad S\geqslant S^*(\tau). \tag{5.2.3}$$

通过下面的金融原理也可以推导出上面这个不等式. 用 Π 代表无风险的对冲组合, 定义如下:

$$\Pi=C-\Delta S,\quad \Delta=\frac{\partial C}{\partial S}.$$

在继续持有区域, 持有美式期权是最佳的, 由无套利原理有 $d\Pi=r\Pi\,dt$. 然而, 当且仅当无风险对冲组合的回报率低于无风险利率时, 提前实施美式看涨期权才是最佳的, 也就是说,

$$d\Pi<r\Pi\,dt. \tag{5.2.4}$$

通过 Itô引理计算 $d\Pi$, 可以看出式 (5.2.4) 和式 (5.2.3) 等价, 所以得到结论

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + rC \geqslant 0, \quad S>0\ ,\ \tau>0. \tag{5.2.5a}$$

当 (S,τ) 位于继续持有区域时, 式 (5.2.5a) 等号成立. 另一方面, 当 $S<S^*(\tau)$ 时, 美式看涨期权的价值总是高于其内在价值 $S-X$, 当 $S\geqslant S^*(\tau)$ 时, 等于其内在价值, 即

$$C(S,\tau) \geqslant S-X, \quad S>0\ ,\ \tau>0. \tag{5.2.5b}$$

在式 (5.2.5b) 中, 当 (S,τ) 位于停止持有区域时, 等号成立. 既然 (S,τ) 要么在继续持有区域, 要么在停止持有区域, 这样上述两个变分不等式总有一个等号成立. 于是可以得到

$$\left[\frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r-q)S\frac{\partial C}{\partial S} + rC\right][C-(S-X)] = 0 \tag{5.2.6}$$

对所有 $S>0$ 和 $\tau>0$ 都成立. 为了完整上述模型, 还需要给出终期的收益条件

$$C(S,0) = \max(S-X,0). \tag{5.2.7}$$

式 (5.2.5a), (5.2.5b) 和方程 (5.2.6), 加上辅助条件 (5.2.7) 一起构成了美式看涨期权定价模型的**线性互补形式**(linear complementarity formulation)(Dewynne et al., 1993).

从上面的线性互补定价形式, 可以推导出美式看涨期权最佳实施价格 $S^*(\tau)$ 的如下两个性质:

(1) 它是使得美式看涨期权价格等于实施收益的最低资产价格;

(2) 它是使得实施和不实施美式看涨期权没有区别的那个资产价格.

Bunch 和 Johnson (2000) 给出了 $S^*(\tau)$ 的另一个有趣的性质. 它是使得美式看涨期权与距离到期日时间无关的最低的资产价格, 即

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = 0, \quad S = S^*(\tau). \tag{5.2.8}$$

这与金融直觉相一致, 当立即实施期权是最佳时, 距离到期日有多长时间就无关紧要了. 也给出了下面简单的数学证明. 在最佳实施边界 $S^*(\tau)$ 上有

$$C(S^*(\tau),\tau) = S^*(\tau) - X.$$

两边对 τ 求导得到

$$\frac{\partial C}{\partial \tau}(S^*(\tau),\tau) + \frac{\partial C}{\partial S}(S^*(\tau),\tau)\frac{dS^*(\tau)}{d\tau} = \frac{dS^*(\tau)}{d\tau}.$$

利用平滑粘贴性条件 $\dfrac{\partial C}{\partial S}(S^*(\tau),\tau) = 1$, 就得到了方程 (5.2.8) 中的结果.

5.2.2 最优停时问题

美式期权的定价也可以看成是一个**最优停时问题**(optimal stopping problem). 可以把停时 t^* 看成一个在时段 $[0,T]$ 上取值的函数, 根据与资产价格路径 $S_u(0 \leqslant u \leqslant t^*)$ 相关的信息来决定这个"停止持有的时刻 t^*". 考虑美式看跌期权, 假设在时刻 $t^*(t^* < T)$ 期权被实施, 那么收益就是 $\max(X - S_{t^*}, 0)$. 在 t^* 时刻, 具有上述收益的看跌期权的公平价格应该为

$$E_Q^t[e^{-r(t^*-t)} \max(X - S_{t^*}, 0)],$$

其中 E_Q^t 表示当 $S_t = S$ 时, 在风险中性测度 Q 下的条件期望. 只要 t^* 是一个停时, 而不用管它是确定性的还是随机的, 上述公式总是成立的.

持有者可以选择在期权有效期内任何时刻实施期权, 因此, 持有者会选择一个时刻实施期权, 使得上述收益贴现值的期望最大, 这样就可以给出美式看跌期权的价值如下 (Karatzas, 1988; Jacka, 1991; Myneni, 1992):

$$P(S,t) = \sup_{t \leqslant t^* \leqslant T} E_Q^t[e^{-r(t^*-t)} \max(X - S_{t^*}, 0)], \tag{5.2.9}$$

其中 t 为日历时间, 上确界是对所有可能的停时取的. (注意: $P(S,t)$ 总是大于等于实施收益, 并且 $P(S,t)$ 在停时 t^* 等于实施收益.) 上面的上确界是在最佳停时达到的 (Krylov, 1980), 所以

$$t^*_{\text{opt}} = \inf_u \{t \leqslant u \leqslant T : P(S_u, u) = \max(X - S_u, 0)\}, \tag{5.2.10}$$

它就是美式看跌期权价值首次下降到其实施收益的时刻.

下面设法验证线性互补方法中给出的美式看跌期权价值的解正是 (5.2.9), 其中停时由方程 (5.2.10) 确定. 回顾一下著名的**选择样本定理** (optional sampling theorem), 它的一种阐述形式如下: 如果 $(M_t)_{t \geqslant 0}$ 是关于信息流 $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 连续的鞅, t^* 是一个满足 $t^* > t$ 的有界停时, 则 (Lamberton and Lapeyre, 1996, 第二章)

$$E[M_{t^*} | \mathcal{F}_t] = M_t.$$

对任意停时 $t^*(t < t^* < T)$, 对线性互补方法的解 $P(S,t)$ 应用 Itô引理得到

$$\begin{aligned}
& e^{-rt^*} P(S_{t^*}, t^*) \\
= & e^{-rt} P(S,t) \\
& + \int_t^{t^*} e^{-ru} \left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r-q) S \frac{\partial}{\partial S} - r \right] P(S_u, u)\, du \\
& + \int_t^{t^*} e^{-ru} \sigma S \frac{\partial P}{\partial S}(S_u, u)\, dZ_u.
\end{aligned}$$

现在, 由变分不等式 (见式 (5.2.4)) 推导出的结果, 第一个积分里面的被积函数是非正的. 对第二个积分所示的鞅取期望, 根据选择样本理论得到

$$E_Q^t\left[\int_t^{t^*} e^{-ru}\sigma S\frac{\partial P}{\partial S}(S_u,u)\,dZ_u\right]=0,$$

从而导出

$$P(S,t)\geqslant\ E_Q^t[e^{-r(t^*-t)}P(S_{t^*},t^*)].$$

更进一步, 由于上述结论对任何停时都成立, 并且 $P(S_{t^*},t^*)\geqslant\max(X-S_{t^*},0)$, 于是有

$$\begin{aligned}P(S,t)&\geqslant\sup_{t\leqslant t^*\leqslant T}E_Q^t\left[e^{-r(t^*-t)}P(S_{t^*},t^*)\right]\\&\geqslant\sup_{t\leqslant t^*\leqslant T}E_Q^t[e^{-r(t^*-t)}\max(X-S_{t^*},0)].\end{aligned}\tag{5.2.11a}$$

另一方面, 如果取式 (5.2.10) 定义的 t^*_{opt} 为停时, 则对 t 和 t^*_{opt} 之间的 u , 因为在 t^*_{opt} 才第一次满足 $P(S_{t^*_{\text{opt}}},t^*_{\text{opt}})=\max(X-S_{t^*_{opt}})$, 可以看出 $P(S_u,u)$ 位于继续持有区域. 因此有

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial}{\partial S}-r\right]P(S_u,u)=0.$$

再次应用选择样本理论, 可以得到

$$E_Q^t\left[\int_t^{t^*_{\text{opt}}} e^{-ru}\sigma S\frac{\partial P}{\partial S}(S_u,u)\,dZ_u\right]=0.$$

综合上述结论, 可以看出式 (5.2.11a) 描述的 $P(S,t)$ 的下界在 $t^*=t^*_{\text{opt}}$ 达到, 其中

$$P(S,t)=E_Q^t\left[e^{-r(t^*_{\text{opt}}-t)}\max(X-S_{t^*_{\text{opt}}},0)\right].\tag{5.2.11b}$$

结合式 (5.2.11a), (5.2.11b) 可知, t^*_{opt} 是最佳停时, 从而也可以得出方程 (5.2.9), (5.2.10) 中的结果.

5.2.3 提前实施费用的积分表示

根据扩散过程控制理论, 美式看跌期权的价格如下 (严格证明参见文献 (Krylov, 1980)):

$$\begin{aligned}P(S,t)=&E_Q^t[e^{-r(T-t)}\max(X-S_T,0)]\\&+\int_t^T e^{-r(u-t)}E_Q^u\left[(rX-qS_u)\mathbf{1}_{\{S_u<S^*(u)\}}\right]du.\end{aligned}\tag{5.2.12a}$$

式 (5.2.12a) 第一项表示通常的欧式看跌期权价值, 第二项代表提前实施的费用. 在风险中性测度 Q 下, 用 $\psi(S_u;S)$ 表示当 $S_t=S$ 时 S_u 的转移密度函数, 则上述看跌期权的价格函数也可以如下表示:

$$P(S,t)=e^{-r(T-t)}\int_0^X (X-S_T)\psi(S_T;S)\,dS_T \\ +\int_t^T e^{-r(u-t)}\int_0^{S^*(u)}(rX-qS_u)\psi(S_u;S)\,dS_u\,du. \tag{5.2.12b}$$

提前实施费用一定是正数, 因为

$$rX-qS_u>0,\quad S_u<S^*(u)<\frac{rX}{q}.$$

1. 延迟实施的补偿金

下面将从直觉上论证提前实施费用可以被看成延迟实施的补偿金 (Jamshidian, 1992). 为了在到期日之前, 不管资产价格如何, 美式看跌期权都不被实施, 需要从看跌期权最佳实施时刻起, 给持有者连续的补偿现金流. 考虑 u 和 $u+du$ 之间的时段, 假设 S_u 落在了停止持有区域, 为了使美式看跌期权的持有者即使在实施期权是最佳时仍然同意不实施期权, 那么应该给他的补偿金为 $(rX-qS_u)\,du$. 这是因为如果他选择了实施看跌期权, 他就可以从敲定价的时间价值中得到利息 $rX\ du$, 而因为卖出资产损失了红利 $qS_u\,du$. 上述连续现金补偿金的贴现值的期望如下:

$$e^{-r(u-t)}\int_0^{S^*(u)}(rX-qS_u)\psi(S_u;S)\,dS_u.$$

将上面的贴现现金流从 $u=t$ 积分到 $u=T$ 就是美式看跌期权提前实施的费用, 而这正好是式 (5.2.12b) 的最后一项.

2. 价值匹配和平滑粘贴性条件

Carr 等 (1992) 利用动态交易策略给出了 P 和 $\dfrac{\partial P}{\partial S}$ 在最佳实施边界 $S^*(u)$ 上必须连续的金融解释. 在当前时刻 t 购买美式看跌期权后, 在 u 时刻, 只要资产价格跌至最佳实施价格 $S^*(u)$, 投资者将立即实施该份看跌期权, 而只要资产价格上升至 $S^*(u)$, 他将买回这份看跌期权. 由于将看跌期权转换成现金, 加上卖空资产和与之反向的这些交易都在提前实施边界发生, 所以为了确保这些交易是自融资的, 也就是说, 每次修改投资组合所需要的费用都来自于出售自己之前的头寸获得的收益, 要求 "价值匹配 "和 "平滑粘贴" 条件成立.

3. 美式看跌期权价格函数的解析表示

现在用距离到期日的时间 τ 作为最佳实施边界 $S^*(\tau)$ 的时间变量. 通过计算式 (5.2.12) 中的积分, 可以得出美式看跌期权的价格公式

$$\begin{aligned} P(S,\tau) = & Xe^{-r\tau}N(-d_2) - Se^{-q\tau}N(-d_1) \\ & + \int_0^\tau [rXe^{-r\xi}N(-d_{\xi,2}) - qSe^{-q\xi}N(-d_{\xi,1})]\,d\xi, \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

其中 $\tau = T - t$, 并且

$$d_1 = \frac{\ln\dfrac{S}{X} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

$$d_{\xi,1} = \frac{\ln\dfrac{S}{S^*(\tau-\xi)} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\xi}{\sigma\sqrt{\xi}}, \quad d_{\xi,2} = d_{\xi,1} - \sigma\sqrt{\xi}.$$

虚拟变量 ξ 可以看成是从当下时刻开始经过的时间. 相应地, $\xi = 0$ 和 $\xi = \tau$ 分别对应当下和到期日.

取利率 r 为零, 提前实施费用变为

$$-\int_0^\tau qSe^{-q\xi}N(-d_{\xi,1})\,d\xi.$$

容易看出, 这是一个非正数. 但提前实施费用必须非负. 为了满足这两个条件, 必须有

$$\int_0^\tau qSe^{-q\xi}N(-d_{\xi,1})\,d\xi = 0.$$

只有对所有的 ξ, $S^*(\xi) = 0$ 都成立时, 上述等式才会成立. 最佳实施价格为零意味着美式看跌期权永远不被实施. 当利率为零时, 通过提前实施期权获得敲定价时间价值的好处消失了. 在这种情况下由于失去了提前实施的权利, 美式看跌期权的价值和其相应的欧式期权的价值一样.

4. 最佳实施边界的积分方程

如果对看跌期权的价格公式 (5.2.13) 应用边界条件 $P(S^*(\tau),\tau) = X - S^*(\tau)$, 就可以得到 $S^*(\tau)$ 所满足的积分方程

$$\begin{aligned} X - S^*(\tau) = & Xe^{-r\tau}N(-\widehat{d}_2) - S^*(\tau)e^{-q\tau}N(-\widehat{d}_1) \\ & + \int_0^\tau [rXe^{-r\xi}N(-\widehat{d}_{\xi,2}) - qS^*(\tau)e^{-q\xi}N(-\widehat{d}_{\xi,1})]\,d\xi, \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

其中

$$\widehat{d_1} = \frac{\ln \dfrac{S^*(\tau)}{X} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad \widehat{d_2} = \widehat{d_1} - \sigma\sqrt{\tau},$$

$$\widehat{d}_{\xi,1} = \frac{\ln \dfrac{S^*(\tau)}{S^*(\tau-\xi)} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\xi}{\sigma\sqrt{\xi}}, \quad \widehat{d}_{\xi,2} = \widehat{d}_{\xi,1} - \sigma\sqrt{\xi}.$$

求解 $S^*(\tau)$ 需要知道 $S^*(\tau-\xi)(0<\xi\leqslant\tau)$ 的信息. 求解过程从 $S^*(0)$ 开始, 随着日历时间倒向积分 (即随着 τ 递增).

可以利用积分方程 (5.2.14) 求解极限情况 $\tau\to\infty$ 时的最佳实施价格 (见式 (5.1.20)). 用 $S_P^*(\infty)$ 表示永久美式看跌期权的最佳实施价格 $\lim\limits_{\tau\to\infty} S_P^*(\tau)$. 在方程 (5.2.14) 中取极限 $\tau\to\infty$, 注意到永久欧式看跌期权的价值为零, 于是得到

$$\begin{aligned} X - S_P^*(\infty) = \int_0^\infty & \left[rXe^{-r\xi} N\left(-\frac{r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\xi} \right) \right. \\ & \left. - qS_P^*(\infty)e^{-q\xi} N\left(-\frac{r-q+\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\xi} \right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

上述积分中的第一项和第二项可以被简化为

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-r\xi} N(-\rho\sqrt{\xi})\, d\xi &= -\frac{e^{-r\xi}}{r} N(-\rho\sqrt{\xi})\Big|_0^\infty - \frac{\rho}{2r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-\rho^2\xi/2}e^{-r\xi}}{\sqrt{\xi}}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+2r}}\right), \quad \rho = \frac{r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}, \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty e^{-q\xi} N(-\rho'\sqrt{\xi})\, d\xi = \frac{1}{2q}\left(1 - \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+2q}}\right), \quad \rho' = \frac{r-q+\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}.$$

将上述结果代入式 (5.2.15) 得到

$$X - S_P^*(\infty) = \frac{X}{2}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+2r}}\right) - \frac{S_P^*(\infty)}{2}\left(1 - \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+2q}}\right).$$

整理各项有

$$S_P^*(\infty) = \frac{1 + \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+2r}}}{1 + \dfrac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+2q}}} X = \frac{\mu_-}{\mu_- - 1} X, \quad (5.2.16)$$

其中 μ_- 由式 (5.1.20) 定义.

也可以在 $S^*(\tau)$上利用平滑粘贴性条件 $\dfrac{\partial P}{\partial S}(S^*(\tau),\tau)=-1$, 得到 $S^*(\tau)$ 的另一个积分方程. 对于式 (5.2.13) 中的各项对 S 求偏导数, 令 $S=S^*(\tau)$ 有

$$\begin{aligned}
0=&\ 1+\frac{\partial P}{\partial S}(S^*(\tau),\tau)\\
=&\ 1+\frac{\partial p}{\partial S}(S^*(\tau),\tau)\\
&+\int_0^\tau\left[rXe^{-r\xi}\frac{\partial}{\partial S}N(-d_{\xi,2})\Big|_{S=S^*(\tau)}-qe^{-q\xi}N(-d_{\xi,1})\Big|_{S=S^*(\tau)}\right.\\
&\left.-qSe^{-q\xi}\frac{\partial}{\partial S}N(-d_{\xi,1})\Big|_{S=S^*(\tau)}\right]d\xi\\
=&\ N(\widehat{d}_1)-\int_0^\tau\left[\frac{(r-q)e^{-q\xi}}{\sigma\sqrt{2\pi\xi}}e^{-\frac{\widehat{d}^2_{\xi,1}}{2}}+qe^{-q\xi}N(-\widehat{d}_{\xi,1})\right]d\xi.
\end{aligned}\tag{5.2.17}$$

还可以推导出最佳实施价格满足的不同形式的积分方程 (Little and Pant, 2000), 其中有些形式会使得研究最佳实施边界的性质更容易. 虽然不能直接求出这些积分方程的解析解, 但是可以用数值方法来求解. 在 5.3 节中, 将讨论用循环积分法来求解上述积分方程.

5. 美式看涨期权的价格函数的解析表示

与方程 (5.2.13) 给出的美式看跌期权价格类似, 美式看涨期权价格函数的解析表示如下:

$$\begin{aligned}
C(S,\tau)=&\ Se^{-q\tau}N(d_1)-Xe^{-r\tau}N(d_2)\\
&+\int_0^\tau\left[qSe^{-q\xi}N(d_{\xi,1})-rXe^{-r\xi}N(d_{\xi,2})\right]d\xi.
\end{aligned}\tag{5.2.18}$$

令 $C(S^*_C(\tau),\tau)=S^*_C(\tau)-X$, 可以类似地推导其提前实施边界 $S^*_C(\tau)$ 满足的积分方程, 即

$$\begin{aligned}
S^*_C(\tau)-X=&\ S^*_C(\tau)e^{-q\tau}N(\widehat{d}_1)-Xe^{-r\tau}N(\widehat{d}_2)\\
&+\int_0^\tau[qS^*(\tau)e^{-q\xi}N(\widehat{d}_{\xi,1})-rXe^{-r\xi}N(\widehat{d}_{\xi,2})]\,d\xi.
\end{aligned}\tag{5.2.19}$$

类似地, 在方程 (5.2.19) 中取极限, 也可以推导出相应的美式看涨期权提前实施边界的渐近上界 (见习题 5.22).

5.2.4 美式障碍期权

美式障碍期权是具有提前实施特权的障碍期权. 例如, 当资产价格跌破下降障碍值时, 美式下降敲出看涨期权失效, 或者由于持有者选择最佳提前实施, 该期权被提前终止. 与通常的美式期权类似, 具有敲出障碍的美式期权价值可以被分解成欧式障碍期权的价值与提前实施费用之和. 在本小节中, 将推导美式下降敲出看涨期权的价格公式, 并且研究它的一些性质. (注意: 给具有敲入障碍的美式期权定价要复杂得多, 这是因为具有敲入特征的敲入激发区域可能与标的美式期权的停止持有区域相交. 对于具有敲入障碍的美式期权的定价模型参见文献 (Dai and Kwok, 2004b) (也可见习题 5.26).)

在美式下降敲出看涨期权模型中, 假设原生资产具有常数分红率 q, 常数下降障碍值 B, 并且满足 $B < X$. 如果期权失效时没有退款, 则美式下降敲出看涨期权的价格函数 $C_B(S,\tau;X,B)$ 为

$$
\begin{aligned}
C_B(S,\tau;X,B) = {} & e^{-r\tau}E_Q^t\left[\max(S_T - X, 0)\mathbf{1}_{\{m_t^T > B\}}\right] \\
& + \int_t^T e^{-ru}E_Q^u\left[(qS_u - rX)\mathbf{1}_{\{m_t^u > B,(S_u,u)\in\mathcal{S}\}}\right]du,
\end{aligned} \tag{5.2.20}
$$

其中 m_t^u 为时段 $[t,u]$ 内资产价格的最小值, $\tau = T - t$, $\mathcal{S}$ 表示停止实施区域. 第一项给出了欧式下降敲出障碍期权的价值, 第二项代表美式下降敲出看涨期权的提前实施费用. 只有当 (S_u,u) 位于停止实施区域 $\mathcal{S}$ 内, 并且障碍期权没有被敲出时, 才会得到延迟实施的补偿. 为了计算期望, 需要用到受限制的 (具有下降吸收障碍 B) 资产价格过程的转移密度函数. 在进行积分运算之后, 提前实施费用 $e_C(S,\tau;B)$ 可以表示为

$$
\begin{aligned}
e_C(S,\tau;B) = \int_0^\tau \Bigg\{ & K_C(S,\tau;S^*(\tau-\omega),\omega) \\
& - \left(\frac{S}{B}\right)^{\delta+1} K_C\left(\frac{B^2}{S},\tau;S^*(\tau-\omega),\omega\right)\Bigg\}d\omega,
\end{aligned} \tag{5.2.21}
$$

其中 $\delta = 2(q-r)/\sigma^2$, $S^*(\tau)$ 为美式下降敲出看涨期权的最佳实施边界, 当资产价格比它高时, 应该实施期权. K_C 的解析表达式为

$$
K_C(S,\tau;S^*(\tau-\omega),\omega) = qSe^{-q\omega}N(d_{\omega,1}) - rXe^{-r\omega}N(d_{\omega,2}), \tag{5.2.22}
$$

其中

$$
d_{\omega,1} = \frac{\ln\dfrac{S}{S^*(\tau-\omega)} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\omega}{\sigma\sqrt{\omega}}, \quad d_{\omega,2} = d_{\omega,1} - \sigma\sqrt{\omega}.
$$

从数学上可以证明

$$K_C(S,\tau;S^*(\tau-\omega),\omega) > \left(\frac{S}{B}\right)^{\delta+1} K_C\left(\frac{B^2}{S},\tau;S^*(\tau-\omega),\omega\right) > 0. \tag{5.2.23}$$

这与直觉相一致, 提前实施费用由于存在障碍值而减小了, 并且它永远是正数. 虽然当 $q=0$ 时, 可以看出 $e_C(S,\tau)$ 变成负数, 但是提前实施费用必须非负, 所以这一项实际上为零. 这可以通过对 $0\leqslant\omega\leqslant\tau$ 取 $S^*(\tau-\omega)\to\infty$ 实现. 即使具有嵌入的障碍特征, 当原生资产不分红时, 美式看涨期权仍然是永远不会被实施的.

下面研究障碍值和退款对提前实施策略的影响. 具有敲出障碍的美式期权的其他性质可参见文献 (Gao et al., 2000).

障碍值对提前实施策略的影响

从直觉上来看, 美式下降敲出看涨期权的最佳实施价格 $S^*(\tau;B)$ 应该随着障碍值 B 的增加而下降. 对于具有正收益的美式下降敲出看涨期权, 当障碍值较高时, 因为资产价格跌到障碍值之下的不利概率增大, 所以持有者应该考虑在一个较低的最佳实施价格时就实施期权.

下面将给出对于上述直觉判断的半严格的解释. 因为具有较低障碍值的美式下降敲出看涨期权的价格曲线总是高于具有较高障碍值的同类期权的价格曲线, 所以它与内在价值直线 $C=S-X$ 在一个较高的最佳实施价格相切 (图 5.7). 因此, $S^*(\tau;B)$ 是 B 的递减函数.

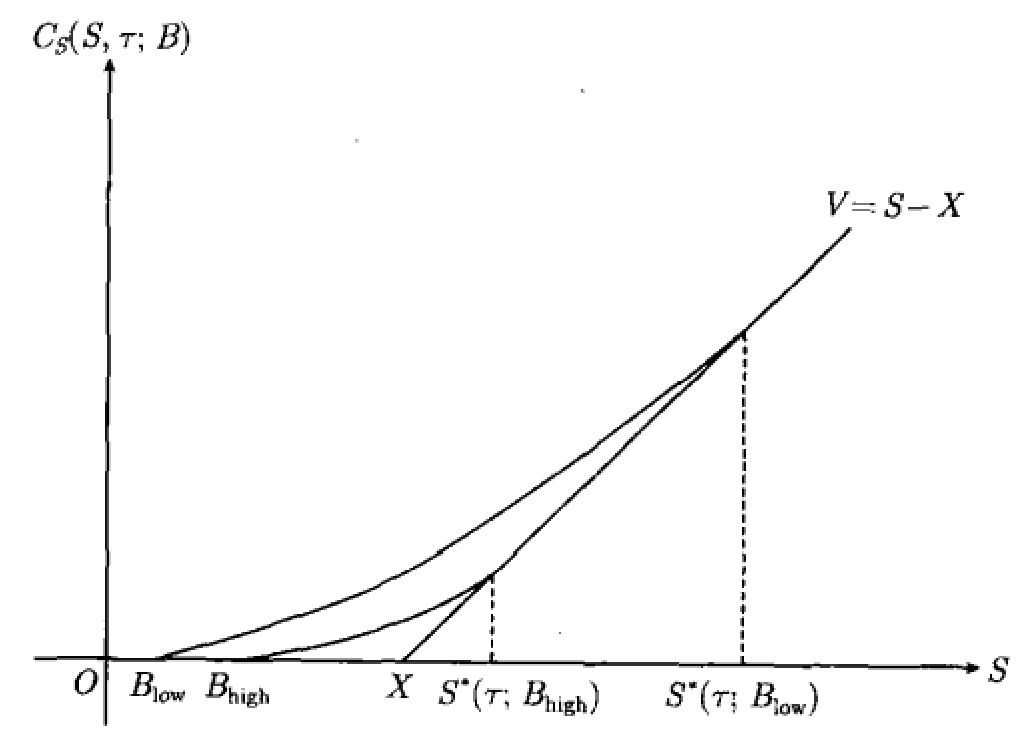


图 5.7 具有较低障碍值 B_{low} 的美式下降敲出看涨期权的价格曲线总是高于具有较高障碍值 B_{high} 的同类期权的价格曲线

退款对提前实施策略的影响

如果存在退款, 则资产价格跌到障碍值之下的不利影响被减弱, 因此, 美式下降敲出看涨期权的持有者会选择在一个较高的资产价格水平选择最优的实施期权.

在数学上, 可以证明具有退款的美式下降敲出看涨期权的价格曲线会高于没有退款的同类期权的价格曲线, 所以它与内在价值直线 $C = S - X$ 在一个较高的最佳实施价格相切. 因此, 最佳实施价格是退款额的递增函数.

5.2.5 美式回望期权

对于各种类型具有有限到期日的美式回望期权的最佳实施策略的研究至今仍然是个棘手的问题. 关于这个问题的一些理论结果可以参见 Dai 和 Kwok (2004c, 2005b, 2005c, 2006) 的一系列文献. 在本小节中, 研究一种特殊类型的具有回望收益的永久美式期权, 称之为"俄罗斯式期权".

以资产为标的的俄罗斯式期权合约保证当期权持有者实施期权时, 能够得到资产价格演化路径中直到实施时刻的历史最大值. 持有者可以选择在任何时刻提前实施俄罗斯式期权. 用 M 表示资产价格演化历程中的历史最大值 (回望时期的起始点对永久期权无关紧要) , 用 S 表示资产价格, 这两个量都取在同一时刻. 因为这是一个永久期权, 所以期权价值与时间无关. 用 $V = V(S, M)$ 表示期权价值, 用 S^* 表示俄罗斯式期权的最佳实施价格. 当资产价格足够低时, 实施俄罗斯式期权来获得 M 美元比持有期权继续等待更具吸引力. 因此, 当 $S^* < S \leqslant M$ 时, 俄罗斯式期权被继续持有; 当 $S \leqslant S^*$ 时, 期权被实施. 实施俄罗斯式期权的收益为

$$V(S^*, M) = M. \tag{5.2.24}$$

正如美式期权, 当俄罗斯式期权被持有时, 其价值总是高于它的实施收益.

假设资产具有连续分红率 $q(q \geqslant 0)$, 特殊情况 $q = 0$ 将在后面讨论. 通过去掉 Black-Scholes 方程中的对时间求导那一项, 俄罗斯式期权模型的方程如下:

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad S^* < S < M. \tag{5.2.25}$$

在 $S = S^*$ 处的边界条件见方程 (5.2.24). 在 4.2 节中, 已经解释了当 $S = M$ 时, 回望期权的价值与 M 无关. 因此, 另一个边界条件如下:

$$\frac{\partial V}{\partial M} = 0, \quad S = M. \tag{5.2.26}$$

选择最佳实施价格 S^*, 使得期权价值在所有可能的 S^* 中取最大值. 为了得到方程和边界条件更为简洁的形式, 采用自相似变量代换

$$W = V/M, \quad \xi = S/M. \tag{5.2.27}$$

使用新的自相似变量, 俄罗斯式期权的价格满足方程

$$\frac{\sigma^2}{2} \xi^2 \frac{d^2 W}{d\xi^2} + (r - q) \xi \frac{dW}{d\xi} - rW = 0, \quad \xi^* < \xi < 1, \tag{5.2.28}$$

其中 $W = W(\xi)$, $\xi^* = S^*/M$. 边界条件变为

$$\frac{dW}{d\xi} = W, \quad \xi = 1, \tag{5.2.29a}$$

$$W = 1, \quad \xi = \xi^*. \tag{5.2.29b}$$

首先, 用 ξ^* 来求解期权价值, 然后再确定 ξ^*, 使得期权价值最大化. 通过将可能的形式解 $A\xi^\lambda$ 代入方程 (5.2.28), 可以看到, λ 必须满足下面的二次方程:

$$\frac{\sigma^2}{2}\lambda(\lambda - 1) + (r - q)\lambda - r = 0. \tag{5.2.30}$$

方程 (5.2.30) 的两个根分别为

$$\lambda_\pm = \frac{1}{\sigma^2}\left[-(r-q) + \frac{\sigma^2}{2} \pm \sqrt{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r}\right],$$

其中 $\lambda_+ > 0$. $\lambda_- < 0$. 方程 (5.2.28) 的通解为

$$W(\xi) = A_+\xi^{\lambda_+} + A_-\xi^{\lambda_-}, \quad \xi^* < \xi < 1,$$

其中 A_+ 和 A_- 为任意常数. 运用边界条件 (5.2.29a),(5.2.29b), $W(\xi)$ 的解为

$$W(\xi) = \frac{(1-\lambda_-)\xi^{\lambda_+} - (1-\lambda_+)\xi^{\lambda_-}}{(1-\lambda_-)\xi^{*\lambda_+} - (1-\lambda_+)\xi^{*\lambda_-}}, \quad \xi^* \leqslant \xi \leqslant 1. \tag{5.2.31}$$

由微积分原理可知, $W(\xi)$ 的最大值在 ξ^* 的取值为

$$\xi^* = \left[\frac{\lambda_+(1-\lambda_-)}{\lambda_-(1-\lambda_+)}\right]^{1/(\lambda_- - \lambda_+)} \tag{5.2.32}$$

时达到.

除了上述的微分方程方法, 也可以利用鞅定价方法来得到俄罗斯式期权的价格公式. 有兴趣的读者可以参见文献 (Shepp and Shiryaev, 1993; Gerber and Shiu, 1994) 中的详细说明.

不分红的原生资产

当 $q = 0$ 时, 俄罗斯式期权的价格函数又有怎样的性质呢? 现在, 两个根分别为 $\lambda_+ = 1$ 和 $\lambda_- = -\frac{2r}{\sigma^2}$. $W(\xi)$ 的解简化为

$$W(\xi) = \frac{\xi}{\xi^*}, \quad \xi^* \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{5.2.33}$$

当 ξ^* 取值为零时, 它的值最大. 当原生资产不分红时, 俄罗斯式期权的价值变为无穷. 你能从金融意义上来解释这个结果吗?

5.3　解析近似方法

除了一些特殊情况, 如原生资产不分红或离散分红的美式看涨期权, 或者永久美式期权, 大多数类型的具有有限到期日的美式期权都不存在解析的价格公式. 在本节中, 将介绍三种有效的解析近似方法来给美式期权定价, 并且确定它们的最佳实施边界.

复合期权近似方法(compound option approximation method) 是将美式期权作为复合期权处理, 这种方法将最佳实施的机会集合限制于一些离散时间, 而不是在期权有效期的任何时刻. 在复合期权方法的近似公式中, 需要计算多重正态积分, 其维数等于允许实施机会的数量. 已经知道, 可以用最佳实施边界的积分形式来表示提前实施费用. 这样自然可以推得最佳实施边界满足的积分方程. **循环积分方法**(recursive integration method) 通过循环迭代来研究积分方程的直接解. 迭代算法只涉及一维积分的计算. 即使只在最佳实施边界上取少数几个点, 外推法, 复合期权方法和循环积分方法的数值精确度都可以得到有效的提高. **二次近似方法**(quadratic approximation method) 通过对 Black-Scholes 方程作一个巧妙的变形, 使得时间导数那一项可以被当成一个二次高阶项, 从而可以近似地被忽略. 一旦得到了一个近似的常微分方程, 就只需要确定一个最佳实施点, 而不需要像在最初的偏微分方程方法中那样, 求出整条最佳实施边界.

通常可以看到, 美式期权的价值对于最佳实施边界的位置不太敏感. 这可以解释为什么即使只是估计了最佳实施边界上的少数几个点, 用上述解析近似方法计算美式期权还是相当准确的. 求解这些解析近似的公式通常需要使用计算机, 其中一些甚至需要更多的数值方法, 如积分的数值近似、迭代法和外推法. 但是, 这些方法不同于直接的数值方法, 如二叉树方法、有限差分方法、蒙特卡罗模拟法 (这些数值方法将在下章作详细讨论). 在推导解析近似方法的过程中, 我们首先深入地研究美式期权模型的解析性质, 然后利用巧妙的近似来降低问题的复杂度.

5.3.1　复合期权近似方法

美式期权合约通常允许持有者在到期日之前的任何时刻都可以提前实施期权. 但是, 通过将提前实施的特权限制在当下和到期日之间的一些事先确定的时刻, 美式期权就与一份复合期权类似. 这样就可以得到相应的解析价格公式. 当允许实施时刻的数量趋于无穷时, 近似价格公式将会收敛到美式期权的价格公式, 因为这时候还原了允许连续实施美式期权的性质.

首先, 推导原生资产不分红, 具有若干次允许实施时刻的美式看跌期权的价格公式, 这里提前实施只允许发生在距离到期日一半的时刻. 记当前时刻为零, 到期

日为 T. 用 $S_{T/2}$ 和 S_T 分别表示资产在 $T/2$ 和 T 时刻的价格. 从 $T/2$ 至到期日, 期权就像一份普通的欧式期权, 因为这时持有者没有提前实施的特权. 确定 $T/2$ 时刻的临界资产价格 $S^*_{T/2}$, 使得在资产价格为 $S^*_{T/2}$ 时实施或者不实施看跌期权没有区别. 相应地, 通过求解下面的非线性代数方程可以得到 $S^*_{T/2}$:

$$p(S^*_{T/2}, T/2; X) = X - S^*_{T/2}, \tag{5.3.1}$$

其中 X 为看跌期权的敲定价, $p(S^*_{T/2}, T/2; X)$ 为在 $\tau = T/2$ 时刻欧式看跌期权的 Black-Scholes 价格.

当 $S_{T/2} \leqslant S^*_{T/2}$ 时, 看跌期权将被实施, 实施收益为 $X - S_{T/2}$. 而 $X - S_{T/2}$ 在条件 $S_{T/2} \leqslant S^*_{T/2}$ 下的贴现期望为

$$\begin{aligned} & e^{-rT/2} \int_0^{S^*_{T/2}} (X - S_{T/2}) \psi(S_{T/2}; S) \, dS_{T/2} \\ &= Xe^{-rT/2} N(-d_2(S, S^*_{T/2}; T/2)) - SN(-d_1(S, S^*_{T/2}; T/2)), \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

其中

$$d_1(S_1, S_2; T) = \frac{\ln \dfrac{S_1}{S_2} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2(S_1, S_2; T) = d_1(S_1, S_2; T) - \sigma\sqrt{T},$$

$\psi(S_{T/2}; S)$ 为转移密度函数. 另一方面, 当 $S_{T/2} > S^*_{T/2}$ 时, 看跌期权被持有至到期日. 在到期日, 只有当 $S_T < X$ 时, 它才被实施. 当 $S_{T/2} > S^*_{T/2}$, $S_T < X$ 时, $X - S_T$ 的贴现期望为

$$\begin{aligned} & e^{-rT} \int_{S^*_{T/2}}^{\infty} \int_0^X (X - S_T) \psi(S_T; S_{T/2}) \psi(S_{T/2}; S) \, dS_T dS_{T/2} \\ &= Xe^{-rT} N_2 \left(d_2(S, S^*_{T/2}; T/2), -d_2(S, X; T); -1/\sqrt{2} \right) \\ &\quad - SN_2 \left(d_1(S, S^*_{T/2}; T/2), -d_1(S, X; T); -1/\sqrt{2} \right). \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

注意: 在 $[0, T/2]$ 和 $[0, T]$ 上, 布朗运动的重叠增量之间的相关系数为 $1/\sqrt{2}$. 具有两个允许实施时刻 $T/2$ 和 T 的看跌期权价格为两个期望积分的和. 因此有

$$\begin{aligned} P_2(S, X; T) = {} & Xe^{-rT/2} N(-d_2(S, S^*_{T/2}; T/2)) - SN(-d_1(S, S^*_{T/2}; T/2)) \\ & + Xe^{-rT} N_2 \left(d_2(S, S^*_{T/2}; T/2), -d_2(S, X; T); -1/\sqrt{2} \right) \\ & - SN_2 \left(d_1(S, S^*_{T/2}; T/2), -d_1(S, X; T); -1/\sqrt{2} \right). \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

同理, 可以推导具有 N 个允许实施时刻 (不需要均匀分布) 的推广后的情况也成立 (见习题 5.30).

用 P_n 表示具有 n 个允许实施时刻的美式看跌期权的价值. 希望序列 P_1, $P_2, \cdots, P_n, \cdots$ 的极限成为美式看跌期权的价值. 可以根据这个序列的前几项, 利用加速技巧以外推极限. Geske 和 Johnson (1984) 提出了下面这个当 $n=3$ 时的 Richardson 外推方法:

$$P \approx \frac{9P_3 - 8P_2 + P_1}{2}. \tag{5.3.5}$$

从他们的数值试验可以判断, 在大多数情况下, 外推公式 (5.3.5) 具有相当高的准确性. 通过放松对允许实施时刻必须均匀分布的要求, 以寻求最适当的允许实施时刻使得近似看跌期权的价值最大化, 这样可以达到更高的准确性 (Bunch and Johnson, 1992).

5.3.2　积分方程的数值解

在美式看跌期权最佳实施边界所满足的积分方程中 (见方程 (5.2.19)), 变量 τ 同时出现在被积函数和积分上限中. 对于一个给定的 τ, 可以使用循环方法求解这个积分方程. 在数值计算过程中, 所有积分都按照梯形法则作近似. 首先, 将 τ 进行 n 等分, 节点为 $\tau_i(i=0,1,\cdots,n)$, 其中 $\tau_0=0, \tau_n=\tau$, $\Delta\tau=\tau/n$. 为简便起见, 将被积函数记作

$$f(S^*(\tau), S^*(\tau-\xi); \tau, \xi) = rXe^{-r\xi}N(-\widehat{d}_{\xi,2}) - qS^*(\tau)e^{-q\xi}N(-\widehat{d}_{\xi,1}), \tag{5.3.6}$$

其中

$$\widehat{d}_{\xi,1} = \frac{\ln \dfrac{S^*(\tau)}{S^*(\tau-\xi)} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\xi}{\sigma\sqrt{\xi}}, \quad \widehat{d}_{\xi,2} = \widehat{d}_{\xi,1} - \sigma\sqrt{\xi}.$$

用 S_i^* 表示 $S^*(\tau_i)(i=0,1,\cdots,n)$ 的数值近似值. 在积分方程中, 令 $\tau=\tau_1$, 积分的近似值为

$$\begin{aligned} &\int_0^{\tau_1} \left[rXe^{-r\xi}N(-\widehat{d}_{\xi,2}) - qS^*(\tau)e^{-q\xi}N(-\widehat{d}_{\xi,1})\right] d\xi \\ \approx\ & \frac{\Delta\tau}{2}\left[f(S_1^*, S_1^*; \tau_1, \tau_0) + f(S_1^*, S_0^*; \tau_1, \tau_1)\right], \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

于是得到 S_1^* 满足的非线性代数方程

$$X - S_1^* = p(S_1^*, \tau_1) + \frac{\Delta\tau}{2}\left[f(S_1^*, S_1^*; \tau_1, \tau_0) + f(S_1^*, S_0^*; \tau_1, \tau_1)\right]. \tag{5.3.8}$$

因为已知 S_0^* 为 $\min\left(X, \dfrac{r}{q}X\right)$, 所以可以通过任何一种求根方法解出 S_1^*. 一旦求

出了 S_1^*, 再令 $\tau=\tau_2$, 在区间 (τ_0,τ_1) 和 (τ_1,τ_2) 上估计积分值. S_2^* 满足非线性代数方程

$$X-S_2^*=p(S_2^*,\tau_2)+\frac{\Delta\tau}{2}[f(S_2^*,S_2^*;\tau_2,\tau_0)+2f(S_2^*,S_1^*;\tau_2,\tau_1)\\+f(S_2^*,S_0^*;\tau_2,\tau_2)]. \tag{5.3.9}$$

可以递归推导得出 $S_k^*(k=2,3,\cdots,n)$ 所满足的代数方程为 (Huang et al., 1996)

$$X-S_k^*=p(S_k^*,\tau_k)+\frac{\Delta\tau}{2}\left[f\ (S_k^*,S_k^*;\tau_k,\tau_0)+f(S_k^*,S_0^*;\tau_k,\tau_k)\right.\\\left.+2\sum_{i=1}^{k-1}f(S_k^*,S_{k-i}^*;\tau_k,\tau_i)\right],\quad k=2,3,\cdots,n. \tag{5.3.10}$$

这样就可以依次求出 $S_k^*(k=1,2,\cdots,n)$. 选择足够大的 n , 就可以求得所需要精度的最佳实施边界 $S^*(\tau)$ 的近似值.

一旦知道了 $S_k^*(k=1,2,\cdots,n)$, 美式看跌期权的价值就可以近似地表示为

$$P(S,\tau)\approx P_n=p(S,\tau)+\frac{\Delta\tau}{2}\left[f\ (S,S_n^*;\tau_n,\tau_0)+f(S,S_0^*;\tau_n,\tau_n)\right.\\\left.+2\sum_{i=1}^{n-1}f(S,S_{n-i}^*;\tau_n,\tau_i)\right], \tag{5.3.11}$$

其中 $\tau=\tau_n$. 显然, 当 n 趋于无穷时, P_n 的极限为 $P(S,\tau)$. 同复合期权近似方法类似, 也可以应用下面的外推格式:

$$P(S,\tau)\approx\frac{9P_3-8P_2+P_1}{2}, \tag{5.3.12}$$

其中 P_n 的定义见方程 (5.3.11). 因为只涉及一维积分, 所以循环积分法的数值计算过程比复合期权近似方法要简单得多. 不同类型的对美式期权价值进行数值计算的更有效的数值方法已经出现在一些文献中. 例如, Ju (1998) 提出用组合式的指数函数对最佳实施边界作近似来对美式期权定价. 因为可以用组合式指数函数的底数和指数来表示出闭合解公式, 这种方法具有实施便捷的优点.

循环积分法的一个优点就是**不需太复杂的运算**就可以有效地确定美式期权价值的 Greeks. 例如, 美式期权价格的 delta 值就可以如下表示 (见习题 5.20):

$$\Delta=\frac{\partial P}{\partial S}=-N(-d_1)-\int_0^\tau\left[\frac{(r-q)e^{-q\xi}}{\sigma\sqrt{2\pi\xi}}e^{-\frac{d_{\xi,1}^2}{2}}+qe^{-q\xi}N(-d_{\xi,1})\right]d\xi. \tag{5.3.13}$$

根据梯形法则, 对上述积分作近似, 容易推导 Δ 的数值近似值如下:

$$\begin{aligned}\Delta \approx \Delta_n = &-N(-d_1) - \frac{\Delta\tau}{2}\Bigg[g(S, S_n^*; \tau_n, \tau_0) + g(S, S_0^*; \tau_n, \tau_n)\\ &+ 2\sum_{i=1}^{n-1} g(S, S_{n-i}^*; \tau_n, \tau_i)\Bigg],\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

其中

$$g(S, S^*(\tau-\xi); \tau, \xi) = \frac{(r-q)e^{-q\xi}}{\sigma\sqrt{2\pi\xi}} e^{-\frac{d_{\xi,1}^2}{2}} + qe^{-q\xi}N(-d_{\xi,1}),$$

$$d_{\xi,1} = \frac{\ln\dfrac{S}{S^*(\tau-\xi)} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\xi}{\sigma\sqrt{\xi}}.$$

5.3.3 二次近似方法

不分红股票期权的二次近似方法是由 MacMillan (1986) 首先提出的, 之后, 被 Barone-Adesi 和 Whaley (1987) 推广到了商品期权. 这种方法对于美式期权的定价具有非常好的准确度, 尤其是对于那些具有较短有效期的期权.

当商品的持有成本为常数 b, 无风险利率为 r 时, 商品期权的价格满足下面的方程:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + bS\frac{\partial V}{\partial S} - rV, \tag{5.3.15}$$

其中 σ 为资产价格的常数波动率. 研究原生资产是商品的美式看涨期权, 定义提前实施期权金为

$$e(S,\tau) = C(S,\tau) - c(S,\tau).$$

在继续持有区域, 方程 (5.3.15) 对 $C(S,\tau)$ 和 $c(S,\tau)$ 都成立. 因为微分方程是线性的, 所以这个方程对 $e(S,\tau)$ 同样成立. 记 $k_1 = 2r/\sigma^2$, $k_2 = 2b/\sigma^2$, 定义

$$e(S,\tau) = K(\tau)f(S,K),$$

其中 $K(\tau)$ 待定. 这样, 方程 (5.3.15) 可以转化为下面的形式:

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + k_2 S\frac{\partial f}{\partial S} - k_1 f\left[1 + \frac{\dfrac{dK}{d\tau}}{rK}\left(1 + \frac{K\dfrac{\partial f}{\partial K}}{f}\right)\right] = 0. \tag{5.3.16}$$

明智地选取 $K(\tau)$ 为

$$K(\tau) = 1 - e^{-r\tau},$$

则方程 (5.3.16) 变为

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+k_2S\frac{\partial f}{\partial S}-\frac{k_1}{K}\left[f+(1-K)K\frac{\partial f}{\partial K}\right]=0. \tag{5.3.17}$$

注意：上面方程的最后一项含有因子 $(1-K)K$, 当 $\tau=0$ 和 $\tau\to\infty$ 时, 它变为零. 它在 $K=1/2$ 时取最大值 1/4. 如果去掉二次项 $(1-K)K\dfrac{\partial f}{\partial K}$, 则方程 (5.3.17) 就简化为一个常微分方程, 它的误差被二次项 $(1-K)K$ 的大小所控制. 这就是该近似方法名字的来历. f 的近似方程现在变成

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+k_2S\frac{\partial f}{\partial S}-\frac{k_1}{K}f=0, \tag{5.3.18}$$

这里假设 K 非零. 当 $K=0$ 时的特殊情况可以另外研究 (见习题 5.31).

如果把 K 看成一个参数, 则方程 (5.3.18) 为一个等量纲微分方程. $f(S)$ 的通解为

$$f(S)=c_1S^{q_1}+c_2S^{q_2}, \tag{5.3.19}$$

其中 c_1 和 c_2 为任意常数. q_1 和 q_2 是下列辅助方程的根:

$$q^2+(k_2-1)q-\frac{k_1}{K}=0. \tag{5.3.20}$$

求解二次方程 (5.3.20) 可以得到

$$q_1=-\frac{1}{2}\left[(k_2-1)+\sqrt{(k_2-1)^2+4\frac{k_1}{K}}\right]<0, \tag{5.3.21a}$$

$$q_2=\frac{1}{2}\left[-(k_2-1)+\sqrt{(k_2-1)^2+4\frac{k_1}{K}}\right]>0. \tag{5.3.21b}$$

方程 (5.3.19) 中的项 $c_1S^{q_1}$ 应该被舍去, 因为当 S 趋近 0 时, $f(S)$ 趋近 0. 这样, 美式看涨期权的近似价格 $\widetilde{C}(S,\tau)$ 为

$$C(S,\tau)\approx\widetilde{C}(S,\tau)=c(S,\tau)+c_2KS^{q_2}. \tag{5.3.22}$$

最后, 通过在临界资产价格 S^* 处满足的价值匹配条件 $\widetilde{C}(S^*,C(S^*,\tau)=S^*-X$, 可以确定常数 c_2. 但是, S^* 本身仍然是未知的. 通过平滑粘贴性条件可以给出在最佳实施边界处 S^* 满足的方程 $\dfrac{\partial\widetilde{C}}{\partial S}(S^*,\tau)=1$. 这两个条件一起构成了 c_2 和 S^* 所满足的方程组

$$S^*-X=c(S^*,\tau)+c_2KS^{*q_2}, \tag{5.3.23a}$$

$$1 = e^{(b-r)\tau}N(d_1(S^*)) + c_2 K q_2 S^{*q_2-1}, \tag{5.3.23b}$$

其中

$$d_1(S^*) = \frac{\ln\frac{S^*}{X} + \left(b + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

通过消去方程 (5.3.23a), (5.3.23b) 中的 c_2, 得到了 $S^*(\tau)$ 满足的非线性代数方程

$$S^* - X = c(S^*,\tau) + \left[1 - e^{(b-r)\tau}N(d_1(S^*))\right]\frac{S^*}{q_2}. \tag{5.3.24}$$

总结一下, 若 $b < r$, 则美式看涨商品期权价格的近似值可以表示为

$$\widetilde{C}(S,\tau) = c(S,\tau) + \frac{S^*}{q_2}\left[1 - e^{(b-r)\tau}N(d_1(S^*))\right]\left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_2}, \quad S < S^*, \tag{5.3.25}$$

其中 S^* 可以通过求解方程 (5.3.24) 得到. 方程 (5.3.25) 中的最后一项给出了提前实施费用的近似值, 它在 $b < r$ 时为正数; 当 $b \geqslant r$ 时, 美式看涨期权永远不会被提前实施 (见习题 5.2), 所以美式看涨期权的价格和同类的欧式期权价格相等.

5.4　具有自动重置权利的期权

嵌入在金融衍生产品中的重置权利是指给予持有者某些权利, 允许他根据某些规则重新设置合约里的某些条款. 重置可以针对敲定价, 或者衍生品的到期日, 或者两者. 在合约有效期内允许重置的次数可以不止一次. 通常需要满足一些事先确定的条件才允许触发一次重置. 当满足某些条件时, 重置可以被自动触发, 也可以由持有者自愿触发. 在本节中, 仅讨论具有敲定价重置权利的期权, 而且持有者可以选择最佳的重置时间, 将分析持有者会采用的**最佳重置策略**(optimal reset policies).

考虑具有敲定价重置权利的看跌期权, 其敲定价可以在重置时刻被重置为当时的资产价格. 用 X 表示期权生效时初始的敲定价, 用 S_{t^*} 和 S_T 分别表示在重置日 t^* 和到期日 T 的资产价格. 假设只允许重置一次, 那么如果在期权有效期内没有发生重置, 则重置看跌期权的到期日收益为 $\max(X - S_T, 0)$; 如果在 $t^* < T$ 发生重置, 到期日收益则变为 $\max(S_{t^*} - S_T, 0)$. 在被重置时, 可重置敲定价的看跌期权实际上变成了一份平价的看跌期权.

叫价期权同可重置敲定价的看跌期权关系密切. 考虑只有一次叫价权利的看涨式的叫价期权. 假设持有者已经选择在时刻 t^* 叫价, 那么就确保到期日收益的最小值为 $S_{t^*} - X$. 更准确地说, 如果持有者已经在到期日之前的 t^* 叫价, 则到期日收益为 $\max(S_T - X, S_{t^*} - X)$, 但是如果在期权有效期内没有叫价, 则到期日收益仍然为通常的看涨收益 $\max(S_T - X, 0)$. 下面将看到可以用可重置敲定价的看跌期

权和一份期货合约来复制叫价看涨期权, 所以可重置敲定价的看跌期权和它相应的叫价看涨期权遵从相同的最佳停止策略 (见方程 (5.4.11)).

另一个带有重置权利的例子是保底型指数基金具有的**叫底价** (shout floor) 特征. 从本质上, 叫底价的特征给予持有者在合约有效期内任何时刻获得一份平价看跌期权的权利. 在 5.4.1 小节中, 将介绍如何求得叫底价特征的价格的闭合解公式 (Dai et al., 2004a). 在股票挂钩养老金中也可以找到类似的基金保底的特征. 例如, 嵌入在投资基金内的动态基金保底就是提供了一个针对参考股指的保底值, 也就是投资者有权重置基金价值为参考股指的价值. 保底基金在基金有效期内允许进行若干次重置. 投资者可以选择最佳的重置时刻. 基金持有者也有权提前退出基金. 有关给动态保底基金中的重置权利和退出权利定价的具体细节请参见文献 (Chu and Kwok, 2004, 第四章).

在金融市场中存在着各种各样被嵌入重置特征的衍生工具. 例如, 加拿大分隔基金是一类被嵌入长期有效期担保的共同基金投资工具. 这些基金合约都包含多个重置期权, 这些重置期权允许持有者在合约有效期内重置保底值和到期日. 关于这些可重置敲定价和到期日的期权的最佳重置策略的详细分析请参见文献 (Dai and Kwok, 2005, 第三章).

5.4.1 叫底价特征的定价问题

指数基金里的叫价特征给予持有者在合约有效期内任何时间给基金回报设定一个底价的权利, 这里的底价设为叫价时刻 t^* 的指数价值 S_{t^*}. 叫价特征给予基金持有者一个指数基金的上涨潜力, 同时又保证指数回报具有一个保底值. 从本质上, 持有者在叫价时刻是拿到了一份平价的看跌期权. 由于回报具有保底值, 持有者就有权在合约到期日出售指数基金, 获得保底价值. 如果在合约有效期内都没有叫价, 则基金价值就变成零. 总之, 喊价的到期日收益为

$$\begin{cases} \max(S_{t^*} - S_T, 0), & \text{叫价}, \\ 0, & \text{不叫价}, \end{cases}$$

其中 S_{t^*} 和 S_T 分别为在叫价时刻 t^* 和到期日 T 的指数价值.

自由边界问题的描述

有趣的是, 在通常的 Black-Scholes 定价框架下, 可以得到叫价特征的闭合解价格公式. 跟往常一样, 在风险中性测度 Q 下, 假定指数价值 S_t 的随机过程服从一个几何布朗运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma\, dZ_t, \tag{5.4.1}$$

其中 r 和 q 分别为确定的无风险利率和分红率, σ 为确定的波动率.

用 $V(S,\tau)$ 表示叫价特征的价值. 在叫价时刻, 喊价权利被转换为一份平价欧式看跌期权的持有权. 平价看跌期权的价格函数关于 S 具有线性齐次性, 可以写为 $Sp^*(\tau)$. 将 Black-Scholes 看跌期权价格公式中的敲定价设定为当下的资产价格, 可以得到

$$p^*(\tau) = e^{-r\tau}N(-d_2^*) - e^{-q\tau}N(-d_1^*), \tag{5.4.2}$$

其中

$$d_1^* = \frac{r - q + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\tau}, \quad d_2^* = d_1^* - \sigma\sqrt{\tau}.$$

具喊价特征的自由边界问题的线性互补模型与美式期权具有相同的形式. 回想实施收益为 $Sp^*(\tau)$, 并且到期日收益为零, 可以推得 $V(S,\tau)$ 的线性互补模型

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + rV \geqslant 0, \qquad V \geqslant Sp^*(\tau),\\
&\left[\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + rV\right][V - Sp^*(\tau)] = 0,\\
&V(S,0) = 0.
\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

既然敲定价 X 没有出现在喊价权利收益中, 价格函数 $V(S,\tau)$ 关于 S 就具有线性齐次性. 于是可以有 $V(S,\tau) = Sg(\tau)$, 其中 $g(\tau)$ 待定. 将这一 $V(S,\tau)$ 的假定形式代入方程 (5.4.3), 得到 $g(\tau)$ 满足的下列变分不等式:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}g(\tau)\right] \geqslant 0, \quad g(\tau) \geqslant p^*(\tau),\\
&\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}g(\tau)\right][g(\tau) - p^*(\tau)] = 0,\\
&g(0) = 0.
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

$g(\tau)$ 解的形式依赖于函数 $e^{q\tau}p^*(\tau)$ 的解析性质. 可以看到, $e^{q\tau}p^*(\tau)$ 的导数具有如下性质:

(i) 如果 $r \leqslant q$, 则

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}p^*(\tau)\right] > 0, \quad \tau \in (0,\infty); \tag{5.4.5}$$

(ii) 如果 $r > q$, 则存在唯一的临界值 $\tau^* \in (0,\infty)$, 使得

$$\left.\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}p^*(\tau)\right]\right|_{\tau=\tau^*} = 0, \tag{5.4.6a}$$

并且

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}p^*(\tau)\right] > 0, \quad \tau \in (0,\tau^*), \tag{5.4.6b}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}p^*(\tau)\right] < 0, \quad \tau \in (\tau^*, \infty). \tag{5.4.6c}$$

上述性质的证明提示见习题 5.34 (也可参见文献 (Dai et al., 2004)). 两种情况 $r \leqslant q$ 和 $r > q$ 下 $e^{q\tau}p^*(\tau)$ 的图像如图 5.8 所示.

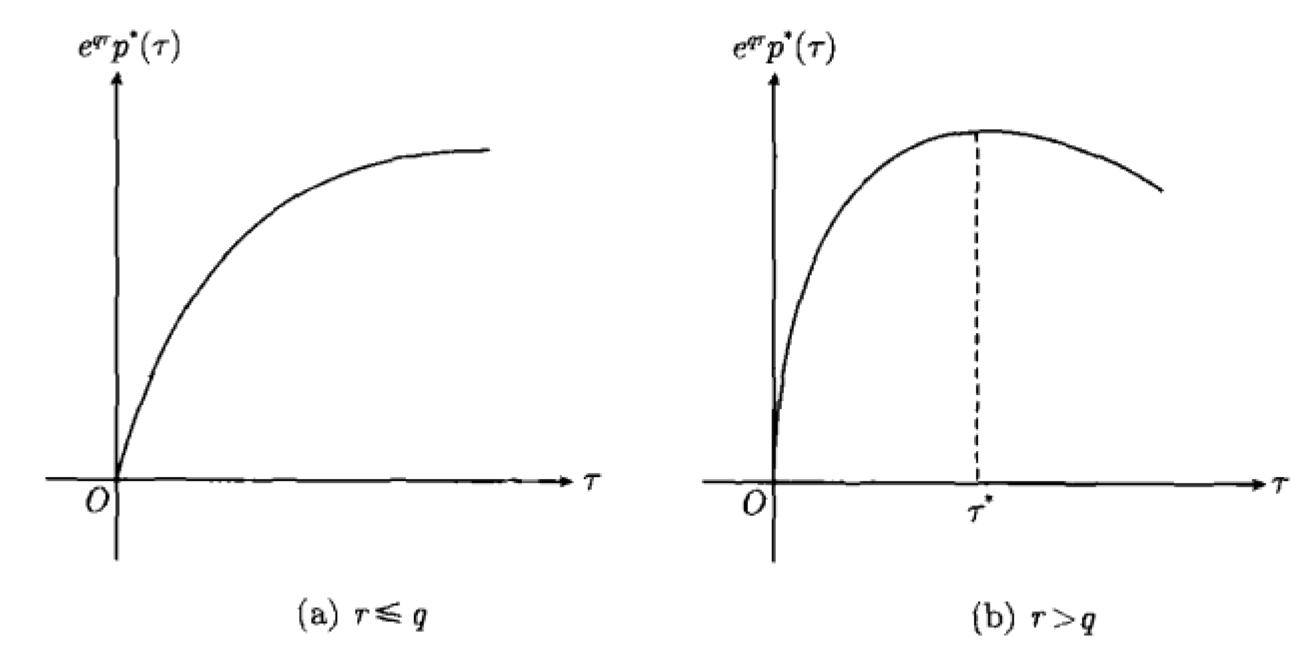


图 5.8 在 (a) $r \leqslant q$; (b) $r > q$ 两种情况下函数 $e^{q\tau}p^*(\tau)$ 的性质

喊价的价格函数 $V(S,\tau)$ 在 $r \leqslant q$ 和 $r > q$ 时具有不同的解析形式.

(i) $r \leqslant q$. 由方程 (5.4.5), $\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}p^*(\tau)\right]$ 对所有的 $\tau > 0$ 和 $p^*(0) = 0$ 都是严格大于零的. 可以推导出 $g(\tau)$ 的解为

$$g(\tau) = p^*(\tau), \quad \tau \in (0, \infty). \tag{5.4.7}$$

(ii) $r > q$. 由方程 (5.4.6b), (5.4.6c), 通过同样的方式可以得到

$$g(\tau) = p^*(\tau), \quad \tau \in (0, \tau^*]. \tag{5.4.8}$$

但是, 当 $\tau > \tau^*$ 时, 不能得出 $g(\tau) = p^*(\tau)$, 因为这会导致 $\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}g(\tau)\right] = \frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}p^*(\tau)\right] \geqslant 0$, 从而与方程 (5.4.6c) 的结果矛盾. 由方程 (5.4.4), 对所有的 $\tau \in (\tau^*, \infty)$ 有 $\frac{d}{d\tau}\left[e^{q\tau}g(\tau)\right] = 0$. 结合辅助条件 $g(\tau^*) = p^*(\tau^*)$, 推得解为

$$g(\tau) = e^{-q(\tau-\tau^*)}p^*(\tau^*), \quad \tau \in (\tau^*, \infty). \tag{5.4.9}$$

总之, 喊价持有者采取的最佳叫价策略取决于 r 和 q 的相对大小. 当 $r \leqslant q$ 时, 无论任何时刻、任何指数价值, 持有者都应该立即叫价来设定保底值; 当 $r > q$ 时, 存在一个临界时刻, 在此之前, 持有者叫价总不是最佳的. 一旦 τ 减小到临界值 τ^*, 无论指数价值如何, 持有者都应该立即叫价.

5.4.2　可重置敲定价格的看跌期权

嵌入在可重置敲定价看跌期权内的重置特征允许持有者选择一个重置时刻, 将初始敲定价重置为当时的资产价格. 可重置敲定价的看跌期权同喊价很相像, 因为当持有者重置时, 他拿到了一份平价的看跌期权, 但有一点不同, 即使在合约有效期内没有发生重置, 可重置敲定价的看跌期权仍然具有一个**初始敲定价**(initial strike price)X. 同方程 (5.4.3) 相似, 可重置敲定价的看跌期权的价格函数 $U(S,\tau)$ 的线性互补模型如下给出:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} - (r-q)S\frac{\partial U}{\partial S} + rU \geqslant 0, \quad U \geqslant Sp^*(\tau),$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} - (r-q)S\frac{\partial U}{\partial S} + rU\right][U - Sp^*(\tau)] = 0, \tag{5.4.10}$$

$$U(S,0) = \max(X-S,0).$$

同喊价不同, 可重置敲定价的看跌期权的到期日收益涉及初始敲定价 X. 现在, $U(S,\tau)$ 关于 S 不再具有线性齐次性. 只有当资产价格达到某个足够高的临界值 $S^*(\tau)$ 时, 持有者才应该叫价来设定一个新的敲定价. 显然, $S^*(\tau)$ 肯定要大于 X. 同美式期权模型类似, 最佳重置边界**事先**(prior) 也是未知的, 而是在求解上述自由边界问题的过程中被确定的. 同美式期权模型类似, 价格函数 $U(S,\tau)$ 满足价值匹配条件和平滑粘贴性条件, 即

$$U(S^*(\tau),\tau) = Sp^*(\tau), \tag{5.4.11a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S}(S^*(\tau),\tau) = p^*(\tau). \tag{5.4.11b}$$

$U(S,\tau)$ 关于 S 的图像如图 5.9 所示.

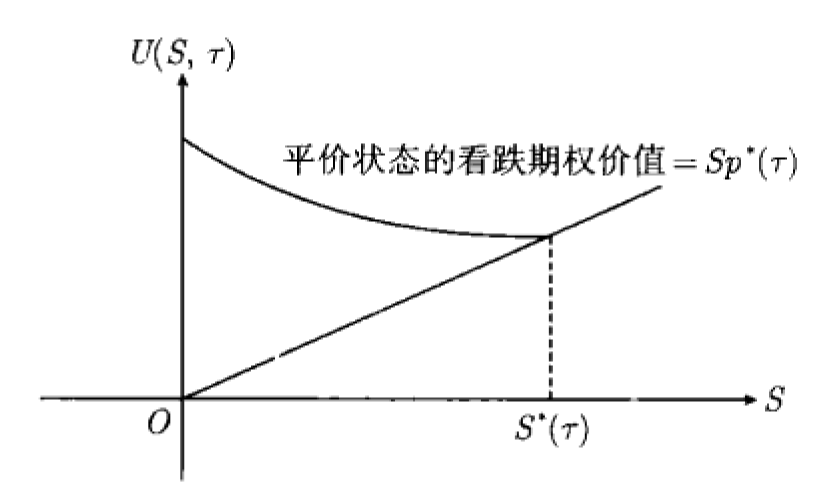


图 5.9　可重置敲定价的看跌期权的价格曲线与代表平价的看跌期权的直线相切于 $S=S^*(\tau)$

1. 可重置敲定价看跌期权和叫价看涨期权之间的平价关系

考虑一个包含一份可重置敲定价看跌期权和一份远期合约的投资组合. 两个衍生产品具有相同的到期日, 远期合约的价格同敲定价相同. 这份投资组合的到期日收益为

$$\begin{cases} \max(X - S_T, 0) + S_T - X = \max(S_T - X, 0), & \text{不发生重置}, \\ \max(S_{t^*} - S_T, 0) + S_T - X = \max(S_T - X, S_{t^*} - X), & \text{发生重置}, \end{cases}$$

其中 S_{t^*} 为重置时刻 t^* 的资产价格. 上述收益结构和叫价看涨期权的收益结构是相同的, 所以可以用一份可重置敲定价看跌期权和一份远期合约的投资组合来复制叫价看涨期权, 从而可重置敲定价看跌期权和叫价看涨期权具有相同的最佳重置或者叫价策略. 记 $W(S,\tau)$ 为叫价看涨期权的价格, 可重置敲定价的看跌期权和叫价看涨期权之间的平价关系即为

$$W(S,\tau) = U(S,\tau) + Se^{-q\tau} - Xe^{-r\tau}. \tag{5.4.12}$$

2. 最佳重置策略的特性

研究可重置敲定价看跌期权最佳重置边界 $S^*(\tau)$ 的特性, 特别是当 $\tau \to 0^+$ 和 $\tau \to \infty$ 时的渐近特性. 因为重置后新的敲定价肯定不低于初始的敲定价, 必须有

$$S^*(\tau) \geqslant X. \tag{5.4.13}$$

同美式看涨期权类似, 可重置敲定价看跌期权的 $S^*(\tau)$ 是 τ 的单调递增函数. 不同于美式看涨期权的是, 当 $\tau \to 0^+$ 时, $S^*(\tau)$ 的初始值总是 X , 而与 r 和 q 无关. 为了说明这个问题, 定义

$$D(S,\tau) = U(S,\tau) - Sp^*(\tau).$$

注意: 对所有的 S 和 τ, $D(S,\tau) \geqslant 0$. 在继续持有区域, $D(S,\tau)$ 满足

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 D}{\partial S^2} - (r-q)S\frac{\partial D}{\partial S} + rD = -S[p^{*\prime}(\tau) + qp^*(\tau)],$$
$$0 < S < S^*(\tau), \tau > 0. \tag{5.4.14}$$

回顾之前, $Sp^*(\tau)$ 是平价的看跌期权的价值. 若 $\tau \to 0^+$, 则 $\dfrac{\partial}{\partial \tau}[Sp^*(\tau)]$ 趋于负无穷. 因此, 当 $\tau \to 0^+$ 时有

$$-S[p^{*\prime}(\tau) + qp^*(\tau)] \to \infty.$$

假设 $S^*(0^+) > X$, $S \in (X, S^*(0^+))$. 当 $\tau \to 0^+$ 时, 可重置敲定价看跌期权的价值趋于它的实施价值. 因此有 $D(S,0^+) = 0$, 从而

$$\frac{\partial D}{\partial \tau}(S,0^+) = -S[p^{*\prime}(0^+) + qp(0^+)] < 0. \tag{5.4.15}$$

这意味着 $D(S,0^+)<0$, 而与对所有的 τ, $D(S,\tau)\geqslant 0$ 矛盾. 因此, 必须有 $S^*(0^+)\leqslant X$. 结合方程 (5.4.12), 于是得出结论 $S^*(0^+)=X$.

下面研究当 $\tau\to\infty$ 时 $S^*(\tau)$ 的渐近行为. 记 $W^\infty(S)=\lim\limits_{\tau\to\infty}e^{r\tau}U(S,\tau)$. $W^\infty(S)$ 存在需要 $\lim\limits_{\tau\to\infty}e^{r\tau}p^*(\tau)$ 存在. 可以证明当 $r\leqslant q$ 时有

$$\lim_{\tau\to\infty}e^{r\tau}p^*(\tau)=1, \tag{5.4.16}$$

而当 $r>q$ 时, 极限不存在. $W^\infty(S)$ 满足的微分方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2W^\infty}{dS^2}+(r-q)S\frac{dW^\infty}{dS}=0,\quad 0<S<S^*_\infty,\\ &W^\infty(0)=X,\quad W^\infty(S^*_\infty)=S^*_\infty,\quad \frac{dW^\infty}{dS}(S^*_\infty)=1.\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

解 $W^\infty(S)$ 有如下形式:

$$W^\infty(S)=A+BS^{1+\alpha},\quad \alpha=\frac{2(q-r)}{\sigma^2},$$

其中 A 和 B 为任意常数. 最佳重置边界 S^*_∞ 由平滑性粘贴条件确定 $\dfrac{dW^\infty}{dS}(S^*_\infty)=1$. $W^\infty(S)$ 的解为 (见习题 5.36)

$$W^\infty(S)=X+\frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}\frac{S^{1+\alpha}}{X^\alpha},\quad 0<S<S^*_\infty, \tag{5.4.18}$$

其中

$$S^*_\infty=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)X.$$

对所有的 $\tau>0$, 当 $r<q, S^*(\tau)$ 有定义且在 $\tau\to\infty$ 时存在极限 $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)X$. 特别地, 当 $r=q$ 时, S^*_∞ 变成无穷.

下面考虑当 $r>q$ 时的情况. 回顾当 $\tau>\tau^*$(τ^* 由方程 (5.4.6a) 确定) 时, 实施一个喊价权利总不是最优的. 由于可重置敲定价看跌期权比喊价权利价值要高, 而它们具有相同的实施收益, 所以当 $\tau>\tau^*$ 时, 实施可重置敲定价看跌期权总不是最优. 将可重置敲定价看跌期权的最佳重置边界记作 $S^*(\tau;X)$, 与敲定价 X 有关. 当 $X=0$ 时, 它等价于喊价权利, 这时 $S^*(\tau;0)$ 为零. 当 $X\to\infty$ 时, $S^*(\tau;\infty)$ 变成无穷, 因为当敲定价为无穷时, 在任何资产价格重置都不是最佳的. 当 X 有限且 $\tau<\tau^*$ 时, 可以证明 $S^*(\tau;X)$ 是有限的. 当 $\tau\to\tau^{*-}$ 时, $S(\tau;X)$ 变成无穷. 在图 5.10 中, 描述了 $S^*(\tau)$ 在 $r<q$ 和 $r>q$ 这两种情况下的性质. 关于可重置敲定价看跌期权定价特性更详细的讨论请参见文献 (Dai et al., 2004).

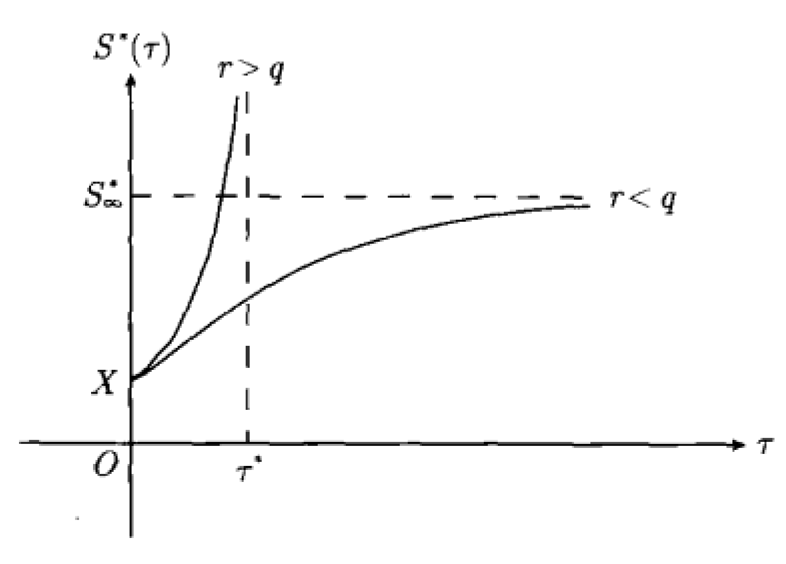


图 5.10 可重置敲定价的看跌期权的最佳重置边界 $S^*(\tau)$ 关于 τ 的图像, 若 $r<q$, 则 $S^*(\tau)$ 对所有 τ 都有定义, 极限 S^*_∞ 存在有限; 若 $r>q$, 则 $S^*(\tau)$ 只对 $\tau\in(0,\tau^*)$ 有定义

3. 可多次重置的看跌期权

考虑在期权有效期内可多次重置敲定价的看跌期权定价模型. 用 $U_n(S,\tau;X)$ 表示可重置敲定价 n 次的看跌期权的价格函数. 直到第 j 次重置时, 可重置敲定价看跌期权变为平价可重置敲定价 $j-1$ 次的看跌期权, 这时的敲定价等于重置时刻的资产价格. 记 t_j 为第 j 个重置的时间, S_j^* 为重置时刻 t_j^* 时的资产价格, 还剩余重置敲定价 j 次机会的看跌期权的敲定价记作 S_{j+1}^*. 为记号简便起见, 记 $S_{n+1}^*=X$. 显然, $S_{j+1}^*<S_j^*(j=1,2,\cdots,n)$, 并且对所有的 S 和 τ, $U_{j+1}(S,\tau;X)>U_j(S,\tau;X)$.

价格函数 $U_j(S,\tau;X)$ 关于 S 和 X 具有线性齐次性,

$$U_j(S,\tau;X)=XU_j\left(\frac{S}{X},\tau;1\right). \tag{5.4.19}$$

当可重置敲定价看跌期权处于平价状态时, $S/X=1$, 这使得

$$U_j(S,\tau;S)=SU_j(1,\tau;1).$$

记 $p_j(\tau)=U_j(1,\tau;1)(j=0,1,\cdots,n-1)$, 可重置敲定价 n 次的看跌期权定价模型的线性互补形式如下:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_n}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2U_n}{\partial S^2}-(r-q)S\frac{\partial U_n}{\partial S}+rU_n\geqslant 0,\quad U_n\geqslant Sp_{n-1}(\tau),\\
&\left[\frac{\partial U_n}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2U_n}{\partial S^2}-(r-q)S\frac{\partial U_n}{\partial S}+rU_n\right][U_n-Sp_{n-1}(\tau)]=0,\\
&U_n(S,0)=\max(X-S,0).
\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

必须依次求出 $U_1,U_2,\cdots$, 然后递归地求解 U_n. 对于永久可重置敲定价 n 次的看跌期权, 当 $r<q$ 时, 可以得到它的最佳重置价格的闭合解. 以 $S^*_{n,\infty}$ 表示 $\lim\limits_{\tau\to\infty}S_n^*(\tau)$.

若 $r < q$, 则有

$$S_{n,\infty}^* = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{X}{\beta_n}, \tag{5.4.21}$$

其中 $\alpha = \dfrac{2(q-r)}{\sigma^2}, \beta_1 = 1$, 而

$$\beta_n = 1 + \frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}} \beta_{n-1}^{1+\alpha}.$$

推导 $S_{n,\infty}^*$ 的提示见问题 5.36 . 令 $n \to \infty$, 则得到

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n = 1 + \frac{1}{\alpha},$$

这样

$$\lim_{n \to \infty} S_{n,\infty}^* = X. \tag{5.4.22}$$

结合 $S_n^*(\tau)$ 是 τ 的增函数和 $S_n^*(\tau) \geqslant X$, 可以得到

$$\lim_{n \to \infty} S_n^*(\tau) = X \quad 对所有\tau. \tag{5.4.23}$$

上述结论从金融上如何解释呢？若 $r < q$, 则只要可重置敲定价无限次看跌期权的收益为正, 就应该进行重置. 更准确地说, 只要资产价格达到一个新的高度, 持有者就总是进行重置. 可重置敲定价无限次看跌期权的到期日收益就是 $\max(M_0^T - S_T, X - S_T)$, 该收益涉及回望变量 M_0^T, 其中 $M_0^T = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} S_t$. 由于可重置敲定价无限次看跌期权的最佳重置策略已经被确定, 所以这种看跌期权定价模型就不再是一个自由边界问题. 实际上, 它变成了一个回望期权模型 (Dai et al., 2003).

5.5 习 题

5.1 在下列情形下给平凡美式看跌期权定价:

(i) 无风险利率 $r = 0$;

(ii) 波动率 $\sigma = 0$,

(iii) 敲定价 $X = 0$;

(iv) 资产价格 $S = 0$.

5.2 对原生资产是持有成本为 b 的商品的美式看涨期权和美式看跌期权, 确定其价格之差的上界和下界.

5.3 考虑原生资产价格服从几何布朗运动的美式看涨期权, 证明

$$C(\lambda S, \tau) - C(S, \tau) \leqslant (\lambda - 1)S, \quad \lambda \geqslant 1.$$

5.4 解释为什么美式看涨 (看跌) 期货比其相应的美式看涨 (看跌) 期权的价格高 (低). 它们的原生资产同是持有成本为正数的资产. 另外, 解释为什么当期货的到期日长于期权的到期日时, 它们的价格之差会扩大.

5.5 探索性地说明美式期权的价格函数 $P(S,\tau)$ 在最佳实施价格 $S^*(\tau)$ 上满足平滑性粘贴条件

$$\left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_{S=S^*(\tau)} = -1.$$

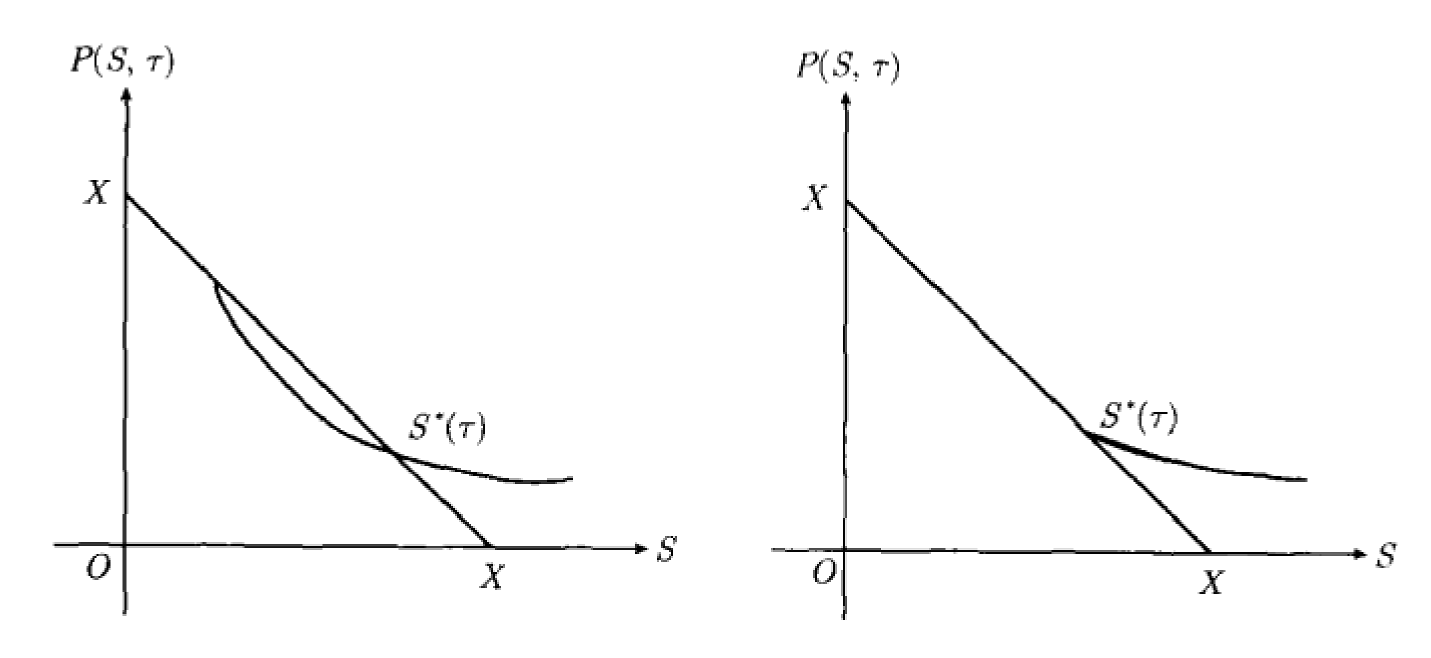
考虑在下面两种情况下, 美式期权价格曲线在 $S^*(\tau)$ 附近的性质

(i) $\left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_{S=S^*(\tau)} < -1;$

(ii) $\left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_{S=S^*(\tau)} > -1.$

(a) 当 $\left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_{S=S^*(\tau)} < -1$ 时, 在 $S^*(\tau)$ 附近且比其大的 S 处, $P(S,\tau)$ 低于内在价值直线 (下面左图);

(b) 当 $\left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_{S=S^*(\tau)} > -1$ 时, 讨论为什么通过选择比较小的 $S^*(\tau)$, 可以提高美式看跌期权在 $S^*(\tau)$ 附近资产价格处的值 (下面右图).



解释为什么这两种情况都不是美式看跌期权的最佳实施策略. 因此, 美式看跌期权的价格曲线在 $S^*(\tau)$ 处的斜率必须满足平滑性粘贴条件.

5.6 若 $q \geqslant r$, 解释当原生资产连续分红的美式看涨期权最佳地被持有至到期日时, 为什么在到期日时价值为零 (Kim, 1990).

5.7　用 $P(S,\tau;X,r,q)$ 表示美式看跌期权的价格函数. 证明 $P(X,\tau;S,q,r)$ 也满足 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial P}{\partial S}-rP,$$

并且有辅助定解条件

$$P(X,0;S,q,r)=\max(S-X,0),$$

$$P(X,\tau;S,q,r)\geqslant \max(S-X,0),\quad \tau>0.$$

注意: 辅助条件与美式看涨期权价格函数的辅助条件相同, 所以可以得出

$$C(S,\tau;X,r,q)=P(X,\tau;S,q,r).$$

提示: 记 $P(S',\tau)=P\left(\frac{1}{S},\tau;\frac{1}{X},q,r\right)=\frac{1}{SX}P(X,\tau;S,q,r)$, 证明

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \tau}[SXP(S',\tau)]-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}[SXP(S',\tau)]\\&-(r-q)S\frac{\partial}{\partial S}[SXP(S',\tau)]+rSXP(S',\tau)\\=&SX\left[\frac{\partial P}{\partial \tau}(S',\tau)-\frac{\sigma^2}{2}S'^2\frac{\partial^2 P}{\partial S'^2}(S',\tau)\right.\\&\left.-(q-r)S'\frac{\partial P}{\partial S'}(S',\tau)+qP(S',\tau)\right].\end{aligned}$$

5.8　利用习题 5.7 中得到的美式看涨期权和看跌期权价格之间的对称关系, 证明

$$\frac{\partial C}{\partial S}(S,\tau;X,r,q)=\frac{\partial P}{\partial X}(X,\tau;S,q,r),$$

$$\frac{\partial C}{\partial q}(S,\tau;X,r,q)=\frac{\partial P}{\partial r}(X,\tau;S,q,r),$$

并给出上述结果的金融意义.

5.9　考虑两份原生资产相同且距离到期日剩余时间均为 τ 的美式看涨和看跌期权. 假设资产价格的波动率至多与时间相关. 记 S_C 和 S_P 分别为看涨期权和看跌期权相应的即期资产价格 (S_C 和 S_P 不需要相同, 因为比较两者价值的日历时间不必相同). 假设两份期权具有相同的价值状态, 即

$$\frac{S_C}{X_C}=\frac{X_P}{S_P},$$

其中 X_C 和 X_P 分别为看涨期权和看跌期权对应的敲定价. 用 $C(S_C,\tau;X_C,r,q)$ 和 $P(S_P,\tau;X_P,r,q)$ 分别表示美式看涨期权和看跌期权的价格函数, 试推导推广的看涨–看跌期权对称关系 (Carr and Chesney, 1996)

$$\frac{C(S_C,\tau;X_C,r,q)}{\sqrt{S_CX_C}}=\frac{P(S_P,\tau;X_P,q,r)}{\sqrt{S_PX_P}}.$$

更进一步, 用 $S_C^*(\tau;X_C,r,q)$ 和 $S_P^*(\tau;X_P,r,q)$ 分别表示美式看涨和看跌期权的最佳实施价格, 证明

$$S_C^*(\tau;X_C,r,q)S_P^*(\tau;X_P,q,r)=X_CX_P.$$

这个关系是方程 (5.1.16) 中结论的推广.

5.10　用 H 代表一份永久美式下降敲出看涨期权的障碍值. 永久美式障碍期权的价格函数 $C_\infty(S;r,q)$ 满足的方程如下:

$$\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2C_\infty}{dS^2}+(r-q)S\frac{dC_\infty}{dS}-rC_\infty=0,\quad H<S<S_\infty^*,$$

其中 S_∞^* 为最佳实施价格. 确定 S_∞^* 并求出期权价格 $C_\infty(S;r,q)$.

提示: 在所有可能的实施价格中求一个使得永久美式看涨期权价格最大的实施价格, 这就是最佳实施价格, 即

$$\begin{aligned}&C_\infty(S;r,q)\\&=\max_{S_\infty^*}\left\{\frac{S_\infty^*-X}{H^{\lambda_+}{S_\infty^*}^{\lambda_-}-{S_\infty^*}^{\lambda_+}H^{\lambda_-}}(H^{\lambda_+}S^{\lambda_-}-H^{\lambda_-}S^{\lambda_+})\right\},\end{aligned}$$

其中 λ_+ 和 λ_- 为下列二次方程的根:

$$\frac{\sigma^2}{2}\lambda(\lambda-1)+(r-q)\lambda-r=0.$$

5.11　假设资产连续分红率为常数 d, 但是 d 不与资产价格 S 成比例. 证明如果 $d<rX$, 其中 r 为无风险利率, X 为敲定价, 则以上述资产为标的的美式看涨期权不会被提前实施. 在上述条件下, 证明永久美式看涨期权的价格如下 (Merton, 1973, 第一章):

$$C(S,\infty;X)=S-\frac{d}{r}\left[1-\frac{\left(\frac{2d}{\sigma^2S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}}{\Gamma\left(2+\frac{2r}{\sigma^2}\right)}M\left(\frac{2r}{\sigma^2},2+\frac{2r}{\sigma^2},-\frac{2d}{\sigma^2S}\right)\right]$$

其中 Γ 和 M 分别代表 Gamma 函数和合流超几何函数.

5.12 考虑具有连续变化的敲定价 $X(\tau)$ 的美式看涨期权, 其中 $\dfrac{dX(\tau)}{d\tau}<0$. 美式看涨期权模型的辅助条件如下:

$$C(S,\tau;X(\tau))\geqslant\max(S-X(\tau),0)$$

和

$$C(S,\tau;X(0))=\max(S-X(0),0).$$

定义下面两个新变量:

$$\xi=\frac{S}{X(\tau)},\quad F(\xi,\tau)=\frac{C(S,\tau;X(\tau))}{X(\tau)},$$

证明上述美式看涨期权价格满足如下方程:

$$\frac{\partial F}{\partial\tau}=\frac{\sigma^2}{2}\xi^2\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}+\eta(\tau)\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}-\eta(\tau)F,$$

其中 $\eta(\tau)=r+\dfrac{1}{X}\dfrac{\partial X}{\partial\tau}$, r 为无风险利率. 辅助条件变为

$$F(\xi,0)=\max(\xi-1,0),\quad F(\xi,\tau)\geqslant\max(\xi-1,0).$$

证明如果 $X(\tau)\geqslant X(0)e^{-r\tau}$, 则提前实施美式看涨期权总不是最佳的. 在这种情况下, 证明上述美式期权的价格等于具有确定敲定价 $X(0)$ 的欧式看涨期权的价格 (Merton, 1973, 第一章).

提示: 证明当与时间相关的函数 $\eta(\tau)$ 满足条件 $\displaystyle\int_0^\tau\eta(s)\,ds\geqslant 0$ 时, 提前实施美式看涨期权总不是最佳的.

5.13 考虑单次分红的美式看涨期权的模型. 解释为什么由方程 (5.1.24) 决定的实施价格 S_d^* 随着分红额 D 的增大而减小. 同时, 证明当 D 下降到 $X[1-e^{-r(T-t_d)}]$ 时, S_d^* 趋于无穷.

5.14 从数学上证明下面的不等式:

$$C_d(\widetilde{S},T-t;X)\geqslant\max(c(\widetilde{S},T-t;X),c(S,t_d-t;X)),\quad t<t_d,$$

这个不等式是来自单次分红美式看涨期权的 Black 近似公式 (见 5.1.5 小节), 其中 t_d 和 T 分别为除息日和到期日, S 和 $\widetilde{S}$ 分别为市场资产价格和除去红利现值之后的净资产价格.

5.15 假设在 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 分红, 分红额分别为 $D_1,D_2,\cdots,D_n$, 用 t_{n+1} 表示到期日 T. 证明风险分量如下:

$$\widetilde{S}=S-\sum_{k=j+1}^{n}D_ke^{-r(t_k-t)},\quad t_j^+\leqslant t\leqslant t_{j+1}^-,\quad j=0,1,\cdots,n,$$

其中 $t_0 = 0$.

提示: 推广方程 (5.1.26) 中的结果.

5.16 考虑原生资产在预定日期 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 离散分红的美式看涨期权. 设分红额分别为 $D_1, D_2, \cdots, D_n$, $T = t_{n+1}$ 为到期日. 证明如果所有的分红额都不是很大, 如下面的不等式所示, 则在到期日之前的任何时间, 提前实施美式看涨期权总不是最佳的,

$$D_i \leqslant X[1 - e^{-r(t_{i+1}-t_i)}], \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

5.17 在两次分红的美式看涨期权的模型中, 假设在时刻 t_1 和 t_2, 原生资产分别分红 D_1 和 D_2. 用 $\widetilde{S}_t$ 表示在 t 时刻除去红利现值的净资产价格, 用 $\tilde{S}^*_{t_1}(\tilde{S}^*_{t_2})$ 表示在 t_1 (t_2) 时的最佳实施价格, 当资产价格比它高时, 美式看涨期权应该被提前实施. 用 r, σ, X 和 T 分别表示无风险利率、$\widetilde{S}$ 的波动率、敲定价和到期日. 用 $C(\widetilde{S}_t, t)$ 表示在 t 时刻的美式看涨期权价格. 证明 $\tilde{S}^*_{t_1}$ 和 $\tilde{S}^*_{t_2}$ 是下面非线性代数方程的解:

$$\begin{aligned} C(\widetilde{S}^*_{t_1}, t_1) = {} & \tilde{S}^*_{t_1}\,[1 - N_2(-a_1, -b_1; \rho)] + D_2 e^{-r(t_2-t_1)} N(a_2) \\ & - X[e^{-r(t_2-t_1)} N(a_2) + e^{-r(T-t_1)} N_2(-a_2, b_2; -\rho)], \\ C(\widetilde{S}^*_{t_2}, t_2) = {} & \tilde{S}^*_{t_2}\, N(v_1) - X e^{-r(T-t_2)} N(v_2), \end{aligned}$$

其中

$$a_2 = \frac{\ln \dfrac{\tilde{S}^*_{t_1}}{\tilde{S}^*_{t_2}} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}}, \quad a_1 = a_2 + \sigma\sqrt{t_2 - t_1},$$

$$b_2 = \frac{\ln \dfrac{\tilde{S}^*_{t_1}}{X} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_1)}{\sigma\sqrt{T - t_1}}, \quad b_1 = b_2 + \sigma\sqrt{T - t_1},$$

$$v_2 = \frac{\ln \dfrac{\tilde{S}^*_{t_2}}{X} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_2)}{\sigma\sqrt{T - t_2}}, \quad v_1 = v_2 + \sigma\sqrt{T - t_2}.$$

美式看涨期权价格如下 (Welch and Chen, 1988):

$$\begin{aligned} C(\widetilde{S}_t, t) = {} & \widetilde{S}_t\,[1 - N_3(-f_1, -g_1, -h_1; \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23})] \\ & - X[e^{-r(t_1-t)} N(f_2) + e^{-r(t_2-t)} N_2(-f_2, g_2; -\rho_{12}) \\ & + e^{-r(T-t)} N_3(-f_2, -g_2, h_2; \rho_{12}, -\rho_{13}, -\rho_{23})] \\ & + D_1 e^{-r(t_1-t)} N(f_2) \\ & + D_2 e^{-r(t_2-t)} [N(f_2) + N_2(-f_2, g_2; -\rho_{12})], \end{aligned}$$

其中

$$\rho_{12}=\sqrt{\frac{t_1-t}{t_2-t}},\quad \rho_{13}=\sqrt{\frac{t_1-t}{T-t}},\quad \rho_{23}=\sqrt{\frac{t_2-t}{T-t}},$$

$$f_2=\frac{\ln\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t_1}^*}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t)}{\sigma\sqrt{t_1-t}},\quad f_1=f_2+\sigma\sqrt{t_1-t},$$

$$g_2=\frac{\ln\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t_2}^*}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2-t)}{\sigma\sqrt{t_2-t}},\quad g_1=g_2+\sigma\sqrt{t_2-t},$$

$$h_2=\frac{\ln\frac{\widetilde{S}_t}{X}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad h_1=h_2+\sigma\sqrt{T-t}.$$

5.18　考虑单次分红的美式看跌期权模型. 设原生资产在 t_d 按照确定比例 λ 分红, 即红利额为 λS_{t_d}. 证明在 t_d 之前的瞬间, 美式看跌期权的最佳实施边界的斜率如下 (Meyer, 2001):

$$\lim_{t\to t_d^-}\frac{dS^*(t)}{dt}=\frac{r}{\lambda}X,$$

其中 r 为无风险利率.

提示: 考虑在 t_d 前的微小时间段 δt 中, 持有者从敲定价上获得的利息收入和红利损失之间的平衡关系.

5.19　Bunch 和 Johnson (2000) 给出了美式看跌期权最佳实施价格如下三个不同的定义:

(1) 它是对持有者而言实施与不实施该看跌期权没有区别时的资产价格;

(2) 它是使得看跌期权价格等于实施价格减去股票价格的最高的资产价格;

(3) 它是使得看跌期权的价格与到期日无关的最高的资产价格.

给出上面三个定义的金融解释.

5.20　证明原生资产以分红率 q 连续分红的美式看跌期权价格的 Δ 如下:

$$\frac{\partial P}{\partial S}=-N(-d_1)-\int_0^\tau\left[\frac{(r-q)e^{-q\xi}}{\sigma\sqrt{2\pi\xi}}e^{-\frac{d_{\xi,1}^2}{2}}+qe^{-q\xi}N(-d_{\xi,1})\right]d\xi,$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{X}+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_{\xi,1}=\frac{\ln\frac{S}{S^*(\tau-\xi)}+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)\xi}{\sigma\sqrt{\xi}},\quad d_{\xi,2}=d_{\xi,1}-\sigma\sqrt{\xi}.$$

研究当 $r \geqslant q$ 和 $r < q$ 时, 提前实施费用的 Δ 的符号. 给出上述 Δ 符号变化的金融解释, 并且证明

$$\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\ e^{-d_1^2/2} + \int_0^\tau \left[\frac{(r-q)e^{-q\xi}}{S\sigma^2\xi\sqrt{2\pi}} d_{\xi,1} e^{-\frac{d_{\xi,1}^2}{2}} + \frac{qe^{-q\xi}}{S\sigma\sqrt{2\pi\xi}} e^{-\frac{d_{\xi,1}^2}{2}}\right] d\xi.$$

求解 $\dfrac{\partial P}{\partial \sigma}, \dfrac{\partial P}{\partial r}, \dfrac{\partial P}{\partial X}$ 的类似表达式 (Huang et al., 1996).

5.21　考虑原生资产不分红的美式看跌期权, 证明提前实施费用 $e(S,\tau;X)$ 满足

$$rX\int_0^\tau e^{-r\xi}N(-\widetilde{d}_\xi)\,d\xi \leqslant e(S,\tau;X) \leqslant rX\int_0^\tau e^{-r\xi}N(-\widehat{d}_\xi)\,d\xi,$$

其中

$$\widetilde{d}_\xi = \frac{\ln\dfrac{S^*(\tau)}{S^*(0)} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\xi}{\sigma\sqrt{\xi}}, \qquad \widehat{d}_\xi = \frac{\ln\dfrac{S^*(\tau)}{S^*(\infty)} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\xi}{\sigma\sqrt{\xi}},$$

$$S^*(\infty) = \frac{X}{1+\dfrac{\sigma^2}{2r}}, \quad S^*(0) = X.$$

5.22　以 $S_C^*(\infty)$ 表示 $\lim\limits_{\tau\to\infty} S_C^*(\tau)$, 其中 $S_C^*(\tau)$ 为积分方程 (5.2.19) 的解. 对上述积分方程取极限 $\tau\to\infty$, 求解 $S_C^*(\infty)$, 并与方程 (5.1.13) 的结果作比较.

5.23　研究持有成本为 b 的美式商品期权的提前实施费用的积分表达式, 证明

(a) 如果 $b \geqslant r$, 其中 r 为无风险利率, 则提前实施美式商品看涨期权是没有任何好处的;

(b) 对所有的 b, 提前实施美式商品看跌期权的好处总是存在的.

5.24　用 $C_{do}(S,\tau;X,H,r,q)$ 和 $P_{uo}(S,\tau;X,H,r,q)$ 分别表示美式下降敲出障碍看涨期权的价格函数和美式上升敲出障碍看跌期权的价格函数, 两者均有确定的障碍值 H. 证明美式障碍看涨和看跌期权的价格之间的看跌–看涨对称关系如下 (Gao et al., 2000):

$$C_{do}(S,\tau;X,H,r,q) = P_{uo}(X,\tau;SX/H,q,r).$$

用 $S^*_{do,\text{call}}(\tau;X,H,r,q)$ 和 $S^*_{uo,\text{put}}(\tau;X,H,r,q)$ 分别表示美式下降敲出看涨期权和美式上升敲出看跌期权的最佳实施价格, 证明

$$S^*_{do,\text{call}}(\tau;X,H,r,q) = \frac{X^2}{S^*_{uo,\text{put}}(\tau;X,X^2/H,q,r)}.$$

5.25 考虑美式上升敲出看跌期权, 它的障碍值 $B(\tau) = B_0 e^{-\alpha\tau}$, 敲定价为 X. 假设原生资产连续分红率为 q, 求出它的提前实施费用的积分表达式. 当 B_0 减小时, 对最佳实施价格 $S^*(\tau; B(\tau))$ 有什么影响?

5.26 考虑美式下降敲入看涨期权 $C_{di}(S,\tau;X,B)$, 这里下降敲入的触发条款赋予持有者这样一个权利, 当资产价格 S 跌到障碍值 B 之下时, 持有者将会得到一份敲定价为 X 的美式看涨期权. 设原生资产的分红率为 q, 无风险利率为 r. 以 $C(S,\tau;X)$ 和 $c(S,\tau;X)$ 分别表示敲定价为 X 的美式看涨期权和欧式看涨期权的价格函数. 证明当 $B \leqslant \max\left(X, \frac{r}{q}X\right)$ 时有

$$\begin{aligned}&C_{di}(S,\tau;X,B)\\ =&\left(\frac{S}{B}\right)^{1-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}\left[C\left(\frac{B^2}{S},\tau;X\right)-c\left(\frac{B^2}{S},\tau;X\right)\right]\\ &+c_{di}(S,\tau;X,B),\end{aligned}$$

其中 $c_{di}(S,\tau;X,B)$ 为欧式下降敲入看涨期权的价格函数. 对下列情形求解价格函数 $C_{di}(S,\tau;X,B)$ 的相应形式:

(i) $B \geqslant S^*(\infty)$,

(ii) $S^*(0^+) < B < S^*(\infty)$, 其中 $S^*(\tau)$ 为美式无障碍看涨期权 $C(S,\tau;X)$ 的最佳实施边界 (Dai and Kwok, 2004b).

5.27 具有顶值 L 的美式封顶看涨期权的实施收益为 $\max(\min(S,L)-X,0)$ $(L > X)$. 用 $S^*_{\text{cap}}(\tau)$ 和 $S^*(\tau)$ 分别表示美式封顶看涨期权和相应的无封顶期权的最佳实施边界, 证明 (Broadie and Detemple, 1995)

$$S^*_{\text{cap}}(\tau) = \min(S^*(\tau), L).$$

5.28 考虑具有可回收特性的美式看涨期权, 它的发行者有权在期权有效期内回收期权. 当发行者回收期权时, 美式期权的持有者可以选择实施期权, 或者得到确定的现金额 K. 用 $S^*_{\text{call}}(\tau)$ 和 $S^*(\tau)$ 分别表示可回收美式看涨期权和相应的不可回收期权的最佳实施边界, 证明

$$S^*_{\text{call}}(\tau) = \min(S^*(\tau), K + X),$$

其中 X 为敲定价. 另外, 假设持有者有一段长为 τ_n 的通知期限, 这样他将在通知期限结束时决定实施期权或者得到现金 K, 证明此时的最佳实施边界 $S^*_{\text{call}}(\tau)$ 变为

$$S^*_{\text{call}}(\tau) = \min(S^*(\tau), \widehat{S}^*(\tau_n)),$$

其中 $\widehat{S}^*(\tau_n)$ 为下列代数方程的解:

$$\widehat{S}^*(\tau_n) - X - Ke^{-r\tau_n} = c(S, \tau_n; K+X),$$

而 $c(S, \tau_n; K+X)$ 是距离到期日时间为 τ_n, 敲定价为 $K+X$ 的欧式期权的价格 (Kwok and Wu, 2000; Dai and Kwok, 2005b).

提示: 注意: $S^*_{\text{call}}(\tau)$ 不能大于 $K+X$; 否则, 当资产价格满足 $K+X < S < S^*_{\text{call}}(\tau)$ 时, 美式看涨期权的内在价值就高于 K. 这表示发行者采取了不是最佳的回收策略.

5.29 不同于通常的期权合约, **分期付款期权**(installment option) 分期付款期权的持有者在整个期权有效期内支付期权费用. 如果持有者选择停止支付分期付款, 分期付款期权就被终止. 在通常情况下, 持有者需要在期权有效期内事先确定的一些时刻分期付款. 在这个问题中, 研究两种不同的情况: 连续支付流和离散支付.

首先, 用 s 表示分期付款的连续支付率, 所以在时段 Δt 中需要支付 $s\Delta t$. 用 $V(S,t)$ 表示一份欧式分期付款看涨期权的价值. 证明 $V(S,t)$ 满足下列方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV - s = 0, & S > S^*(t), \\ V = 0, & S \leqslant S^*(t), \end{cases}$$

其中 $S^*(t)$ 为持有者停止分期付款的最佳的临界资产价格. 当分期付款期权距离到期日无穷远时 (永久分期付款期权), 求出解析的价格公式.

下面假设在离散的时刻 $t_j (j = 1, \cdots, n)$, 需要支付等额的分期付款 d. 解释在付款日 t_j 前后下面的跳条件的正确性:

$$V(S, t_j^-) = \max(V(S, t_j^+) - d, 0).$$

最后, 在离散分期付款时, 描述期权价值 $V(S,t)$ 作为日历时间 t 的函数, 在不同的资产价格 S 时的变动情况.

提示: 在支付分期付款之后, 期权价值会立即增加 d. 同时, 如果 $V(S, t_j^+) \leqslant d$, 则在时间 t_j 不支付分期付款才是最佳的.

5.30 假设美式看跌期权只允许在当下至到期日之间的 N 个时刻实施. 设当下时间为零, 用时间向量 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_N)^{\mathrm{T}}$ 表示可实施时刻. 用 $N_i(\mathbf{d}_i; R_i)$ 表示 i 维正态积分, 它的积分上限是 i 维向量 $\mathbf{d}_i$, 相关矩阵是 R_i. 定义对角矩阵 $D_i = \text{diag}\ (1, \cdots, 1, -1)$, 并且 $\mathbf{d}_i^* = D_i\mathbf{d}_i$, $R_i^* = D_iR_iD_i$. 证明上述具有 N 个可实施时刻美式看跌期权的价值为 (Bunch and Johnson, 1992)

$$P = X\sum_{i=1}^{N} e^{-rt_i} N_i(\mathbf{d}_{i_2}^*; R_i^*) - S\sum_{i=1}^{N} N_i(\mathbf{d}_{i_1}^*; R_i^*),$$

其中

$$\mathbf{d}_{i_1} = (d_{11}, d_{21}, \cdots, d_{i1})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{d}_{i_1}^* = D_i \mathbf{d}_{i_1},$$
$$\mathbf{d}_{i_2} = \mathbf{d}_{i_1} - \sigma(\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \cdots, \sqrt{t_i})^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{d}_{i_2}^* = D_i \mathbf{d}_{i_2},$$
$$d_{j1} = \frac{\ln \dfrac{S}{S_{t_j}^*} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) t_j}{\sigma\sqrt{t_j}}, \quad j = 1, \cdots, i,$$

而 $S_{t_j}^*$ 为在 t_j 的最佳实施价格. 同时, 求出相关矩阵 R_i 的表达式

提示: 当 $N = 3$ 且可实施时刻均匀分布时, 相关矩阵 R_3 为

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & 1 \end{pmatrix}.$$

5.31　在二次近似方法中, 当 $K(\tau) = 1 - e^{-r\tau} = 0$, 即 $r = 0$ 时, f 的近似方程无法定义. 与二次近似方程中的推导过程类似, 在无风险利率为零的退化情况下, 近似求解美式期权的定价问题.

5.32　证明在二次近似方法中, 美式商品看跌期权的近似价值如下:

$$\widetilde{P}(S, \tau) = p(S, \tau) - \frac{S^*}{q_1}\left[1 - e^{(b-r)}N(-d_1(S^*))\right]\left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_1}, \quad S > S^*.$$

解释为什么对所有的 b, 上述公式总成立.

提示: 证明

$$\widetilde{P}(S, \tau) = p(S, \tau) + c_1 K S^{q_1}$$

和

$$\frac{\partial p}{\partial S}(S^*, \tau) = e^{(b-r)\tau} N(-d_1(S^*)).$$

5.33　研究在 5.4.2 小节中讨论过的叫价看涨期权 (Dai et al., 2004a). 请解释为什么叫价看涨期权的价值一定高于与它具有相同的确定敲定价 X 的回望看涨期权的价值.

5.34　证明

$$e^{q\tau} p^*(\tau; r, q) = p^*(\tau; r - q, 0),$$

其中 $p^*(\tau)$ 的定义见方程 (5.4.2). 为了证明等式 (5.4.6a)~(5.4.6c) 中的结果, 只需要考虑

$$\frac{d}{d\tau} p^*(\tau; r, 0) = e^{-r\tau} f(\tau)$$

的符号变化, 其中

$$f(\tau) = -rN(-d_2) + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} N(-d_2),$$

$$d_2 = \alpha\sqrt{\tau}, \quad d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}, \quad \alpha = \frac{r - \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}.$$

研究下面两种情况 (Dai et al., 2004a):

(a) 若 $r \leqslant 0$, 证明

$$\frac{d}{d\tau}p^*(\tau;r,0) > 0;$$

(b) 若 $r > 0$, 证明

$$f'(\tau) = \frac{\sigma N(-d_2)}{4\sqrt{\tau}}\left[\alpha(\alpha+\sigma) - \frac{1}{\tau}\right].$$

由此得出方程 (5.4.6b), (5.4.6c) 中的结果.

5.35 对于可重置敲定价的看跌期权, 假设 $r \leqslant q$, 证明提前重置期权金如下 (Dai et al., 2004a):

$$e(S,\tau) = Se^{-q\tau}\int_0^\tau N(d_{1,\tau-u})\frac{d}{du}[e^{qu}p^*(u)]\,du,$$

其中

$$d_{1,\tau-u} = \frac{\ln\dfrac{S}{S^*(u)} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-u)}{\sigma\sqrt{\tau-u}}.$$

当 $r > q$ 时, 应该如何修改公式?

5.36 令 $W_n^\infty(S;X) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{r\tau}U_n(S,\tau;X)$, 其中 $U_n(S,\tau;X)$ 为可重置 n 次看跌期权的价值 (见方程 (5.4.20)). 对于 $r < q$, 证明 $W_n^\infty(S)$ 满足的方程如下 (Dai et al., 2003):

$$\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2W_n^\infty}{dS^2} + (r-q)S\frac{dW_n^\infty}{dS} = 0, \quad 0 < S < S^*_{n,\infty},$$

辅助条件为

$$W_n^\infty(S^*_{n,\infty}) = \beta_n S^*_{n,\infty}, \quad \frac{dW_n^\infty}{dS}(S^*_{n,\infty}) = \beta_n,$$

其中 $\beta_n = W_{n-1}^\infty(1;1)$. 证明

$$W_n^\infty(S;X) = X + \frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}\frac{\beta_n^{1+\alpha}}{X^\alpha}S^{1+\alpha}$$

和

$$S^*_{n,\infty} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{X}{\beta_n},$$

其中 $\alpha = 2(q-r)/\sigma^2$. β_n 的递推关系为

$$\beta_n = 1 + \frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}\beta_{n-1}^{1+\alpha}.$$

证明 $\beta_1 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$. 同时, 求出 $S^*_{n,\infty}$ 的前面几个值.

5.37 职工股票购买期权中的再装入条款赋予持有者这样一个权利：当持有者实施该股票期权时，他可以得到 $\dfrac{X}{S^*}$ 单位重新载入的平价期权，其中 X 就是原来的敲定价，S^* 为实施时刻的股票价格. 重新载入期权和原来的期权具有相同到期日. 实施收益为 $S^* - X + \dfrac{X}{S}c(S^*, \tau; S^*, r, q)$. 由于看涨期权价格函数的线性齐次性，可以将实施收益写成 $S - X + S\widehat{c}(\tau; r, q)$，其中

$$\widehat{c}(\tau; r, q) = e^{-q\tau}N(\widehat{d}_1) - e^{-r\tau}N(\widehat{d}_2),$$

并且

$$\widehat{d}_1 = \frac{r - q + \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\tau}, \quad \widehat{d}_2 = \frac{r - q - \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\tau}.$$

用 $S^*(\tau; r, q)$ 代表将停止持有区域和继续持有区域分开的最佳实施边界. 停止持有区域和最佳实施边界 $S^*(\tau)$ 具有下列性质 (Dai and Kwok, 2008)：

(1) 停止持有区域在如下区域内：

$$\{(S, \tau) : S \geqslant X, 0 \leqslant \tau \leqslant T\};$$

(2) 当距离到期日很近时，最佳股票价格就是

$$S^*(0^+; r, q) = X, \quad q \geqslant 0, r > 0;$$

(3) 当股票具有常数分红率 $q > 0$，距离到期日无穷远时，最佳股票价格为

$$S^*(\infty; r, q) = \frac{\mu_+}{\mu_+ - 1}X,$$

其中 μ_+ 为下述方程的正根:

$$\frac{\sigma^2}{2}\mu^2 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mu - r = 0;$$

(4) 如果股票不分红，则

(a) 如果 $r \leqslant \dfrac{\sigma^2}{2}$，则 $S^*(\tau; r, 0)$ 对所有 $\tau > 0$ 有定义，而且 $S^*(\infty; r, 0) = \infty$;

(b) 如果 $r > \dfrac{\sigma^2}{2}$，则 $S^*(\tau; r, 0)$ 只有在 $0 < \tau < \tau^*$ 时才有定义，其中 τ^* 为下面的代数方程的唯一解：

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}N\left(-\frac{r + \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\tau}\right) - rN\left(\frac{r + \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\tau}\right) = 0.$$

5.38 设地主拥有一块土地, 他可以在土地上修建房子, 或者放弃土地. 用 S 表示房子的价值, H 表示不变的持有成本 (这也许包括资产税、资产维护费用等). 假设可以修建房子的期限没有限定, 这样土地的价值可以看成永久美式看涨期权, 它的价值记为 $C(S)$. 用 σ_S 表示 S 服从的布朗运动的波动率, r 为无风险利率. 假设房子的资产价值可以用其他可交易的资产来对冲, 用无风险对冲原理证明 $C(S)$ 满足的方程如下:

$$\frac{\sigma_S^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC-H=0.$$

用 Z 表示 S 的一个较低的临界值, 当房子的价值比它低时, 放弃土地是最佳的. 用 W 表示 S 的一个较高的临界值, 当房子的价值达到这个值时, 修建房子是最佳的. 记 X 为修建房子需要的现金投资额, 解释为什么辅助条件在 $S=Z$ 和 $S=W$ 需要满足

$$\begin{cases} C(Z)=0, & \dfrac{dC}{dS}(Z)=0,\\ C(W)=W-X, & \dfrac{dC}{dS}(W)=1. \end{cases}$$

证明永久美式看涨期权模型的解如下:

$$C(S)=\begin{cases} 0, & S<Z,\\ \alpha_1 S+\alpha_2 S^{\lambda}-\dfrac{H}{r}, & Z\leqslant S\leqslant W,\\ S-X, & S>W, \end{cases}$$

其中

$$\lambda=-\frac{2r}{\sigma_S^2},\quad W=\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(X-\frac{H}{r}\right)\frac{1}{1-\alpha_1},$$

$$Z=\frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{H}{r}\left[1-\left(1-\frac{rX}{H}\right)^{(\lambda-1)/\lambda}\right],$$

$$\alpha_1=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{rX}{H}\right)^{(\lambda-1)/\lambda}},\quad \alpha_2=-\frac{\alpha_1}{\lambda Z^{\lambda-1}}.$$

这个定价模型有两条自由边界、一条实施放弃土地权利的边界和一条实施修建房子权利的边界.

5.39 考虑美式分期付款期权, 购买者只需要支付很少的前期费用, 然后在期权的整个有效期内持续不断地在每个单位时间支付一定分期付款. 记 δ 为上述分期付款流的费率. 持有者有权实施期权或者提前终止支付分期付款.

(a) 推导原生资产分红, 美式看涨或者看跌分期付款期权的线性互补模型.

(b) 考虑美式看涨分期付款期权, 用 $q > 0$ 表示分红率, 证明最佳停止边界包括下面两个部分:

(i) 当资产价值上升到上临界资产价格 $S^*_{\text{up}}(t)$ 时, 提前实施期权最佳;

(ii) 当资产价值下降到下临界资产价格 $S^*_{\text{low}}(t)$ 时, 应该停止支付分期付款来提前终止期权.

证明

$$\lim_{t\to T^-} S^*_{\text{up}}(t) = \max\left(\frac{rX-\delta}{q}, X\right), \quad \lim_{t\to T^-} S^*_{\text{low}}(t) = X,$$

其中 X 为敲定价.

(c) 推导看跌的美式分期付款期权满足的类似结果.

第6章　期权定价的数值方法

前几章给出了各种期权模型的闭合形式的价格公式. 然而, 可以写出解析解的期权模型非常有限. 对大多数情况, 期权定价只能采用数值算法. 期权定价的数值方法包括**网格树方法**(lattice tree methods)、**有限差分方法**(finite difference algorithms)和**蒙特卡罗模拟**(Monte Carlo simulation).

在金融领域, 经常使用二叉树格式计算一大类期权模型的价格, 这主要是因为它非常容易使用和实现. 二叉树模型的本质就是利用离散随机游走模型来模拟连续的资产运动过程. 有意思的是, 风险中性的定价原理自然地体现在二叉树模型中. 6.1 节重新回顾二叉树模型, 阐述怎样利用二叉树法计算以离散分红的资产作为标的的期权价格和可以提前实施、回购的期权的价格. 然后再研究离散的二叉树模型的极限状况, 即连续的 Black-Scholes 模型. 也将把二叉树法推广到三叉树法. 三叉树法利用离散的三跳过程来模拟标的资产的价格过程. 为了计算路径有关期权的数值解, 如亚式期权和具有巴黎式敲出特征的期权, 我们讨论一般的前向打靶法, 这种方法可以让我们在网格点上追踪到标的资产的路径相关性.

在 Black-Scholes 方程中, 有限差分方法是通过离散微分算子来实现的. 离散过程中产生的数值格式大致可分为隐式和显式两种类型. 每种类型的格式各有优点和缺点. 显式格式有较高的计算效率, 但是如果在数值计算时时间步长选择得不是足够小, 则显式格式非常容易产生数值不稳定, 从而导致舍入误差. 有意思的是, 尽管二叉树法和有限差分法是通过不同的方法得到的, 但是二叉树法和显式有限差分法具有相同的解析形式. 6.2 节给出期权定价的各种有限差分格式. 特别地, 讨论了投影连续超松弛格式和美式期权数值算法的自由边界固定方法.

现在, 经常要在短时间内计算数以千计的期权价格, 因此, 有必要提出新的数值算法, 在短时间内, 可以准确、高效和可靠地计算各种期权价格. 在分析数值算法时, 讨论一些理论概念, 如精度的阶数和数值算法的稳定性. 分析了到期日收益函数的“跳跃”带来的复杂情况, 避免数值解的寄生振荡. 另外, 还讨论了障碍期权和回望期权边界条件离散化的问题.

蒙特卡罗方法模拟标的资产价格的随机运动, 给出了期权模型的概率解. 因为大多衍生品的定价问题可以表示成在风险中性测度下到期日收益函数贴现的数学期望, 而且即使没有一个完整的定价模型, 蒙特卡罗模拟也可以提供直接计算衍生品价格的数学工具. 当面对一个新的具有复杂收益函数的衍生品时, 市场从业者

通常采用蒙特卡罗方法来估计新衍生品的价格, 而不是采用其他有效数值方法来计算.

蒙特卡罗模拟的一个主要优势是在期权定价时不用付出额外的代价就可以处理复杂的收益函数, 而且蒙特卡罗模拟的计算复杂度关于标的资产数目是线性的. 因此, 当处理多风险资产期权时, 蒙特卡罗方法更具有优势. 但是蒙特卡罗模拟最不理想的特征是需要进行大量的模拟才能达到要求的精度, 这是因为估计值的标准误差和模拟次数的平方根成反比. 为了减小估计值的标准差, 有许多有效的方差减小技术, 如控制变量技术和对偶变量技术. 6.3 节研究如何在期权定价中利用这些方差减小技术.

通常认为, 蒙特卡罗模拟方法不能处理美式期权中早期提前实施期权的问题, 这是因为当资产价格在某个时刻达到一定的水平, 并不知道此时提前实施期权是不是最优的. 但最近也提出了一些有效的蒙特卡罗模拟技术来处理美式期权的定价问题, 包括打包和排序算法、最优实施边界参数化方法、随机网格方法和最小二乘回归方法. 6.3 节将给出这些技术的机理.

6.1 网格树方法

通过回顾二叉树方法及其连续极限, 开始讨论网格树方法. 然后研究如何修改二叉树方法, 使其体现离散分红、提前实施和回购的特征. 另外, 还将研究怎样构造三叉树格式, 即在每两个时间节点之间标的资产价格允许有三个跳. 在本节结尾, 考虑用前向打靶网格方法来给路径相关期权定价.

6.1.1 二叉树模型的回顾

在离散二叉树定价模型中, 利用离散二叉树过程来模拟随机标的资产的价格过程. 在 2.1.4 小节得到离散二叉树过程中资产上涨的风险中性概率为 $p = \dfrac{R-d}{u-d}$. $R = e^{r\Delta t}$ 是 Δt 时间内无风险资产的增长因子, 其中 r 为常数无风险利率. 然而, 二叉树资产价格过程上涨比率 u 和下降比率 d 还未确定. 希望直接将 u, d 和资产价格连续扩散的波动率联系起来. 令连续模型和离散模型的均值和方差相等, 从而得到 u, d 和 p 满足的关系式.

设 S_t 和 $S_{t+\Delta t}$ 分别表示资产在当前时刻 t 和 $t+\Delta t$ 时刻的价格. 在连续 Black-Scholes 模型中, 假设资产价格的运动过程满足几何布朗运动, 其中 $\dfrac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$ 为对数正态分布. 在风险中性测度下, $\ln \dfrac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$ 变成均值为 $\left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$, 方差为 $\sigma^2\Delta t$ 的

正态分布 (见 2.4.2 小节), 其中 σ^2 为方差的变化率. $\dfrac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$ 的均值和方差分别为 R 和 $R^2(e^{\sigma^2\Delta t}-1)$ (见方程 (2.3.20), (2.3.21)). 另一方面, 在风险中性测度下, 单周期二叉树模型的资产价格比率 $\dfrac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$ 的均值和方差分别为

$$pu+(1-p)d, \quad pu^2+(1-p)d^2-[pu+(1-p)d]^2.$$

令连续模型和离散模型的均值和方差相等, 于是得到

$$pu+(1-p)d=R, \tag{6.1.1a}$$

$$pu^2+(1-p)d^2-R^2=R^2(e^{\sigma^2\Delta t}-1). \tag{6.1.1b}$$

由方程 (6.1.1a) 可以得到风险中性测度 $p=\dfrac{R-d}{u-d}$, 这和在 2.1.4 小节中得到的风险中性测度相同. 方程 (6.1.1a), (6.1.1b) 只有两个方程, 但是却有三个未知数 u, d 和 p. 因此, 需要选择第三个条件. 一个方便的选择就是树对称性条件

$$u=\frac{1}{d}, \tag{6.1.1c}$$

此时, 二叉树网格点是对称的, 即当资产价格向上跳一次, 然后向下跳一次, 就回到原来的价值.

令 $\widetilde{\sigma}^2=R^2e^{\sigma^2\Delta t}$, 方程 (6.1.1a)~(6.1.1c) 的解为

$$u=\frac{1}{d}=\frac{\widetilde{\sigma}^2+1+\sqrt{(\widetilde{\sigma}^2+1)^2-4R^2}}{2R}, \quad p=\frac{R-d}{u-d}. \tag{6.1.2}$$

式 (6.1.2) 中 u 的表达式十分复杂. 尝试寻找一个简单的公式, 然而, 不得不以牺牲精度为代价. 将方程 (6.1.2) 按照 $\sqrt{\Delta t}$ 进行泰勒级数展开, 于是得到

$$u=1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{\sigma^2}{2}\Delta t+\frac{4r^2+4\sigma^2r+3\sigma^4}{8\sigma}(\sqrt{\Delta t})^3+O(\Delta t^2).$$

注意到在 $O(\Delta t)$ 精度下, 上述泰勒级数的前三项和 $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 泰勒展开的前三项相同. 这告诉我们, 选择如下参数是比较明智的 (Cox et al., 1979, 第二章):

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p=\frac{R-d}{u-d}. \tag{6.1.3}$$

这组参数值和式 (6.1.2) 相比, 具有更简单的解析形式. 对于这组新的参数, 连续模型和离散模型的价格比率 $\dfrac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$ 的方差在误差 $O(\Delta t)^2$ 下保持相同. 也就是说, 方

程 (6.1.1b) 在误差 $O(\Delta t)^2$ 下成立, 因为

$$pu^2+(1-p)d^2-R^2e^{\sigma^2\Delta t}=-\frac{5\sigma^4+12r\sigma^2+12r^2}{12}\Delta t^2+O(\Delta t^3).$$

文献中也给出了其他二叉树参数值的一些选择 (见习题 6.1). 它们在近似方程 (6.1.1b) 中具有相同的精度, 但解析表达式更加复杂. 这也就是为什么在二叉树模型中, 方程 (6.1.3) 给出的参数最常用的原因.

6.1.2　二叉树模型的连续极限

由方程 (6.1.3) 给定 u, d 和 p 的值, 考虑当 $\Delta t\to 0$ 时, 二叉树公式的渐近极限

$$c=\left[pc_u^{\Delta t}+(1-p)c_d^{\Delta t}\right]e^{-r\Delta t}.$$

期望证明该渐近的极限即为连续 Black-Scholes 方程的解. 由于二叉树解函数是网格函数, 因此, 必须将其延拓为连续函数, 使得两个函数在网格点上相等. 二叉树公式的连续模拟可以表示为

$$c(S,t-\Delta t)=\left[pc(uS,t)+(1-p)c(dS,t)\right]e^{-r\Delta t}. \tag{6.1.4}$$

为方便起见, 取当前时刻为 $t-\Delta t$, S 为当前时刻的资产值. 假设 $c(S,t)$ 足够光滑, 在点 (S,t) 将二叉树格式进行泰勒展开,

$$\begin{aligned}
&-c(S,t-\Delta t)+[pc(uS,t)+(1-p)c(dS,t)]e^{-r\Delta t}\\
=&\frac{\partial c}{\partial t}(S,t)\Delta t-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(S,t)\Delta t^2+\cdots-(1-e^{-r\Delta t})c(S,t)\\
&+e^{-r\Delta t}\left\{[p(u-1)+(1-p)(d-1)]S\frac{\partial c}{\partial S}(S,t)\right.\\
&+\frac{1}{2}[p(u-1)^2+(1-p)(d-1)^2]S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S,t)\\
&\left.+\frac{1}{6}[p(u-1)^3+(1-p)(d-1)^3]S^3\frac{\partial^3 c}{\partial S^3}(S,t)+\cdots\right\}.
\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

注意到

$$1-e^{-r\Delta t}=r\Delta t+O(\Delta t^2),$$

可以证明

$$\begin{aligned}
e^{-r\Delta t}\left[p(u-1)+(1-p)(d-1)\right]&=r\Delta t+O(\Delta t^2),\\
e^{-r\Delta t}\left[p(u-1)^2+(1-p)(d-1)^2\right]&=\sigma^2\Delta t+O(\Delta t^2),\\
e^{-r\Delta t}\left[p(u-1)^3+(1-p)(d-1)^3\right]&=O(\Delta t^2).
\end{aligned}$$

将上面的结果代入到方程 (6.1.5) 得到

$$
\begin{aligned}
&-c(S,t-\Delta t)+[pc(uS,t)+(1-p)c(dS,t)]\,e^{-r\Delta t}\\
&=\left[\frac{\partial c}{\partial t}(S,t)+rS\frac{\partial c}{\partial S}(S,t)+\frac{\sigma^2}{2}S^2\,\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S,t)-rc(S,t)\right]\Delta t+O(\Delta t^2).
\end{aligned}
$$

由于 $c(S,t)$ 满足二叉树公式 (6.1.4), 因此得到

$$
0=\frac{\partial c}{\partial t}(S,t)+rS\frac{\partial c}{\partial S}(S,t)+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S,t)-rc(S,t)+O(\Delta t).
$$

当 $\Delta t\to 0$ 时, 由二叉树模型得到的 $c(S,t)$ 满足 Black-Scholes 方程. 称二叉树公式以一阶时间精度近似于 Black-Scholes 方程.

Black-Scholes 定价公式的渐近极限

已经看到二叉树公式的连续极限趋于 Black-Scholes 方程. 当 $n\to\infty$, 或 $\Delta t\to 0$ 时 (因为 $n\Delta t$ 是有限的), 还希望第 n 个时间层的看涨期权价格公式 (见方程 (2.2.25)) 也趋于 Black-Scholes 看涨期权的价格. 数学上, 就是希望证明

$$
\lim_{n\to\infty}[S\Phi(n,k,p')-XR^{-n}\Phi(n,k,p)]=SN(d_1)-Xe^{-r\tau}N(d_2), \tag{6.1.6}
$$

其中 k 为第 n 个时间层上使得看涨期权在到期日盈利的最小向上跳的次数,

$$
d_1=\frac{\ln\dfrac{S}{X}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}.
$$

上述渐近公式的证明依赖于一个著名的结果: 二项式分布近似于正态分布. 令 Y 是参数为 n 和 p 的二项式随机变量, 其中 n 为试验的次数, p 为每次试验的结果. 对于很大的 n, Y 近似于均值为 np, 方差为 $np(1-p)$ 的正态分布.

为了证明式 (6.1.6), 只需要证明

$$
\lim_{n\to\infty}\Phi(n,k,p)=N\left(\frac{\ln\dfrac{S}{X}+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \tag{6.1.7a}
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\Phi(n,k,p')=N\left(\frac{\ln\dfrac{S}{X}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),\quad \tau=T-t. \tag{6.1.7b}
$$

下面给出方程 (6.1.7a) 的证明, 而方程 (6.1.7b) 的证明留作习题 6.3.

回顾 $\Phi(n,k,p)$ 是风险中性概率, 表示 n 个时间层上资产价格向上跳的次数大于等于 k 的概率, 其中 p 为向上跳的风险中性概率. 令 j 表示 n 个时间层上向上跳的随机次数, 考虑

$$1-\Phi(n,k,p)=P(j<k-1)=P\left(\frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{k-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \tag{6.1.8}$$

其中 $\dfrac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 是均值为 0, 方差为 1 的标准正态分布. 以 S 和 S^* 分别表示当前时刻的资产价格和 n 个时间步长之后的资产价格, 因为 S 和 S^* 满足关系式 $S^*=u^j d^{n-j}S$, 所以资产价格比率的对数也是二项式随机变量, 它和 j 是线性相关的,

$$\ln\frac{S^*}{S}=j\ln\frac{u}{d}+n\ln d. \tag{6.1.9}$$

对于二项式随机变量 j, 其均值和方差分别为 $E[j]=np$, $\mathrm{var}(j)=np(1-p)$. 由于 $\ln\dfrac{S^*}{S}$ 和 j 是线性相关的, 因而 $\ln\dfrac{S^*}{S}$ 的均值和方差分别为

$$E\left[\ln\frac{S^*}{S}\right]=E[j]\ln\frac{u}{d}+n\ln d=n\left(p\ln\frac{u}{d}+\ln d\right),$$

$$\mathrm{var}\left(\ln\frac{S^*}{S}\right)=\mathrm{var}(j)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2=np(1-p)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2.$$

当 $n\to\infty$ 时, 离散二叉树模型和连续 Black-Scholes 模型资产比率价格的均值和方差是相同的, 也就是说,

$$\lim_{n\to\infty}n\left(p\ln\frac{u}{d}+\ln d\right)=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \tag{6.1.10a}$$

$$\lim_{n\to\infty}np(1-p)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2=\sigma^2(T-t),\quad T=t+n\Delta t. \tag{6.1.10b}$$

因为 k 是大于等于 $\dfrac{\ln\dfrac{X}{Sd^n}}{\ln\dfrac{u}{d}}$ 的最小非负整数, 所以有

$$k-1=\frac{\ln\dfrac{X}{Sd^n}}{\ln\dfrac{u}{d}}-\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

因此, 方程 (6.1.8) 可以改写为

$$\begin{aligned}1-\Phi(n,k,p) &= P(j<k-1)\\ &= P\left(\frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{\ln\dfrac{X}{S}-n\left(p\ln\dfrac{u}{d}+\ln d\right)-\alpha\ln\dfrac{u}{d}}{\sqrt{np(1-p)}\ln\dfrac{u}{d}}\right).\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

当 $n\to\infty$ 或 $\Delta t\to 0$ 时, $\sqrt{np(1-p)}\ln\dfrac{u}{d}$ 和 $n\left(p\ln\dfrac{u}{d}+\ln d\right)$ 是有限的 (见方程 (6.1.10a), (6.1.10b)), 而 $\alpha\ln\dfrac{u}{d}$ 是 $O(\sqrt{\Delta t})$ 的. 利用二项式分布近似正态分布的性质, 二项式随机变量 $\sqrt{j-np}\sqrt{np(1-p)}$ 变为标准正态随机变量. 结合方程 (6.1.10a), (6.1.10b) 的渐近结果, 于是得到

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(n,k,p)=1-N\left(\frac{\ln\dfrac{X}{S}-\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)=N\left(\frac{\ln\dfrac{S}{X}+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \tag{6.1.12}$$

其中 $\tau=T-t$.

6.1.3 离散分红模型

二叉树模型可以非常容易地体现标的资产分红产生的影响 (见习题 6.2). 根据一些简单、合理的假设, 可以非常有效地将离散分红体现到离散二叉树模型中.

首先, 考虑构造简单二叉树模型. 令 S 表示当前资产价格, 距离到期日为 $n\Delta t$, 假设离散的分红量 D 在距当前时刻之后的一个时间步长和两个时间步长之间支付. 距离当前时间层两个时间步长之后的资产值为

$$u^2S-D,\quad S-D,\quad d^2S-D,$$

因为分红后资产价格会减少分红的量 (图 6.1). 再过一个时间步长, 就会产生 6 个节点, 而不是一般无离散分红的 4 个点,

$$(u^2S-D)u,\quad (u^2S-D)d,\quad (S-D)u,\quad (S-D)d,\quad (d^2S-D)u,\quad (d^2S-D)d,$$

这是因为 $(u^2S-D)d\neq(S-D)u$, $(S-D)d\neq(d^2S-D)u$, 内部的点不重合. 再经过一个时间步长, 节点的数目增长到 9 个, 而不是一般二叉树模型上的 5 个节点. 通常, 假设在 k 和 $k+1$ 个时间步长之间分红, 然后 $k+m$ 个时间步长之后, 节点数增长为 $(m+1)(k+1)$, 而不是通常二叉树模型的 $k+m+1$ 个, 这是因为支付离散分红之后时间层 $k+1$ 上的每个顶点都是二叉树子树的顶点. 经过 m 时间步长之

后, 每个子树产生 $m+1$ 个节点. 因此, 所有 $k+1$ 个子树产生的所有二叉树节点数为 $(m+1)(k+1)$.

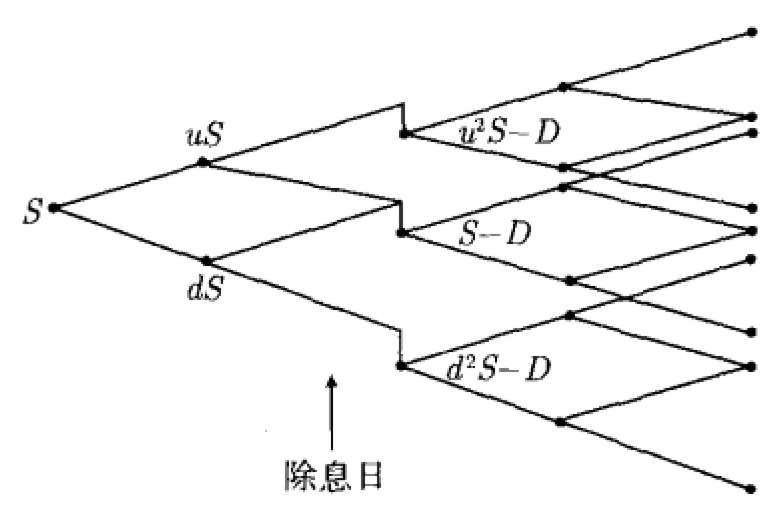


图 6.1 单一离散分红的二叉树

上面节点增长的问题可以通过将资产分成两部分来避免: 风险部分 $\widetilde{S}_t$, 这是随机的, 剩下的非风险部分, 对应未来的离散分红 (假设是确定的). 假设分红日期是 t^*, 风险部分 $\widetilde{S}_t$ 为 (见 3.4 节)

$$\widetilde{S}_t = \begin{cases} S_t - De^{-r(t^*-t)}, & t \leqslant t^*, \\ S_t, & t > t^*. \end{cases}$$

令 $\widetilde{\sigma}$ 表示 $\widetilde{S}_t$ 的波动率, 假设 $\widetilde{\sigma}$ 为常数, 而不是 S_t 的波动率为常数. 现在, 当计算二叉树模型参数 p, u 和 d 时, 采用 $\widetilde{\sigma}$, 而不是 σ, 一个二叉树模型用于模拟 $\widetilde{S}_t$ 的离散跳过程. 这个假设从本质上和利用 Black-Scholes 定价公式将资产值简化为未来所有分红的现值在做法上是相似的. 现在, $\widetilde{S}_t$ 树上的节点是重接的. 为了构造 S_t 的重接树, 在每个节点上, 通过将未来所有分红的现值加到风险部分上来得到节点值.

设 S 和 $\widetilde{S}$ 分别表示二叉树顶点的资产价格和风险部分, 以 N 表示树上的总时间步长. 假设离散分红 D 在 t^* 时刻支付, 它在 k 和 $k+1$ 时刻之间. 在二叉树的顶点, 资产价格 S 和风险部分是相关的,

$$S = \widetilde{S} + De^{-kr\Delta t}.$$

作为例子, 考虑 4 个时间步长的二叉树, 唯一的离散分红 D 在第二个和第三个时间步长之间支付. 因此, $N = 4$, $k = 2$ (图 6.2). 二叉树顶点分红的现值为 $De^{-2r\Delta t}$, 因此, 顶点 (顶点 P) 的资产值为 $\widetilde{S} + De^{-2r\Delta t}$. 在节点 Q, 风险部分变成 $\widetilde{S}u$, 而分红的现值为 $De^{-r\Delta t}$. 经过一次向上跳和两次向下跳之后, 到达节点 R. 这个节点距离顶点有三个时间步长, 因此, 分红已经支付过了. 这样, 资产值简化为 $\widetilde{S}ud^2 = \widetilde{S}d$. 通常, 节点 (n, j)(距离顶点有 n 个时间步长, 并且 n 个时间步长中有 j

次向上跳) 的资产值为

$$\widetilde{S}u^j d^{n-j} + De^{-(k-n)r\Delta t}\mathbf{1}_{\{n\leqslant k\}}, \quad n=0,1,\cdots,N,\ j=0,1,\cdots,n.$$

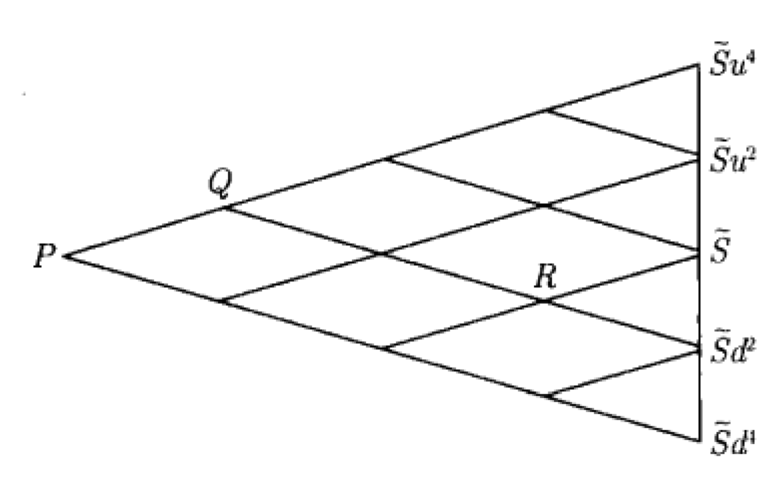


图 6.2 构造具有单一分红 D 的重接二叉树, $N=4$ 和 $k=2$, 节点 P,Q 和 R 上的资产值分别为 $\widetilde{S}+De^{-2r\Delta t}, \widetilde{S}u+De^{-r\Delta t}$ 和 $\widetilde{S}d$

一旦构造了离散资产价格的重接二叉树, 节点上的期权价值就可利用二叉树公式, 根据倒向推导来计算. 可以直接将上面的分离方法应用到具有多次分红的期权模型中.

6.1.4 提前实施特征和回购特征

由于美式期权的拥有者可以提前实施期权, 因此, 美式期权可以提前终止. 如果没有提前实施条款, 则可以利用通常的二叉树公式得到风险定价公式

$$V_{\text{cont}} = \frac{pV_u^{\Delta t} + (1-p)V_d^{\Delta t}}{R},$$

其中 V_{cont} 表示在期权的存续期内期权的持有价值. 为了体现美式期权的提前实施特征, 在每个二叉树节点上, 比较持有价值 V_{cont} 和期权的内在价值 (期权的实施收益). 将如下简单动态规划过程应用到二叉树每个节点上:

$$V = \max(V_{\text{cont}}, h(S)), \tag{6.1.13}$$

其中 $h(S)$ 为提前实施的收益函数.

例如, 考虑美式看跌期权的数值定价. 首先, 构造一般的二叉树. 设 N 表示二叉树总时间步长数. 令 S_j^n 和 P_j^n 分别表示标的资产和看跌期权在点 (n,j) 的价格. 看跌期权在点 (n,j) 上的内在价值为 $X-S_j^n$, 其中 X 为敲定价格. 因此, 将动态规划过程应用到每个节点得到

$$P_j^n = \max\left(\frac{pP_{j+1}^{n+1} + (1-p)P_j^{n+1}}{R}, X - S_j^n\right), \tag{6.1.14}$$

其中 $n=0,1,\cdots,N-1,\ j=0,1,\cdots,n$.

也容易修改二叉树模型, 使之适应在美式期权合约中体现额外的特征. 例如, 回购条款使得发行者可以按预先设定的回购价格随时购回该合约. 在回购时刻, 期权的持有者选择执行期权或者接受回购价格. 持有者和发行者的相互作用可以看成一个博弈期权. 考虑具有回购条款的美式看跌期权, 回购价格为 K. 为了定价该期权价格, 应用如下动态规划过程 (Kwok and Wu, 2000, 第五章):

$$P_j^n = \min\left(\max\left(\frac{pP_{j+1}^{n+1}+(1-p)P_j^{n+1}}{R}, X-S_j^n\right),\ \max(K, X-S_j^n)\right). \quad (6.1.15)$$

第一项 $\max\left(\frac{pP_{j+1}^{n+1}+(1-p)P_j^{n+1}}{R}, X-S_j^n\right)$ 表示没有回购特征的最优策略. 第二项 $\max(K, X-S_j^n)$ 为发行者的回购收益. 由于期权的持有者或者接受回购价格 K, 或者执行期权获得收益 $X-S_j^n$. 从发行者的立场上来看, 他可以选择回购或者不回购来最小化期权的价值. 因此, 具有回购条款美式看跌期权通过取上述两项的最小值得到.

Dempster 和 Hutton(1999) 在其文章中提出了具有各种嵌入特征的美式期权定价的数值格式, 而 Broadie 和 Detemple(1996) 比较了各种数值格式的性能.

6.1.5　三叉树模型

在二叉树模型中, 假设每个时间步长后资产价格都是一个双跳过程. 于是会问随机资产价格是一个三跳过程是否准确可信. 在三叉树模型中, 一个时间步长 Δt 后假设资产价格 S 为 uS, mS 或 dS, 其中 $u>m>d$. 考虑三叉树的期权定价公式如下:

$$V=\frac{p_1V_u^{\Delta t}+p_2V_m^{\Delta t}+p_3V_d^{\Delta t}}{R}, \quad R=e^{r\Delta t}, \quad (6.1.16)$$

其中 $V_u^{\Delta t}$ 表示一个时间步长之后资产价格为 uS 的期权价格, $V_m^{\Delta t}$ 和 $V_d^{\Delta t}$ 的含义相似. 新的三叉树模型具有更高的自由度, 可以通过选择参数来达到所期望的性质, 如避免截断误差的不稳定性、达到快速收敛等. 而通常要付出的代价就是降低计算效率, 因为和二叉树格式相比, 三叉树格式需要更多的计算步骤 (见习题 6.7). Cox 等(1979) 指出只基于无套利原则三叉树模型 (不像二叉树模型) 并不能推出期权定价公式. 然而, 资产价格的近似过程和套利策略的直接联系并不是本质的. 事实上, 任何未定权益都可以在一个合适的定价测度下通过计算条件期望得到其价格. 可以采用各种形式的离散过程来近似标的资产价格过程, 这样就导致了不同的数值格式.

回顾一下, 在风险中性测度下, 假设 $\ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$ 是一个均值为 $\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$, 方

差为 $\sigma^2\Delta t$ 的正态分布, 也可以写成

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \zeta, \tag{6.1.17}$$

其中 ζ 是均值为 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$, 方差为 $\sigma^2\Delta t$ 的正态随机变量. Kamrad 和 Ritchken (1991) 提出利用具有如下分布的离散随机变量 ζ^a 来近似 ζ:

$$\zeta^a = \begin{cases} v, & 概率为p_1, \\ 0, & 概率为p_2, \\ -v, & 概率为p_3, \end{cases}$$

其中 $v = \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}$, $\lambda \geqslant 1$ (见如下解释). 注意: 如果选择参数 $\lambda = 1$, $p_2 = 0$, 则 ζ^a 就简化为二叉树模型. 在三叉树模型中, 对应的参数 u, m, d 的值为 $u = e^v, m = 1$ 和 $d = e^{-v}$. 为了求得概率 p_1, p_2 和 p_3 的值, 选择 ζ^a 的均值和方差等于 ζ 的均值和方差. 这就得到

$$E[\zeta^a] = v(p_1 - p_3) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t, \tag{6.1.18a}$$

$$\operatorname{var}(\zeta^a) = v^2(p_1 + p_3) - v^2(p_1 - p_3)^2 = \sigma^2\Delta t. \tag{6.1.18b}$$

从方程 (6.1.18a) 可以看到 $v^2(p_1 - p_3)^2 = O(\Delta t^2)$. 如果想找具有 $O(\Delta t)$ 阶精度的近似, 就可以丢弃方程 (6.1.18b) 中这一项. 于是得到

$$v^2(p_1 + p_3) = \sigma^2\Delta t, \tag{6.1.18c}$$

式 (6.1.18c) 具有 $O(\Delta t)$ 精度. 如果没有这一简化, 则 p_1, p_2 和 p_3 的最终表达式会变得非常复杂. 最后, 概率之和等于 1. 因此,

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \tag{6.1.18d}$$

求解方程 (6.1.18a), (6.1.18c), (6.1.18d) 得到

$$p_1 = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}, \tag{6.1.19a}$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2}, \tag{6.1.19b}$$

$$p_3 = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}. \tag{6.1.19c}$$

现在要求 $\lambda \geqslant 1$ 的原因就非常明显了. 如果不是这样, 则 p_2 就是负数. 通过选择不同的 λ 值, 可以得到一系列的概率值. 如果选择 $\lambda = 1$, 则得到 $p_2 = 0$. 可以看到常用的 Cox-Ross-Rubinstein 二叉树格式刚好是该三叉树格式的一个特例.

尽管三叉树格式比二叉树格式需要更多的计算量, 但很容易看出, n 个时间步长的三叉树格式比 $2n$ 个时间步长的二叉树格式需要更少的计算量 (按照加法和乘法的数量来度量)(见习题 6.7). Kamrad 和 Ritchken(1991) 进行了数值测试, 发现在精度方面, n 个时间步长三叉树格式总是比 $2n$ 个时间步长的二叉树格式表现得更好. 在精度阶方面, 二叉树和三叉树格式以均一阶精度满足 Black-Scholes 方程 (见习题 6.10).

多标的期权

上面的方法可以直接推广到双标的期权. 首先, 假设标的资产价格 S_1 和 S_2 的联合密度服从二元对数正态分布. 设 σ_i 是资产价格 $S_i(i=1,2)$ 的波动率, 而 ρ 是两个对数正态分布扩散过程的相关系数. 令 S_i 和 $S_i^{\Delta t}$ 分别表示资产 i 当前时刻的价格和一个时间步长 Δt 之后的价格. 在风险中性测度下有

$$\ln \frac{S_i^{\Delta t}}{S_i} = \zeta_i, \quad i = 1, 2,$$

其中 ζ_i 是均值为 $\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)\Delta t$, 方差为 $\sigma_i^2 \Delta t$ 的正态分布, ζ_1 和 ζ_2 的瞬时相关系数为 ρ. 利用联合离散随机变量 $\{\zeta_1^a, \zeta_2^a\}$ 可以近似联合二元正态过程 $\{\zeta_1, \zeta_2\}$, 其中 $\{\zeta_1^a, \zeta_2^a\}$ 具有如下分布:

ζ_1^a	ζ_2^a	概率
v_1	v_2	p_1
v_1	$-v_2$	p_2
$-v_1$	$-v_2$	p_3
$-v_1$	v_2	p_4
0	0	p_5

其中 $v_i = \lambda_i \sigma_i \sqrt{\Delta t}(i=1,2)$. 这里有 5 个概率值有待确定. 在近似过程中, 令近似分布的一、二阶矩 (包括协方差) 等于连续过程对应的矩. 令它们的均值相等得到

$$E[\zeta_1^a] = v_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\Delta t, \tag{6.1.20a}$$

$$E[\zeta_2^a] = v_2(p_1 - p_2 - p_3 + p_4) = \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\Delta t. \tag{6.1.20b}$$

以 $O(\Delta t)$ 阶精度, 令它们对应的方差和协方差相等, 于是有

$$\operatorname{var}(\zeta_1^a) = v_1^2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \sigma_1^2 \Delta t, \tag{6.1.20c}$$

$$\operatorname{var}(\zeta_2^a) = v_2^2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \sigma_2^2 \Delta t, \tag{6.1.20d}$$

$$E[\zeta_1^a \zeta_2^a] = v_1 v_2(p_1 - p_2 + p_3 - p_4) = \sigma_1 \sigma_2 \rho \Delta t. \tag{6.1.20e}$$

为了使方程 (6.1.20c), (6.1.20d) 保持一致, 需令 $\lambda_1 = \lambda_2$. 取 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则有如下 4 个独立的方程, 这 4 个方程体现 5 个未知的概率值:

$$p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = \frac{\left(r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}}{\lambda \sigma_1},$$

$$p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = \frac{\left(r - \dfrac{\sigma_2^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}}{\lambda \sigma_2},$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 = \frac{\rho}{\lambda^2}.$$

注意: 概率之和必须为 1, 这就给出了剩下的一个条件:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$$

上述 5 个方程组成的线性方程组的解为

$$p_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(\frac{r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} + \frac{r - \dfrac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) + \frac{\rho}{\lambda^2}\right], \tag{6.1.21a}$$

$$p_2 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(\frac{r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} - \frac{r - \dfrac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{\rho}{\lambda^2}\right], \tag{6.1.21b}$$

$$p_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(-\frac{r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} - \frac{r - \dfrac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) + \frac{\rho}{\lambda^2}\right], \tag{6.1.21c}$$

$$p_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(-\frac{r - \dfrac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} + \frac{r - \dfrac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{\rho}{\lambda^2}\right], \tag{6.1.21d}$$

$$p_5 = 1 - \frac{1}{\lambda^2}, \quad \lambda \geqslant 1\text{为自由参数}. \tag{6.1.21e}$$

为方便起见, 令 $u_i = e^{v_i}$, $d_i = e^{-v_i}(i=1,2)$. 以 V 表示以资产 S_1 和 S_2 作为标的的期权价格. 设 $V^{\Delta t}_{u_1u_2}$ 表示一个时间步长之后资产价格为 u_1S_1 和 u_2S_2 的期权价格. $V^{\Delta t}_{u_1d_2}, V^{\Delta t}_{d_1u_2}$ 和 $V^{\Delta t}_{d_1d_2}$ 具有相似的含义. 以 $V^{\Delta t}_{0,0}$ 表示一个时间步长之后资产价格没有发生跳跃的期权价格, 则双标的三叉树模型对应的五点公式可以表示为 (Kamrad and Ritchken, 1991)

$$V = (p_1V^{\Delta t}_{u_1u_2} + p_2V^{\Delta t}_{u_1d_2} + p_3V^{\Delta t}_{d_1d_2} + p_4V^{\Delta t}_{d_1u_2} + p_5V^{\Delta t}_{0,0})/R. \tag{6.1.22}$$

特别地, 当取 $\lambda = 1$ 时有 $p_5 = 0$, 上述五点公式退化为四点公式.

由于上述五点公式中存在自由参数 λ, 这就提供了一定的灵活性, 以研究更快收敛的离散定价公式. 通过选择合适的 λ, Kamrad 和 Ritchken (1991) 从数值实验中观察到通过五点公式得到的数值解比四点公式得到的解总是更光滑、更快地收敛到连续解. 类似地, 可以将本节的方法推广到以三个资产作为标的的期权模型 (见习题 6.13).

6.1.6　前向打靶法

对于路径相关期权, 期权的价值依赖于路径函数 $F_t = F(S,t)$, 这个函数规定了路径依赖的具体特征. 例如, 路径相关性可以由在某个给定时期内资产价格达到过的最小值来定义. 为了反映路径相关性对于期权价值的影响, 有必要找出每个节点上所有可能的 F_t 值对应的期权值. 为了保证数值格式的计算效率, 要求可以很容易地利用 F_t 和 $S_{t+\Delta t}$ 计算出 $F_{t+\Delta t}$(这是由于路径函数具有马尔可夫性), 并且 $F(S,t)$ 的格点数目不能随着二叉树步长数目的增加而增长太快. 在网格树的每个节点添加一个辅助向量来模拟 F_t 和 S_t 的相关变化, 这种方法被称为**前向打靶法** (forward shooting grid (FSG) method).

前向打靶法首先由 Hull 和 White(1993) 提出, 用于定价美式和欧式的亚式期权和回望期权. Barraquand 和 Pudet(1996) 系统地构造了利用前向打靶法定价路径相关期权的一般框架. Forsyth 等(2002) 证明利用前向打靶法定价亚式算数平均期权的收敛性依赖于相邻网格节点资产平均值的插值方法. Jiang 和 Dai (2004) 利用黏性解证明了对于美式期权和欧式亚式算术平均期权, 前向打靶法是一致收敛的.

对于一些路径相关奇异期权, 如具有巴黎式窗口特征的敲出期权 (见习题 6.14), 通常并不能得到该期权的定价方程. 然而, 通过给出路径相关变量和资产价格的演化过程, 就可以利用前向打靶法来定价这些奇异期权.

考虑三叉树模型, 资产价格向上、不变和向下的概率分别表示为 p_u, p_0 和 p_d. 以 $V^n_{j,k}$ 表示 n 时间层 (从树顶端的 n 个时间步长) 上路径相关奇异期权的价值. 指

标 j 表示从初始资产价值之后的 n 步运动中 j 次向上跳, 而 k 表示增加的状态变量, F_t 表示三叉树节点 (n,j) 上新增状态变量 F_t 各种可能值的数目. 令 G 表示在 Δt 时间内 F_t 和 S_t 的相关性的函数, 即

$$F_{t+\Delta t} = G(t, F_t, S_{t+\Delta t}). \tag{6.1.23}$$

令 $g(k,j;n)$ 表示网格函数, 该函数是相关函数 G 的离散化. 前向打靶法三叉树格式可以表示为

$$V_{j,k}^n = \left[p_u V_{j+1,g(k,j+1;n)}^{n+1} + p_0 V_{j,g(k,j;n)}^{n+1} + p_d V_{j-1,g(k,j-1;n)}^{n+1}\right] e^{-r\Delta t}, \tag{6.1.24}$$

其中 $e^{-r\Delta t}$ 为 Δt 时间内的贴现因子. 当从节点 (n,j) 到 $(n+1,j+1)$ 资产值只向上跳一次时, 计数指标从 k 变化到 $g(k,j+1;n)$. 当资产值不变或者向下跳时, 可以类似地调整 k. 为了定价特定的路径相关期权, 前向打靶法的设计需要明确网格函数 $g(k,j;n)$. 对于各种类型的路径相关期权, 描述如何找到 $g(k,j;n)$, 这包括具有巴黎式特征的敲出障碍期权和浮动执行价格的算术平均期权.

1. 具有巴黎式特征的敲出障碍期权

当资产价格触碰到障碍边界时, 无论触碰是多么短暂, 障碍期权都会敲出, 这种一触碰就敲出的期权具有很多不利特点. 当资产价格非常接近障碍边界时, 对冲障碍期权也变得非常困难. 在外汇交易市场中, 在常见障碍水平的附近, 由于存在人为操纵价格以激活敲出条件的原因, 所以市场波动率通常会增加.

为了克服瞬间触碰的影响和短时间的价格操纵, 文献中提出了具有各种巴黎式敲出条款的期权. 只有当标的资产价格越过障碍边界的时间超过预先给定的时间长度时, 才会敲出这类巴黎式类型期权. 这种穿越边界的时间可以是累计的, 也可以是连续的. 在现实的市场操作中, 穿越边界的时间通常是在离散时刻观测计数的, 而不是连续的, 因此, 只统计在观测时刻穿越边界的时间数目. 希望得到了具有累计巴黎式特征敲出障碍期权的前向打靶格式. 而构造具有移动窗口巴黎式特征的前向打靶格式留作习题 6.14. Lau 和 Kwok(2004) 应用前向打靶法对具有可赎回巴黎式类型的可转债进行了定价.

累计巴黎式特征

设 M 表示预先给定的累计穿越数目, 该数目在障碍期权中用于标识激活敲出. 令 k 是一个正整数, 用于统计到目前为止穿越的数目. 以 B 表示敲出期权的下障碍边界. 现在在每个节点上增加的路径相关状态变量用指标 k 表示, k 值不改变, 除非在一个时间步长观测到资产价格穿越障碍边界. 令 $V_{j,k}^n$ 表示三叉树节点 (n,j) 上累计巴黎式计数为 k 时的期权价值, x_j 表示 $x = \ln S$, 对应着三叉树上 j 次向上跳. 当 $n\Delta t$ 刚好是观测时刻时, 如果资产价格 S 落在边界 B 之下, 则指标 k 值增

加 1, 也就是说, $x_j \leqslant \ln B$. 为了模拟累计巴黎式特征的路径相关性, 一个比较合适的选择就是定义网格函数 $g_{\text{cum}}(k,j)$ 为

$$g_{\text{cum}}(k,j) = k + \mathbf{1}_{\{x_j \leqslant \ln B\}}. \tag{6.1.25}$$

注意: $g_{\text{cum}}(k,j)$ 并不依赖于 n, 因为相关性函数 G 并不依赖于时间. 图 6.3 是描述构造网格函数 $g_{\text{cum}}(k,j)$ 的示意图.

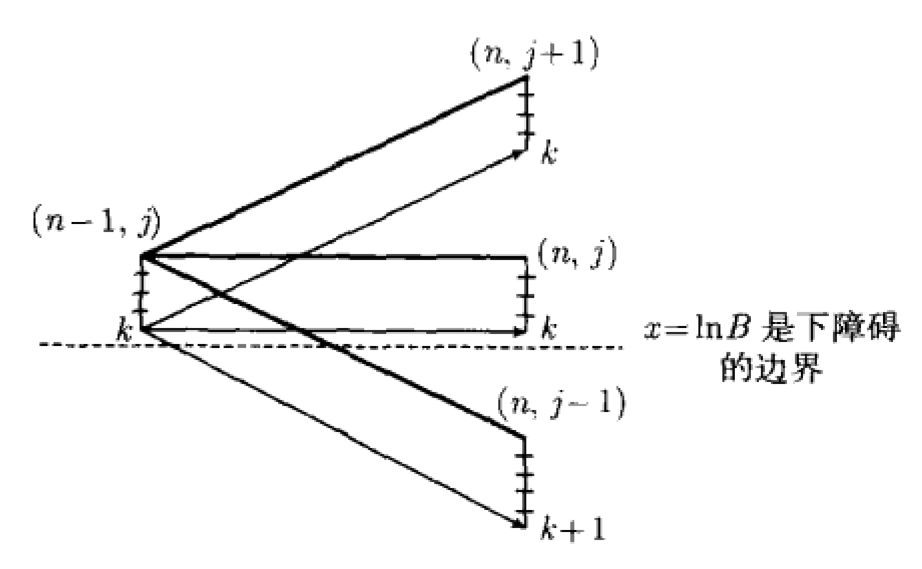


图 6.3　描述构造网格函数 $g_{\text{cum}}(k,j)$ 的示意图, $g_{\text{cum}}(k,j)$ 用于模拟累计巴黎式特征的路径相关性, 下障碍边界 $\ln B$ 位于三叉树两排水平节点之间, 其中时间层 n 为观测时刻

如果 $n\Delta t$ 不是观测时刻, 则三叉树的计算过程像计算普通期权一样. 定价具有累计巴黎式特征的前向打靶法可以总结为

$$V_{j,k}^{n-1} = \begin{cases} p_u V_{j+1,k}^n + p_0 V_{j,k}^n + p_d V_{j-1,k}^n, & n\Delta t \text{ 不是观测时刻}, \\ p_u V_{j+1,g_{\text{cum}}(k,j+1)}^n + p_0 V_{j,g_{\text{cum}}(k,j)}^n & \\ \quad + p_d V_{j-1,g_{\text{cum}}(k,j-1)}^n, & n\Delta t \text{ 是观测时刻}. \end{cases} \tag{6.1.26}$$

设 M 是激活敲出期权的累计穿越次数. 假设在敲出时没有任何回收, 当 $k = M$ 时, 期权的价值为 0. 在典型的前向打靶法计算中, 从 $V_{j,M-1}^n$ 开始, 然后是 $V_{j,M-2}^n, \cdots$, 直到 k 为零停止. 通过在方程 (6.1.26) 中设置 $k = M-1$ 来计算 $V_{j,M-1}^n$, 并注意到对所有的 n 和 j, $V_{j,M}^n = 0$. 实际上, $V_{j,M-1}^n$ 和标准障碍期权在同一节点具有相同的价值. 在累积记数下, 到目前为止, 具有 $M-1$ 次穿越的期权再需要一次穿越障碍条件就敲出.

注释　(1) 对具有连续观测的累计巴黎式特征期权, 其价格可以通过设置所有的时间步长都为观测时刻得到.

(2) 定价具有累计巴黎式特征的期权, 需要 M 次穿越障碍边界才能敲出, 其计算时间是普通障碍期权时间的 M 倍.

(3) 连续巴黎式特征的期权只统计资产价格在敲出区域的连续时间数. 一旦资产价格离开敲出区域, 计数就重新设置为 0. 假设 B 是向下障碍边界, 前向打靶法

的恰当网格函数 $g_{\text{con}}(k,j)$ 为

$$g_{\text{con}}(k,j) = (k+1)\mathbf{1}_{\{x_j \leqslant \ln B\}}. \tag{6.1.27}$$

2. 浮动敲定价格的算术平均看涨期权

为了定价亚式期权, 需在每个节点找到对应所有可能的路径函数 $F(S,t)$ 的期权价值. 不幸的是, 对算术平均期权, 在二叉树节点上所有可能平均值的数目按照 2^n 指数增长, 其中 n 为从二叉树顶点到当前的时间步长数. 而二叉树格式在每个节点上对可能 F 值的数目没有作任何限制, 该格式在计算上是不可行的. 一个可能的补救措施是将 F 的可能取值限制在一个预先确定的集合中, 其他 F 对应的期权值利用预先确定的 F 对应的已知期权值进行线性插值来得到 (Barraquand and Pudet, 1996; Forsyth et al., 2002). 插值方法包括最近节点插值、线性插值和二次插值.

通过构造前向打靶, 给出如何利用插值技术来定价浮动敲定价格算术平均看涨期权. 首先, 定义算数平均状态变量

$$A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_u\, du. \tag{6.1.28a}$$

浮动敲定亚式看涨期权的终止收益函数为 $\max(S_T - A_T, 0)$, 其中 A_T 为 $[0,T]$ 时间内 S_T 的算术平均. 对给定的时间步长 Δt, 固定步长宽度为

$$\Delta W = \sigma\sqrt{\Delta t}, \quad \Delta Y = \rho \Delta W, \rho < 1,$$

定义时间 n 层上 S_t 和 A_t 的可能值为

$$S_j^n = S_0 e^{j\Delta W}, \quad A_k^n = S_0 e^{k\Delta Y},$$

其中 j 和 k 为整数, S_0 为资产的初始价格. 取 $1/\rho$ 为整数. 整数 $1/\rho$ 选择得越大, 资产平均值就划分得越细. 对方程 (6.1.28a) 关于 t 进行微分, 于是得到

$$d(tA_t) = S_t\, dt,$$

其离散形式为

$$A_{t+\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)A_t + \Delta t\ S_{t+\Delta t}}{t + 2\Delta t}. \tag{6.1.28b}$$

在节点 (n,j) 上考虑二叉树过程, 假设资产价格 S_j^n 向上跳为 S_{j+1}^{n+1}, 而 A_t 相应地由 A_k^n 变为新值 $A_{k^+(j)}^{n+1}$. 设 $A_0^0 = S_0$, 方程 (6.1.28b) 等价为

$$A_{k^+(j)}^{n+1} = \frac{(n+1)A_k^n + S_{j+1}^{n+1}}{n+2}. \tag{6.1.29a}$$

类似地, 资产价格 S_j^n 向下跳为 S_{j-1}^{n+1}. A_k^n 变为 $A_{k^-(j)}^{n+1}$, 其中

$$A_{k^-(j)}^{n+1} = \frac{(n+1)A_k^n + S_{j-1}^{n+1}}{n+2}. \tag{6.1.29b}$$

注意: 对某些整数 k', 通常 $A_{k^\pm(j)}^{n+1}$ 和 $A_{k'}^{n+1} = S_0 e^{k'\Delta Y}$ 并不相等. 定义整数 $k_{\text{floor}}^{\pm}$, 使得 $A_{k_{\text{floor}}^{\pm}}^{n+1}$ 是小于等于 $A_{k_\pm(j)}^{n+1}$ 的最大可能的 $A_{k'}^{n+1}$ 值. 对应地, 计算指标 $k^\pm(j)$,

$$k^\pm(j) = \frac{\ln \dfrac{(n+1)e^{k\Delta Y} + e^{(j\pm1)\Delta W}}{n+2}}{\Delta Y}. \tag{6.1.30}$$

设置 $k_{\text{floor}}^+ = \text{floor}(k^+(j))$, $k_{\text{floor}}^- = \text{floor}(k^-(j))$, 其中 $\text{floor}(x)$ 表示小于等于 x 的最大整数.

在第 n 时间层上 k 可能的范围是多少? 观察到平均值 A_t 必须落在最大值 S_n^n 和最小值 S_{-n}^n 之间, 因此, k 必须满足 $-\dfrac{n}{\rho} \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{\rho}$. 除非假设 ρ 是一个非常小的值, 否则预先给定 A_t 值的数目通常比较容易估计.

考虑 A_ℓ^n, 其中 ℓ 通常是一个实数. 令 $\ell_{\text{floor}} = \text{floor}(\ell)$, 令 $\ell_{\text{ceil}} = \ell_{\text{floor}} + 1$, 则 A_ℓ^n 落在 $A_{\ell_{\text{floor}}}^n$ 和 $A_{\ell_{\text{ceil}}}^n$ 之间. 尽管在二叉树中, ℓ 可能值的数目随着时间步长的数目是指数增长的, 但是在 n 时间层上 ℓ_{floor} 和 ℓ_{ceil} 是一个整数, 并且落在 $-\dfrac{n}{\rho}$ 和 $\dfrac{n}{\rho}$ 之间. 令 $c_{j,\ell}^n$ 表示节点 (n,j) 上具有平均值 A_ℓ^n 的亚式看涨期权值, $c_{j,\ell_{\text{floor}}}^n$ 和 $c_{j,\ell_{\text{ceil}}}^n$ 具有相似的含义. 对于一个非整数值 ℓ, 利用相邻节点的期权值进行插值来近似 $c_{j,\ell}^n$ 的值. 利用 $c_{j,\ell_{\text{floor}}}^n$ 和 $c_{j,\ell_{\text{ceil}}}^n$ 通过如下线性插值来近似 $c_{j,\ell}^n$:

$$c_{j,\ell}^n = \epsilon_\ell c_{j,\ell_{\text{ceil}}}^n + (1-\epsilon_\ell) c_{j,\ell_{\text{floor}}}^n, \tag{6.1.31}$$

其中

$$\epsilon_\ell = \frac{\ln A_\ell^n - \ln A_{\ell_{\text{floor}}}^n}{\Delta Y}.$$

通过利用上述线性插值公式 (连续地取 ℓ 为 $k^+(j)$ 和 $k^-(j)$), 就得到了用于定价浮动执行价格的算术平均看涨期权的线性插值前向打靶法,

$$\begin{aligned} c_{j,k}^n &= e^{-r\Delta t}\left[p c_{j+1,k^+(j)}^{n+1} + (1-p) c_{j-1,k^-(j)}^{n+1}\right] \\ &= e^{-r\Delta t}\left\{p\left[\epsilon_{k^+(j)} c_{j+1,k_{\text{ceil}}^+}^{n+1} + (1-\epsilon_{k^+(j)}) c_{j+1,k_{\text{floor}}^+}^{n+1}\right]\right. \\ &\quad \left. + (1-p)\left[\epsilon_{k^-(j)} c_{j-1,k_{\text{ceil}}^-}^{n+1} + (1-\epsilon_{k^-(j)}) c_{j-1,k_{\text{floor}}^-}^{n+1}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{6.1.32}$$

其中 $n = N-1, \cdots, 0, j = -n, \cdots, n, k$ 为 $-\dfrac{n}{\rho}$ 和 $\dfrac{n}{\rho}$ 之间的整数, $k^{\pm}(j)$ 由 (6.1.30) 给出, 而

$$\epsilon_{k^{\pm}(j)} = \frac{\ln A_{k^{\pm}(j)}^{n+1} - \ln A_{k_{\text{floor}}^{\pm}}^{n+1}}{\Delta Y}. \tag{6.1.33}$$

到期日条件为

$$\begin{aligned} c_{j,k}^{N} &= \max(S_j^N - A_k^N, 0) \\ &= \max(S_0 e^{j\Delta W} - S_0 e^{k\Delta Y}, 0), \quad j = -N, \cdots, N, \end{aligned} \tag{6.1.34}$$

k 为 $-\dfrac{N}{\rho}$ 和 $\dfrac{N}{\rho}$ 之间的整数. 在每个终止节点 (N, j), 需要计算所有 k 值对应的所有可能的亚式看涨期权收益值. 利用倒向推导过程, 在节点 (n, j) 上, 需要利用方程 (6.1.32) 求得落在 $-\dfrac{n}{\rho}$ 和 $\dfrac{n}{\rho}$ 之间所有可能的 k 值对应的看涨期权值. 对于给定的整数 k, 利用方程 (6.1.30) 和 (6.1.33) 分别计算 $k^{\pm}(j)$ 和 $\epsilon_{k^{\pm}(j)}$.

注意: Forsyth等(2002) 证明了当时间步长的数目很大时, 利用最近网格点插值的前向打靶法会出现很大的误差. 他们也证明了当利用线性插值时, 前向打靶法收敛到正确解加一个常数误差, 而这个常数误差并不能通过减小时间步长来减小, 但是采用节点值的二次插值可以纠正一些不足之处.

6.2 有限差分算法

有限差分方法是非常流行的数值算法, 用来求解那些可以通过偏微分方程模拟的科学工程问题. Brennan 和 Schwart (1978) 最早将有限差分方法应用到期权定价. Tavella 和 Randall (2000) 对利用有限差分方法定价各种金融产品进行了总结. 在构造有限差分格式时, 将期权满足的方程中的微分算子采用有限差分算子来近似. 这也是该方法名称的由来.

在本节中, 首先给出如何构造期权模型的显式有限差分格式. 有趣的是, 二叉树格式和三叉树格式都属于显式有限差分格式. 在显式格式中, 新时间层上节点的期权值可以显式地通过旧时间层上节点的已知期权值计算. 然而, 如果空间微分算子的离散化体现了新时间层上节点的期权值, 则有限差分的每步计算都需要求解一个线性方程组. 本节讨论如何构造隐式有限差分格式, 并且利用有效的 Thomas 算法求解线形方程组的解, 也研究如何利用有限差分法来求解美式类型的期权模型. 在自由边界固定方法中, 利用一个变量变换, 使得最佳实施价格对应的自由边界变成了解区域内的一个**固定** (fixed) 边界. 不像二叉树和三叉树格式, 有限差分格式的构造过程允许直接体现期权模型的边界条件. 本节还给出处理障碍期权中 Dirichlet

边界和回望期权中 Neumann 条件的方法. 为了克服由“初始”条件具不可微性质带来的计算问题, 引入一些有效的光滑技术来减小由于到期日收益函数不光滑带来的精度误差.

6.2.1　构造显示格式

引入变量 $x=\ln S$, 欧式期权的 Black-Scholes 方程变为

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}-rV,\quad -\infty<x<\infty, \tag{6.2.1a}$$

其中 $V=V(x,\tau)$ 为期权价值. 这里取 τ 作为时间变量, 定义 $W(x,\tau)=e^{r\tau}V(x,\tau)$, 则 $W(x,\tau)$ 满足

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x},\quad -\infty<x<\infty. \tag{6.2.1b}$$

为了推导有限差分算法, 首先将连续问题的求解区域 $\{(x,\tau):-\infty<x<\infty,\tau\geqslant 0\}$ 进行离散. 采用有限截断区域 $[-M_1,M_2]$ 来近似连续问题的无限区域, 其中 M_1 和 M_2 为两个充分大的正数, 使得无限的边界条件可以比较精确地应用在有限区间上. 然后用均匀网格点 $(j\Delta x,n\Delta\tau)(j=0,1,\cdots,N+1)$ 覆盖离散区域, 其中 $(N+1)\Delta x=M_1+M_2$, $n=0,1,2,\cdots$ (图 6.4). 空间步长 Δx 和时间步长 $\Delta\tau$ 通常是独立的. 在有限差分算法中, 只能得到这些节点上的期权的价值.

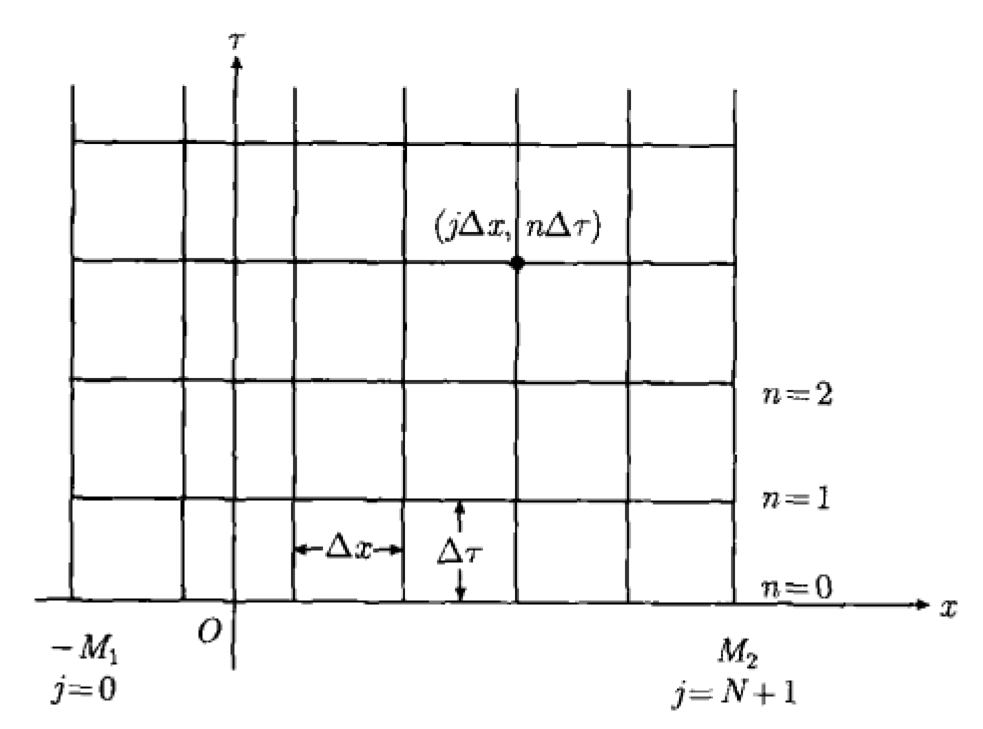


图 6.4　均匀空间步长 Δx 和时间步长 $\Delta\tau$ 的有限差分网格, 在节点 $(j\Delta x,n\Delta\tau)(j=1,2,\cdots,N,\ n=1,2,\cdots)$ 上计算期权的数值解, 边界的期权值 ($j=0$ 和 $N+1$) 有期权模型的边界条件给出, 零时间层上的 “初始” 值 V_j^0 由到期日的收益函数给出

下面开始离散方程 (6.2.1b), 令 W_j^n 表示 $W(j\Delta x,n\Delta\tau)$ 的数值近似. 方程

(6.2.1b) 的时间导数和空间导数可以利用如下有限差分算子来近似:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}(j\Delta x, n\Delta\tau) \approx \frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta\tau} \quad (\text{向前差分}),$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta\tau) \approx \frac{W_{j+1}^n - W_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (\text{中心差分}),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(j\Delta x, n\Delta\tau) \approx \frac{W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (\text{中心差分}).$$

相似地, V_j^n 表示 $V(j\Delta x, n\Delta\tau)$ 的数值近似. 注意到

$$W_j^{n+1} = e^{r(n+1)\Delta\tau} V_j^{n+1}, \quad W_j^n = e^{rn\Delta\tau} V_j^n,$$

然后消去 $e^{rn\Delta\tau}$, 就得到 Black-Scholes 方程的explicit (显式)时间向前空间中心 (FTCS) 的有限差分格式 (见方程 (6.2.1a))

$$V_j^{n+1} = \left[V_j^n + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{2\Delta x}\left(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n\right)\right] e^{-r\Delta\tau} \tag{6.2.2}$$

由于 V_j^{n+1} 可以显式地表示成第 n 时间层上的期权值, 于是可以直接根据已知的值 V_{j-1}^n, V_j^n 和 V_{j+1}^n 来计算 V_j^{n+1}. 假设知道零时间层上的初始值 $V_j^0 (j = 0, 1, \cdots, N+1)$, 则可以采用格式 (6.2.2) 来计算出第一时间层上的 $V_j^1 (j = 1, 2, \cdots, N)$. 而第一时间层上的两个端点值 V_0^1 和 V_{N+1}^1 由期权模型的数值边界条件给出, 因而边界条件 naturally incorporated (自然地被体现)在有限差分格式中. 例如, 障碍期权的 Dirichlet 边界条件和回望期权的 Neumann 边界条件都自然地嵌入到了有限差分格式中 (见 6.2.6 小节). 按照类似的方式沿着时间 τ 的方向计算每个时间层 $(\tau = 2\Delta\tau, 3\Delta\tau, \cdots)$. 这和网格树方法的倒向计算过程类似.

下面研究两层四点显式格式

$$V_j^{n+1} = b_1 V_{j+1}^n + b_0 V_j^n + b_{-1} V_{j-1}^n, \quad j = 1, 2, \cdots, N, n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.2.3}$$

其中系数 b_1, b_0 和 b_{-1} 根据具体情况确定. 例如, 上述的 FTCS 格式对应于

$$b_1 = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{2\Delta x}\right] e^{-r\Delta\tau},$$

$$b_0 = \left[1 - \sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\right] e^{-r\Delta\tau},$$

$$b_{-1} = \left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{2\Delta x}\right] e^{-r\Delta\tau}.$$

重要的是, 当重合条件 $ud = 1$ 成立时, 二叉树和三叉树格式都是方程 (6.2.3) 的特例. 假设取 $\Delta x = \ln u$, 则 $\ln d = -\Delta x$, 二叉树模型可以表示为

$$V^{n+1}(x) = \frac{pV^n(x+\Delta x) + (1-p)V^n(x-\Delta x)}{R}, \quad x = \ln S, R = e^{r\Delta\tau}, \tag{6.2.4}$$

其中 $V^{n+1}(x), V^n(x+\Delta x)$ 和 $V^n(x-\Delta x)$ 类似于 c, c_u 和 c_d(见方程 (2.1.21)). 上述二叉树表达式对应着如下系数:

$$b_1 = p/R, \quad b_0 = 0, \quad b_{-1} = (1-p)/R.$$

类似地, 选择 $\Delta x = \ln u = -\ln d$ 和 $m = 1$, 三叉树格式可以表示为

$$V^{n+1}(x) = \frac{p_1 V^n(x+\Delta x) + p_2 V^n(x) + p_3 V^n(x-\Delta x)}{R}, \tag{6.2.5}$$

该格式也属于显式 FTCS 格式.

尽管通常的有限差分算法可以求出时间层 $\tau = n\Delta\tau$ 上所有节点的期权价值, 但也可以利用典型的二叉树或三叉树求出单资产 S 处时间 $\tau = n\Delta\tau$ 层上的期权值. 下面举例说明三叉树格式和有限差分之间的关系. 假设三叉树的顶点为 j 层上的节点 x_j(假设 x 为 $\ln S$), 从当前时刻起, n 个时间步长到达到期日 $\tau = 0$. 在网格树计算中采用倒向计算过程, 三叉树格式利用已知值 $V^{n-1}(x_{j-1}), V^{n-1}(x_j), V^{n-1}(x_{j+1})$ 来计算 $V^n(x_j)$. 降低一个时间层, 计算 $V^n(x_j)$ 需要 5 个节点值 $V^{n-2}(x_{j-2})$, $V^{n-2}(x_{j-1}), \cdots, V^{n-2}(x_{j+2})$. 以此类推, 沿着 $\tau = 0$ 上的 $2n+1$ 个值 $V^0(x_{j-n})$, $V^0(x_{j-n+1}), \cdots, V^0(x_{j+n})$ 可以计算出 $V^n(x_j)$. 称 $(x_j, n\Delta\tau)$, $(x_{j-n}, 0)$ 和 $(x_{j+n}, 0)$ 构成的三角形区为计算 $V^n(x_j)$ 的**相关区域**(domain of dependence)(图 6.5), 这是因为计算 $V^n(x_j)$ 需要利用相关区域内的所有点. 而网格树的计算只需要利用三角形相关区域内的期权值. 当只要求计算给定 S 和 τ 上的单一期权值时, 这种方法比较有效.

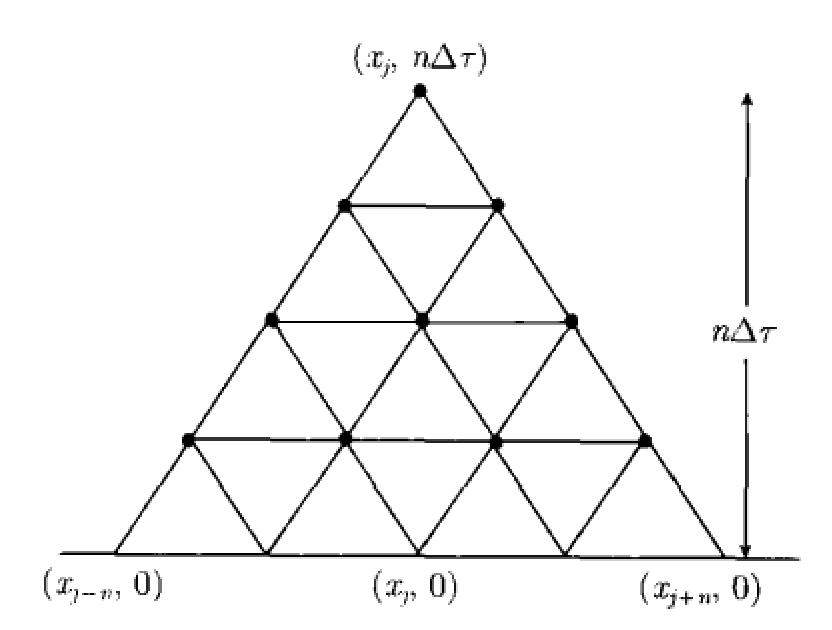


图 6.5　n 个时间步长到期, 三叉树格式的相关区域

假设相关区域不体现边界点, 则期权模型的边界条件对离散模型的数值解不产生任何影响. 当边界点在无限远时, 这种对边界条件的忽略并不会降低计算的精度. 正如在普通期权模型中, $x = \ln S$ 的定义域为无限区域. 当 x 的定义域为有限的时, 这就不再成立, 如障碍期权模型. 为了达到较高的计算精度, 考虑边界条件对数值格式的影响是很重要的. 期权模型中辅助条件的数值近似问题在 6.2.6 小节中再研究.

注意到在二叉树模型中, 空间步长 Δx 和时间步长 $\Delta\tau$ 是相关的. 在 Cox-Ross-Rubinstein 格式中, 他们给出 $\Delta x = \ln u = \sigma\sqrt{\Delta\tau}$ 或 $\sigma^2\Delta\tau = \Delta x^2$. 然而, 在三叉树格式中, 他们的关系满足 $\lambda^2\sigma^2\Delta\tau = \Delta x^2$, 其中自由参数 λ 可以假设为任何可能值 (但是 λ 的选择有些限制, 如 $\lambda \geqslant 1$).

显式格式似乎比较容易处理, 然而, 和 6.2.2 小节的隐式格式相比, 它们具有较低的精度, 而且基于数值稳定原因, 显式格式的时间步长不能选择太大. 精度的阶和稳定性概念将在 6.2.5 小节进行研究.

6.2.2 隐式格式及实现问题

假设 $-rV$ 和空间导数通过时间层 n 和 $(n+1)$ 的中心差分算子平均来近似,

$$-rV\left(j\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta\tau\right) \approx -\frac{r}{2}\left(V_j^n + V_j^{n+1}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left(j\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta\tau\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(j\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta\tau\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right),$$

而时间变量导数利用向前差商近似

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}\left(j\Delta x, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta\tau\right) \approx \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta\tau},$$

于是得到如下两层隐式有限差分格式:

$$V_j^{n+1} = V_j^n + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(\frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n + V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{2\Delta x}\left(\frac{V_{j+1}^n-V_{j-1}^n+V_{j+1}^{n+1}-V_{j-1}^{n+1}}{2}\right)\\
&-r\Delta\tau\left(\frac{V_j^n+V_j^{n+1}}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{6.2.6}
$$

已经知道, 该格式为**Crank-Nicolson 格式** (Crank-Nicolson scheme).

上述 Crank-Nicolson 格式是一般两层六点格式的特例,

$$
\begin{aligned}
a_1V_{j+1}^{n+1}+a_0V_j^{n+1}+a_{-1}V_{j-1}^{n+1}&=b_1V_{j+1}^n+b_0V_j^n+b_{-1}V_{j-1}^n,\\
j&=1,2,\cdots,N,n=0,1,\cdots.
\end{aligned}
\tag{6.2.7}
$$

很容易注意到 Crank-Nicolson 对应着

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{\sigma^2}{4}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta x},\\
a_0 &= 1+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}+\frac{r}{2}\Delta\tau,\\
a_{-1} &= -\frac{\sigma^2}{4}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta x}
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\sigma^2}{4}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta x},\\
b_0 &= 1-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}-\frac{r}{2}\Delta\tau,\\
b_{-1} &= \frac{\sigma^2}{4}\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta x}.
\end{aligned}
$$

方程 (6.2.7) 给出的格式包含了很多其他的隐式有限差分格式, 这些格式都可以通过系统的推导方式得到 (Kwok and Lau, 2001b).

假设第 n 时间层上的值 V_j^n 全已知, 求解 V_j^{n+1} 时需要对一个三对角方程组求逆变换. 这就是为什么称这类格式为**隐式**(implicit) 格式的原因. 两层六点格式可以表示为如下矩阵形式:

$$
\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
a_{-1} & a_0 & a_1 & \ddots & & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & 0 & \ddots & \ddots & a_1\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{-1} & a_0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
V_1^{n+1}\\ V_2^{n+1}\\ \vdots\\ V_N^{n+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_N
\end{pmatrix},
\tag{6.2.8}
$$

其中

$$c_1 = b_1 V_2^n + b_0 V_1^n + b_{-1} V_0^n - a_{-1} V_0^{n+1},$$
$$c_N = b_1 V_{N+1}^n + b_0 V_N^n + b_{-1} V_{N-1}^n - a_1 V_{N+1}^{n+1},$$
$$c_j = b_1 V_{j+1}^n + b_0 V_j^n + b_{-1} V_{j-1}^n, \quad j = 2, \cdots, N-1.$$

上述三对角方程组的解可以利用著名的**Thomas 算法**(Thomas algorithm) 得到. 该算法可以非常有效地实现高斯消去过程, 下面简要地给出该算法的思路.

Thomas 算法

考虑如下的三对角方程组:

$$-a_j V_{j-1} + b_j V_j - c_j V_{j+1} = d_j, \quad j = 1, 2, \cdots N, \tag{6.2.9}$$

满足 $V_0 = V_{N+1} = 0$. 这种形式具有一般性, 它的系数根据不同的方程而变化. 消去过程的第一步是在每个方程中消去 V_{j-1}, 将方程组化简为上三角形式. 从第一个方程开始, 将 V_1 表示成 V_2 和其他已知量的形式. 将这个关系代入第二个方程得到一个只体现 V_2 和 V_3 的新方程. 再一次, 将 V_2 表示成 V_3 和其他已知量的形式. 然后代入到第三个方程 …….

假设前 k 个方程化简为如下形式:

$$V_j - e_j V_{j+1} = f_j, \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

利用第 k 个方程将原先第 $k+1$ 个方程变成相同的形式,

$$V_{k+1} - e_{k+1} V_{k+2} = f_{k+1}. \tag{6.2.10a}$$

现在, 考虑

$$V_k - e_k V_{k+1} = f_k$$

和

$$-a_{k+1} V_k + b_{k+1} V_{k+1} - c_{k+1} V_{k+2} = d_{k+1},$$

从这两个方程消去 V_k, 得到一个体现 V_{k+1} 和 V_{k+2} 的新方程

$$V_{k+1} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1} - a_{k+1} e_k} V_{k+2} = \frac{d_{k+1} + a_{k+1} f_k}{b_{k+1} - a_{k+1} e_k}. \tag{6.2.10b}$$

比较方程 (6.2.10a) 和 (6.2.10b), 用 j 代替临时变量 $k+1$, 得到如下 e_j 和 f_j 的递推关系:

$$e_j = \frac{c_j}{b_j - a_j e_{j-1}}, \quad f_j = \frac{d_j + a_j f_{j-1}}{b_j - a_j e_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \cdots N, \tag{6.2.11a}$$

对应着边界值 $V_0 = 0$ 有

$$e_0 = f_0 = 0. \tag{6.2.11b}$$

从上述初始值开始, 利用递推关系 (6.2.11a) 可以得到所有 e_j 和 $f_j(j = 1, 2, \cdots, N)$ 的值. 一旦方程组变成了上三角形式, 就可以从 $V_{N+1} = 0$ 开始, 通过倒向过程求解出 $V_N, V_{N-1}, \cdots, V_1$.

Thomas 算法是一种非常有效的算法, 其中每个节点的三对角方程组 (6.2.8) 都可以通过 4 个加/减运算和 6 个乘/除运算解出. 与显式格式相比较可以发现, 隐式格式每步都需要两倍的运算量. 采用 Thomas 算法求解隐式格式对应的三对角方程, 并没有增加多少计算复杂度.

为了控制截断误差增长, 注意到如果 $|e_j| < 1$, 则格式是稳定的, 因此, V_{j+1} 的误差不会被放大, 并传播到 V_j (见方程 (6.2.10a)). 保证 $|e_j| < 1$ 的一组充分条件是

$$a_j > 0, b_j > 0, c_j > 0 \quad 和 \quad b_j > a_j + c_j.$$

幸运的是, 如果在 Crank-Nicolson 格式中选择合适的 $\Delta\tau$ 和 Δx, 则上述条件很容易满足.

6.2.3 自由边界固定方法和点松弛技巧

在本小节中, 考虑几种利用有限差分算法求解美式期权的数值方法. 在构造求解美式类型期权的数值算法时, 困难在于最优实施边界是未知的 (该边界也是待求解的一部分). 首先, 讨论自由边界固定方法, 利用变量变换, 将最优实施边界对应的自由边界转变为一个固定的边界. Zhu 和 Sun(1999) 推广自由边界固定方法以定价可转换债券.

回顾在定价美式期权的二叉/三叉树算法中, 在每个节点利用动态规划过程来确定持有价值是否小于内在价值. 如果持有价值小于内在价值, 则内在价值就作为期权的价值 (代表需要提前实施美式期权). 当利用隐式格式来计算时, 采用上面的动态规划过程就会遇到困难, 因为得到的期权价值是隐式的. 下面研究如何利用点松弛格式来克服这个困难.

第三种方法被称为惩罚法, 在满足的方程中增加一个额外的惩罚项. 考虑惩罚参数趋于无穷的极限状况, 最后的解就肯定满足限制条件, 即期权价值不低于内在价值. 惩罚近似格式的构造归入练习 (见习题 6.26).

1. 自由边界固定法

构造自由边界固定算法来求解美式看跌期权值, 并找到对应的最优实施边界 $S^*(\tau)$. 为简化起见, 取敲定价格为单位值, 这就等价于利用敲定价格将标的资产值

和期权值标准化. 在持有区域内, 看跌期权值 $P(S,\tau)$ 满足 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}-rS\frac{\partial P}{\partial S}+rP=0,\quad \tau>0,\ S^*(\tau)<S<\infty, \tag{6.2.12}$$

满足边界条件

$$P(S^*(\tau),\tau)=1-S^*(\tau),\quad \frac{\partial P}{\partial S}(S^*(\tau),\tau)=-1,\quad \lim_{S\to\infty}P(S,\tau)=0$$

和初始条件

$$P(S,0)=0,\quad S^*(0)<S<\infty,$$

其中 $S^*(0)=1$. 利用状态变量变换 $y=\ln\dfrac{S}{S^*(\tau)}$, 使得在 $S=S^*(\tau)$ 上, $y=0$. 现在自由边界 $S=S^*(\tau)$ 变成固定边界 $y=0$, 这就是该方法名字的由来. 对于新的变量 y, 上面的方程变为

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial P}{\partial y}+rP=\frac{S^{*'}(\tau)}{S^*(\tau)}\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{6.2.13}$$

满足新的辅助条件

$$P(0,\tau)=1-S^*(\tau),\quad \frac{\partial P}{\partial y}(0,\tau)=-S^*(\tau),\quad P(\infty,\tau)=0, \tag{6.2.14a}$$

$$P(y,0)=0,\quad 0<y<\infty. \tag{6.2.14b}$$

非线性项 $\dfrac{S^{*'}(\tau)}{S^*(\tau)}\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 显示出美式看跌期权模型的非线性. 沿着边界 $y=0$, 利用 P, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial P}{\partial \tau}$ 的连续性, 使得 $\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0^+,\tau)$ 满足关系

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0^+,\tau)&=\frac{\partial}{\partial \tau}[1-S^*(\tau)]-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)[-S^*(\tau)]\\&\quad+r[1-S^*(\tau)]-\frac{S^{*'}(\tau)}{S^*(\tau)}[-S^*(\tau)]\\&=r-\frac{\sigma^2}{2}S^*(\tau).\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

一旦得到 $\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0^+,\tau)$, 通常利用这个导出的关系式来确定 $S^*(\tau)$.

由于存在非线性项 $\dfrac{S^{*'}(\tau)}{S^*(\tau)}\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 直接对方程 (6.2.13) 利用 Crank-Nicolson 离散

化来确定 V_j^{n+1} 会导致求解一个非线性代数方程组. 为了克服这个困难, 并且保持和 Crank-Nicolson 一样的精度, 采用如下形式的三层格式:

$$\frac{P_j^{n+1}-P_j^{n-1}}{2\Delta\tau}-\left[\frac{\sigma^2}{2}D_+D_-+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)D_0-r\right]\frac{P_j^{n+1}+P_j^{n-1}}{2}$$
$$=\frac{S_{n+1}^*-S_{n-1}^*}{2\Delta\tau S_n^*}D_0P_j^n, \tag{6.2.16}$$

其中 S_n^* 表示 $S^*(n\Delta\tau)$ 的数值近似, 而 D_+, D_- 和 D_0 为离散的微分算子,

$$D_+=\frac{1}{\Delta y}(E^1-I),\quad D_-=\frac{1}{\Delta y}(I-E^{-1}),\quad D_0=\frac{1}{2\Delta y}(E^1-E^{-1}),$$

I 表示恒等算子, $E^i(i=-1,1)$ 表示作用在离散函数 P_j 上的空间平移算子, 定义为 $E^iP_j=P_{j+i}$.

将值匹配条件、导数连续条件和边界方程 (6.2.15) 离散, 得到如下关于 P_{-1}^n, P_0^n, P_1^n 和 S_n^* 的方程组:

$$P_0^n=1-S_n^*, \tag{6.2.17a}$$

$$\frac{P_1^n-P_{-1}^n}{2\Delta y}=-S_n^*, \tag{6.2.17b}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{P_1^n-2P_0^n+P_{-1}^n}{\Delta y^2}\right)+\frac{\sigma^2}{2}S_n^*-r=0, \tag{6.2.17c}$$

其中 P_{-1}^n 为计算区域外的一个虚值. 消去 P_{-1}^n 得到

$$P_1^n=\alpha-\beta S_n^*,\quad n\geqslant 1, \tag{6.2.18}$$

其中

$$\alpha=1+\frac{\Delta y^2}{\sigma^2}r,\quad \beta=\frac{1+(1+\Delta y)^2}{2}.$$

一旦 P_1^n 是已知的, 利用 (6.2.18) 就可以找到 S_n^*, 然后利用 (6.2.17a) 找到 P_0^n. 对于计算区域边界的右端点, 注意到当 S 充分大时, 美式看跌期权价值趋于 0. 因此, 选择足够大的 M, 使得令 $P_{M+1}^n=0$ 时足够准确.

设 $\mathbf{P}^n=(P_1^n,P_2^n,\cdots,P_M^n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$. 将所有的辅助条件代入有限差分格式 (6.2.16) 中, 给出如何利用已知值 $\mathbf{P}^n$ 和 $\mathbf{P}^{n-1}$ 来计算 $\mathbf{P}^{n+1}$. 首先, 定义如下参数:

$$a=\mu\sigma^2+r\Delta\tau,\quad b=\frac{\mu}{2}\left[\sigma^2-\Delta y\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right],$$
$$c=\frac{\mu}{2}\left[\sigma^2+\Delta y\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right],$$

其中 $\mu = \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2}$. 定义三对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & -c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -b & a & -c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b & a & -c & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -b & a & -c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & a \end{pmatrix},$$

利用 A, 有限差分格式 (6.2.16) 可以表示成

$$\begin{aligned}(I+A)\mathbf{P}^{n+1} = (I-A)\mathbf{P}^{n-1} + bP_0^{n-1}\mathbf{e}_1 \\ + \ bP_0^{n+1}\mathbf{e}_1 + g^n D_0 \mathbf{P}^n, \quad n > 1,\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

其中 $g^n = \frac{S_{n+1}^* - S_{n-1}^*}{S_n^*}$. 通过求矩阵 $(I+A)$ 的逆, 方程 (6.2.19) 可以表示为

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{f}_1 + bP_0^{n+1}\mathbf{f}_2 + g^n\mathbf{f}_3, \tag{6.2.20}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= (I+A)^{-1}[(I-A)\mathbf{P}^{n-1} + bP_0^{n-1}\mathbf{e}_1] \\ \mathbf{f}_2 &= (I+A)^{-1}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{f}_3 &= (I+A)^{-1}D_0\mathbf{P}^n.\end{aligned}$$

注意: 利用方程 (6.2.17a) 和 (6.2.18), P_0^{n+1} 和 S_{n+1}^* 都可以利用 P_1^{n+1} 来表示.

由于方程 (6.2.20) 是三层格式, 所以初始计算时需要 $\mathbf{P}^0$ 和 $\mathbf{P}^1$. 为了保证整体的二阶精度, 利用如下两步预测-纠正技术来求 $\mathbf{P}^1$:

$$\left(I + \frac{A}{2}\right)\widetilde{\mathbf{P}} = \left(I - \frac{A}{2}\right)\mathbf{P}^0 + \frac{b}{2}\widetilde{P}_0\mathbf{e}_1 + \widetilde{g}D_0\mathbf{P}^0,$$

$$\left(I + \frac{A}{2}\right)\mathbf{P}^1 = \left(I - \frac{A}{2}\right)\mathbf{P}^0 + \frac{b}{2}P_0^1\mathbf{e}_1 + g^1 D_0\left(\frac{\widetilde{\mathbf{P}} + \mathbf{P}^0}{2}\right),$$

其中第一个方程给出预测值 $\widetilde{\mathbf{P}}$, 利用第二个方程最终得到纠正值 $\mathbf{P}_1$. 临时值和 g^1 为

$$\widetilde{P}_0 = 1 - \widetilde{S}_0^*, \quad \widetilde{S}_0^* = \frac{\alpha - \widetilde{P}_1}{\beta}, \quad \widetilde{g} = \frac{\widetilde{S}_0^* - S_0^*}{S_0^*} \quad 和 \quad g^1 = \frac{S_1^* - S_0^*}{\frac{\widetilde{S}_0^* + S_0^*}{2}}.$$

如果想了解自由边界固定格式的详细操作过程和数值结果的性能, 参见文献 (Wu and Kwok, 1997).

2. *投影超松弛迭代方法*

考虑如下形式的隐式格式 (见方程 (6.2.7)):

$$a_{-1}V_{j-1}+a_0V_j+a_1V_{j+1}=d_j,\quad j=1,2,\cdots,N,\tag{6.2.21}$$

其中为简便起见, 删除了上标 “$n+1$”, d_j 表示已知的量. 采用迭代方法, 而不采用直接消去 (Thomas 算法) 来求解三对角方程组. 利用 Gauss-Seidel迭代过程得到 V_j 的 k 迭代为

$$\begin{aligned}V_j^{(k)}&=\frac{1}{a_0}\left(d_j-a_{-1}V_{j-1}^{(k)}-a_1V_{j+1}^{(k-1)}\right)\\&=V_j^{(k-1)}+\frac{1}{a_0}\left(d_j-a_{-1}V_{j-1}^{(k)}-a_0V_j^{(k-1)}-a_1V_{j+1}^{(k-1)}\right),\end{aligned}\tag{6.2.22}$$

其中最后一项表示 V_j 的 $k-1$ 次迭代的校正. 从 $j=1$ 开始, 随着 j 的增加进行迭代. 因此, 当计算第 k 次迭代 $V_j^{(k)}$ 的值时, 只有当旧迭代 ($k-1$次迭代) $V_{j+1}^{(k-1)}$ 的值是已知的时, 新迭代 (k 次迭代)$V_{j-1}^{(k)}$ 的值才可以计算出来. 为了加速迭代的收敛速度, 在修正项上乘上一个松弛参数 ω. 于是对应的迭代过程变为

$$V_j^{(k)}=V_j^{(k-1)}+\frac{\omega}{a_0}\left(d_j-a_{-1}V_{j-1}^{(k)}-a_0V_j^{(k-1)}-a_1V_{j+1}^{(k-1)}\right),\quad 0<\omega<2.\tag{6.2.23}$$

这个过程被称为**超松弛**(successive-over-relaxation) 迭代. 为了保证收敛, 松弛参数 ω 必须为 $0\sim 2$.

令 h_j 表示节点 j 上美式看跌期权的内在价值. 为了包含期权值必须大于内在价值这个限制条件, 将动态规划过程和上面的松弛过程相结合得到

$$V_j^{(k)}=\max\left(V_j^{(k-1)}+\frac{\omega}{a_0}\left(d_j-a_{-1}V_{j-1}^{(k)}-a_0V_j^{(k-1)}-a_1V_{j+1}^{(k-1)}\right),h_j\right),\tag{6.2.24}$$

一直进行迭代, 直到满足如下终止条件:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left(V_j^{(k)}-V_j^{(k-1)}\right)^2}<\epsilon,\quad \epsilon\text{为很小的误差值}.$$

收敛的值 $V_j^{(k)}$ 通常作为 V_j 的数值解. 上面的迭代过程被称为**投影超松弛迭代方法**(projected successive-over-relaxation method).

6.2.4 截断误差和收敛的阶

局部截断误差度量节点上连续解对于数值格式的偏差程度. 一个给定数值格式的局部截断误差可以通过将连续问题的精确解代入数值格式中得到. 设 Black-Scholes 方程的精确解为 $V(j\Delta x,n\Delta\tau)$. 下面给出如何将精确解代入显式 FTCS 格

式中来找出该数值格式的局部截断误差. 在节点 $(j\Delta x, n\Delta\tau)$ 上的局部截断误差为

$$\begin{aligned}
T(j\Delta x, n\Delta\tau) = & \frac{V(j\Delta x,(n+1)\Delta\tau) - V(j\Delta x, n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \\
& - \frac{\sigma^2}{2}\frac{V((j+1)\Delta x, n\Delta\tau) - 2V(j\Delta x, n\Delta\tau) + V((j-1)\Delta x, n\Delta\tau)}{\Delta x^2} \\
& - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{V((j+1)\Delta x, n\Delta\tau) - V((j-1)\Delta x, n\Delta\tau)}{2\Delta x} \\
& + rV(j\Delta x, n\Delta\tau). \qquad (6.2.25)
\end{aligned}$$

在节点 $(j\Delta x, n\Delta\tau)$ 上利用泰勒公式将每项展开. 消去某些项得到

$$\begin{aligned}
T(j\Delta x, n\Delta\tau) = & \frac{\partial V}{\partial\tau}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \frac{\Delta\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\tau^2}(j\Delta x, n\Delta\tau) + O\left(\Delta\tau^2\right) \\
& -\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(j\Delta x, n\Delta\tau) + O(\Delta x^4)\right] \\
& - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left[\frac{\partial V}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta\tau) + \frac{\Delta x^2}{3}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(j\Delta x, n\Delta\tau) + O(\Delta x^4)\right] \\
& + rV(j\Delta x, n\Delta\tau).
\end{aligned}$$

因为 $V(j\Delta x, n\Delta\tau)$ 满足 Black-Scholes 方程, 这就导出

$$\begin{aligned}
T(j\Delta x, n\Delta\tau) = & \frac{\Delta\tau}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\tau^2}(j\Delta x, n\Delta\tau) - \frac{\sigma^2}{24}\Delta x^2\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}(j\Delta x, n\Delta\tau) \\
& - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta x^2}{3}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(j\Delta x, n\Delta\tau) + O(\Delta\tau^2) \\
& + O(\Delta x^4). \qquad (6.2.26)
\end{aligned}$$

数值解收敛到连续解的一个必要条件是当空间步长和时间步长趋于零时, 数值格式的截断误差趋于零. 对于这种情况, 数值格式称为**相容的**(consistent). 数值格式的**精度阶**(order of accuracy) 定义为截断误差中主项对应的 Δx 和 $\Delta\tau$ 的幂. 假设截断误差的主项是 $O(\Delta\tau^k, \Delta x^m)$, 则数值格式被称为 k 阶时间精度和 m 阶空间精度. 从方程 (6.2.26) 可以看出, 显式 FTCS 格式具有一阶时间精度和二阶空间精度. 如果选择 $\Delta\tau$ 和 Δx^2 具有相同的阶, 即对于某个有限常数 λ, $\Delta\tau = \lambda\Delta x^2$(回顾三叉树格式中, $\Delta\tau$ 和 Δx 已采用这一关系), 则方程 (6.2.26) 的主截断误差项变为 $O(\Delta\tau)$.

利用相似的泰勒展开技巧, 可以证明所有的二叉树格式都是一阶时间精度 (回顾在三叉树格式中, $\Delta\tau$ 和 Δx 是相关的), 这不奇怪, 因为这和 6.1 节中的误差分析

是一致的. 先前的误差分析试图找到二叉树数值解逼近连续 Black-Scholes 方程的阶. 这两种方法关于精度的阶得出了相同的结论.

对于隐式 Crank-Nicolson 格式, 可以证明该格式具有二阶时间精度和二阶空间精度 (见习题 6.19). 对于两层 6 个节点格式, 可以达到的最高精度阶为 $O(\Delta\tau^2, \Delta x^4)$ (见习题 6.20 给出的紧格式). 从精度方面考虑, 高阶精度应该比低阶精度更受欢迎.

假设数值格式的主截断误差项为 $O(\Delta\tau^m)$, 其中 m 为某一正整数, 则可以利用更深入的理论分析证明关于时间步长 $\Delta\tau$ 的数值解 $V_j^n(\Delta\tau)$ 有如下形式的渐近展开:

$$V_j^n(\Delta\tau) = V_j^n(0) + K\Delta\tau^m + O(\Delta\tau^{m+1}), \tag{6.2.27}$$

其中 $V_j^n(0)$ 为离散数值解当 $\Delta\tau \to 0$ 的极限, 可以看成精确连续解, K 为一个独立于 $\Delta\tau$ 的常数. 假设采用时间步长 $\Delta\tau$ 和 $\dfrac{\Delta\tau}{2}$ 分别进行数值计算, 容易看到

$$V_j^n(0) - V_j^n(\Delta\tau) \approx 2^m \left[V_j^n(0) - V_j^n\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)\right]. \tag{6.2.28}$$

也就是说, 当将时间步长减小到 $\dfrac{1}{2}$ 倍时, m 阶时间精度格式得到的数值解对应的误差就减小到 $\dfrac{1}{2^m}$ 倍.

6.2.5 数值稳定性和振荡现象

为了使得数值解收敛到微分方程的精确解, 数值格式必须是相容的. 然而, 相容性只是收敛性的一个必要条件, 而不是充分条件. 计算过程中产生的累计误差可以导致数值解的无界, 而破坏整个计算过程. 除了分析截断误差, 有必要分析数值格式的稳定性. 粗略来讲, 如果在数值计算中, 累计误差不会被放大, 则称该格式为稳定的. 对于一个线性发展微分方程, 如 Black-Scholes 方程, **Lax 等价定理**(Lax equivalence theorem) 说明数值稳定性是收敛到相容差分格式的充分必要条件.

有限差分解的另一个不良特征就是会出现寄生振荡现象. 寄生振荡, 即使格式是稳定的 (图 6.6), 也有可能产生负的期权值. Zvan(1998, 2000) 详细讨论了障碍期权和亚式期权模型数值计算的振荡现象.

1. 稳定性分析的傅立叶方法

有许多文献研究了数值格式的稳定性, 定义了各种不同的稳定性概念. 在这里, 只讨论稳定性分析的**傅里叶方法**(Fourier method of stability analysis). 傅里叶方法基于假设: 数值格式都具有如下形式的解:

$$V_j^n = A^n(k)e^{ikj\Delta x}, \tag{6.2.29}$$

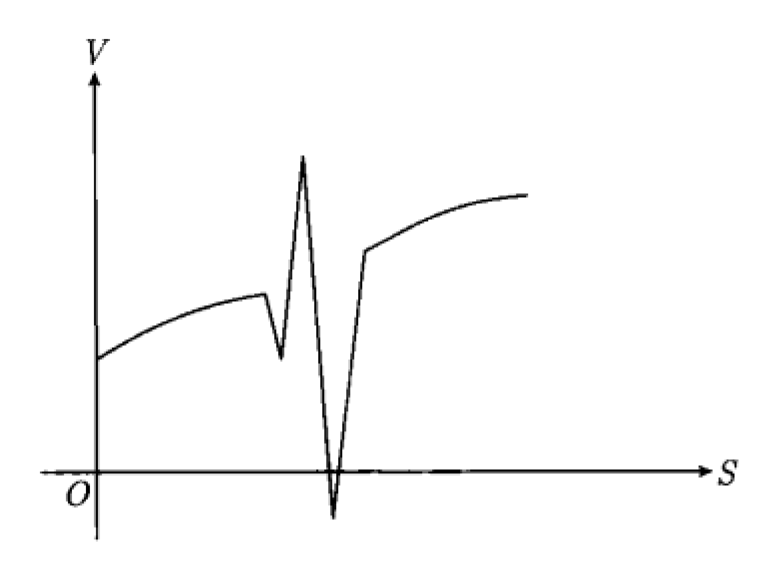


图 6.6 一个期权价格数值解的振荡现象

其中 k 为波数, $i=\sqrt{-1}$. von Neumann 稳定性准则研究了上面傅里叶部分的增长速度. 将 (6.2.29) 代入到双层六点格式 (6.2.7) 得到

$$G(k)=\frac{A^{n+1}(k)}{A^n(k)}=\frac{b_1e^{ik\Delta x}+b_0+b_1e^{-ik\Delta x}}{a_1e^{ik\Delta x}+a_0+a_{-1}e^{-ik\Delta x}}, \tag{6.2.30}$$

其中 $G(k)$ 为放大因子, 控制着一个时间步长傅里叶部分的增长速度. 严格的 von Neumann 稳定性条件是

对所有的 $0\leqslant k\Delta x\leqslant \pi$,

$$|G(k)|\leqslant 1, \tag{6.2.31}$$

因此, 令 $\beta=k\Delta x$.

下面利用傅里叶稳定性分析来研究 Cox-Ross-Rubinstein 二叉树格式和隐式 Crank-Nicolson 格式的稳定性.

Cox-Ross-Rubinstein 二叉树格式的稳定性

Cox-Ross-Rubinstein 二叉树格式相应的放大因子为

$$G(\beta)=(\cos\beta+iq\sin\beta)e^{-r\Delta\tau},\quad q=2p-1. \tag{6.2.32}$$

von Neumann 稳定性条件要求

$$|G(\beta)|^2=\left[1+(q^2-1)\sin^2\beta\right]e^{-2r\Delta\tau}\leqslant 1,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi. \tag{6.2.33}$$

当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时有 $|q|\leqslant 1$, 所以对所有的 β 有 $|G(\beta)|\leqslant 1$. 在这个条件下, 该格式是 von Neumann 稳定的. 因此, 得到 Cox-Ross-Rubinstein 格式 von Neumann 稳定的充分条件: 二叉树格式中不会出现负概率值.

Crank-Nicolson 格式的稳定性

Crank-Nicolson 格式相应的放大因子为

$$G(\beta)=\frac{1-\sigma^2\dfrac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\dfrac{\Delta\tau}{2\Delta x}i\sin\beta-\dfrac{r}{2}\Delta\tau}{1+\sigma^2\dfrac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\sin^2\dfrac{\beta}{2}-\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\dfrac{\Delta\tau}{2\Delta x}i\sin\beta+\dfrac{r}{2}\Delta\tau}. \tag{6.2.34}$$

von Neumann 稳定性条件要求

$$|G(\beta)|^2=\frac{\left(1-\sigma^2\dfrac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\sin^2\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{r}{2}\Delta\tau\right)^2+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^2\dfrac{\Delta\tau^2}{4\Delta x^2}\sin^2\beta}{\left(1+\sigma^2\dfrac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{r}{2}\Delta\tau\right)^2+\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^2\dfrac{\Delta\tau^2}{4\Delta x^2}\sin^2\beta}\leqslant 1,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi. \tag{6.2.35}$$

容易看到, 对于任意的 $\Delta\tau$ 和 Δx, 上述条件均成立. 因此, Crank-Nicolson 格式是无条件稳定的. 换句话来说, 对 $\Delta\tau$ 的选择不用作任何限制, 数值格式都是稳定的 (在 von Neumann 意义下).

隐式 Crank-Nicolson 格式具有二阶时间精度, 并且是无条件稳定的, 而且利用 Thomas 算法也可以很有效地实现该格式的数值计算. 显然, 从业者应该喜欢采用 Crank-Nicolson 格式, 而不是采用条件稳定的具有一阶时间精度的显式格式. 不幸的是, 由于大多数期权到期日收益函数是不光滑的, 所以 Crank-Nicolson 格式的数值精度变得很差. 利用有限差分格式来实现具有辅助条件的期权定价问题将在 6.2.6 小节中讨论.

2. 数值解的振荡

对于两层显式格式数值解, 找出不产生振荡的充分条件相对比较容易. 下面的定理揭示了显式格式系数的符号和解的振荡之间的关系 (Kwok and Lau, 2001b).

定理 6.1 假设两层显式格式 (6.2.3) 的系数均为非负, 初始值有界, 即存在常数 M, 使得 $\max\limits_j|V_j^0|\leqslant M$, 则

$$\max_j|V_j^n|\leqslant M \tag{6.2.36}$$

对所有的 $n\geqslant 1$.

定理 6.1 的证明非常简单明了. 利用显式格式, 可以推出

$$|V_j^{n+1}|\leqslant|b_{-1}|\,|V_{j-1}^n|+|b_0|\,|V_j^n|+|b_1|\,|V_{j+1}^n|,$$

因此,

$$\max_j|V_j^{n+1}|\leqslant b_{-1}\max_j|V_{j-1}^n|+b_0\max_j|V_j^n|+b_1\max_j|V_{j+1}^n|.$$

由于 b_{-1},b_0 和 b_1 都是非负的, 令 E^n 表示 $\max\limits_j|V_j^n|$, 上面的不等式可以表示为

$$E^{n+1}\leqslant b_{-1}E^n+b_0E^n+b_1E^n=E^n.$$

由于 $b_{-1}+b_0+b_1=1$. 依次类推, 可以得到

$$E^n \leqslant E^{n-1} \leqslant \cdots \leqslant E^0 = \max_j |V_j^0| = M.$$

如果显式格式中的一个或一个以上的系数为负数, 那又会怎样呢? 例如, 取 $b_0 < 0, b_{-1} > 0$ 和 $b_1 > 0$, 令 $V_0^0 = \varepsilon > 0$, $V_j^0 = 0 (j \neq 0)$. 在下一个时间层, $V_{-1}^1 = b_1\varepsilon, V_0^1 = b_0\varepsilon$ 和 $V_1^1 = b_{-1}\varepsilon$, 其中 V_j^1 的符号随着 j 交替改变. 这种交替改变符号的性质对以后的所有时间层均保持着. 这样就推出

$$|V_j^{n+1}| = b_{-1}|V_{j-1}^n| - b_0|V_j^n| + b_1|V_{j+1}^n|.$$

将上述方程所有 j 指标的值相加, 令 $\mathcal{S}^n = \sum_j |V_j^n|$, 结果得到

$$\mathcal{S}^{n+1} = (b_{-1} - b_0 + b_1)\mathcal{S}^n = (1-2b_0)\mathcal{S}^n.$$

注意到由于 $b_0 < 0$, $1-2b_0 > 1$. 依次类推, 于是得到

$$\mathcal{S}^n = (1-2b_0)^n \mathcal{S}_0 = (1-2b_0)^n \varepsilon,$$

当 $n \to \infty$ 时, $\mathcal{S}^n \to \infty$. 于是解的值在节点附近震荡, 并且振荡的幅度随着时间步长的增加而增长.

6.2.6 辅助条件的数值近似

各种因素都可以引起有限差分数格式数值解的误差, 其中主要的原因是截断误差, 来源于微分算子的差分近似. 另外一个原因是期权模型中辅助条件的数值近似. 辅助条件指的是到期日收益函数和由于期权合约中嵌入的路径相关特征而 (可能) 引起的额外边界条件. 比较常见的是利用三叉树或有限差分格式计算的期权数值解收敛到连续解时表现出波动或不稳定形状. Heston 和 Zhou (2000) 根据他们的数值实验说明, 二叉树格式收敛的速度在 $O(\sqrt{\Delta t})$ 和 $O(\Delta t)$ 之间摆动. 由于缺少光滑的收敛性, 提高收敛速度的外推法不能直接应用于期权数值解. 在本小节中, 给出一些提高光滑的技巧来处理到期日收益函数的不连续性和不可微性, 也将研究如何合理地处理期权中障碍和回望特征带来的边界条件. 有趣的是, 边界网格点最优位置的确定依赖于路径依赖特征是连续还是离散观测.

1. 到期日收益函数不连续的光滑化

大多数期权的到期日收益函数具有某种不连续性 (如二元收益函数) 或不可微性 (如看涨或看跌期权). 由于收益函数在离散的节点采样时会引起量化误差, 文献中提出了一些光滑技术. Heston 和 Zhou (2000) 提议取网格上节点的收益值为相

邻单元收益函数的平均值，而不是直接在节点上采样. 令 $V_T(S)$ 表示到期日的收益函数, 节点 S_j 上的收益值取为

$$V_j^0 = \frac{1}{\Delta S}\int_{S_j-\frac{\Delta S}{2}}^{S_j+\frac{\Delta S}{2}} V_T(S)\,dS, \tag{6.2.37}$$

而不是简单地取值为 $V_T(S_j)$. 以看涨期权收益函数 $\max(S-X,0)$ 为例. 如果敲定价格 X 准确地落在网格节点, 则 $V_T(S_j)=0$, 而单元平均值为 $\Delta S/8$. 在二叉树计算中, Heston 和 Zhou (2000) 发现对于普通欧式期权和美式看涨期权平均收益函数提供了更加光滑的收敛性. 光滑数值解也可以利用外推法来加速收敛. 另一个采样技巧是节点定位法. Tavella 和 Randall(2000) 提出将敲定价格定位到相临节点的中间. 第三种技巧被称为 Black-Scholes 近似, 该方法对于定价美式期权和某些奇异期权非常有用. 这些奇异期权在接近到期日时可以利用 Black-Scholes 方程很好地近似. 这种方法的诀窍在于沿着第一个时间层上采用 Black-Scholes 值, 而在接下来的时间层上采用有限差分近似.

更多高阶格式的减小量化误差方法也被研究出来. Pooley等(2003) 证明, 如果到日期收益函数是不连续的, 则不能实现 Crank-Nicolson 格式期望的二阶精度. 他们设法提出一个精细的方法, 可以恢复 Crank-Nicolson 格式的二阶收敛精度.

2. 障碍期权

导致障碍期权计算数值精度变差有两个主要因素: ① 节点相对于障碍边界的位置; ② 初始资产价格接近障碍的程度.

已有一些文章指出, 对于连续观测障碍, 如果障碍边界穿过一层节点, 而对于离散观测障碍, 如果障碍位于两层节点中间, 都可以达到较好的数值精度. Kwok 和 Lau (2001b) 的启发式论证解释了为什么选择这些位置可以达到较好的数值精度. 为了修正接近问题, Figlewski 和 Gao(1999) 建议在障碍附近构造更精细的网格来提高精度. Boyle 和 Tian (1998) 指出利用相邻三个节点的期权值来进行样条插值, 这是解决接近障碍边界问题的一个比较简单的方法. 对于隐式格式, “初始资产价格接近障碍边界”并不是一个问题, 因为在隐式格式中对应的边界条件可以瞬间影响整个解 (Zvan et al., 2000).

3. 回望期权

利用前向打靶法定价回望期权相对来说比较直接 (见习题 6.15). 对于浮动敲定价格的回望期权, 通过选择合适的自相似变量, 定价公式可以简化为普通单资产期权模型的定价公式, 唯一不同的是回望期权模型定义域一端端点是 Neumann 边界条件. 令 $c(S,m,t)$ 表示连续观测欧式浮动敲定价格看涨期权的价格, 其中 m 为

从 T_0 到 $t(T_0 < t)$ 时资产价格的最小值. 回望看涨期权在到期日 T 的收益函数为

$$c(S,m,T) = S - m. \tag{6.2.38a}$$

回顾 $S \geqslant m$, $S = m$ 的边界条件为

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 0, \quad S = m. \tag{6.2.38b}$$

选择如下自相似变量:

$$x = \ln\frac{S}{m} \quad 和 \quad V(x,\tau) = \frac{c(S,m,t)}{S}e^{-q\tau}, \tag{6.2.39}$$

其中 $\tau = T - t$, 则 $c(S,m,t)$ 的 Black-Scholes 方程变成如下 V 的方程:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}, \quad x > 0, \tau > 0. \tag{6.2.40}$$

注意到 $S > m$ 对应着 $x > 0$. 到日期收益函数变为初始条件

$$V(x,0) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0. \tag{6.2.41}$$

而 $S = m$ 的边界条件变成为 Neumann 条件

$$\frac{\partial V}{\partial x}(0,\tau) = 0. \tag{6.2.42}$$

利用 FTCS 格式离散过程得到

$$V_j^{n+1} = \left[\frac{\alpha+\mu}{2}V_{j+1}^n + (1-\alpha)V_j^n + \frac{\alpha-\mu}{2}V_{j-1}^n\right], \quad j = 1,2,\cdots, \tag{6.2.43}$$

其中 $\alpha = \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{\Delta x}$, $\mu = \sigma^2\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$. 考虑连续观测回望期权模型, 沿着节点层放置反射边界 $x = 0$(对应着 Neumann 边界条件). 为了逼近在 $x = 0$ 的 Neumann 边界条件, 采用中心差分

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} \approx \frac{V_1^n - V_{-1}^n}{2\Delta x}, \tag{6.2.44}$$

其中 V_{-1}^n 为左端节点 $j = 0$ 外一个虚节点的期权值. 将方程 (6.2.43) 中的 j 设置为 $j = 0$, 利用 Neumann 条件的近似 $V_1^n = V_{-1}^n$, 可以得到

$$V_0^{n+1} = \alpha V_1^n + (1-\alpha)V_0^n. \tag{6.2.45}$$

利用上面的差分格式得到的数值结果具有 $O(\Delta t)$ 阶收敛速度 (Kwok and Lau, 2001b).

然而, 如果采用前向差分近似 $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}$, 使得 Neumann 边界条件近似为 $V_0^n = V_{-1}^n$ (Cheuk and Vorst, 1997), 则收敛速度阶减小到只有 $O(\sqrt{\Delta t})$, 而且当节点不沿着反射节点排列, 可以观测到数值结果具有不稳定的收敛行为. 习题 6.22 说明对于回望看跌期权简单处理反射边界的不足, 而问题 6.23 给出了构造近似 Neumann 边界的另外一种方法.

定价离散采样回望期权需要很高的技巧, 因为只在观测时刻对应的时间步长才应用 Neumann 条件. 关于构造回望期权定价有效算法的讨论可参见文献 (Andreasen, 1998; Kwok and Lau, 2001b).

6.3　蒙特卡罗模拟

已经看到许多衍生品定价问题都可以归结为计算如下期望:

$$E[f(Z(T;t,z))],$$

其中 Z 表示随机过程, 用于描述风险中性测度下一个或多个标的金融变量的价格演化, 如资产价格和利率价格. 过程 Z 在 t 时刻具有初值 z, 函数 f 特指衍生品在到期日 T 的价值.

作为与网格树算法和有限差分不同的第三种用于衍生品定价的数值算法, 蒙特卡罗模拟已经显示了它是非常强大和通用的方法. 蒙特卡罗方法是基于估计随机变量期望值的数值过程, 因此, 这种方法自然地可以应用到用期望表示的衍生品定价问题中, 其模拟过程包括产生具有给定概率密度的随机变量, 利用大数定理求这些值的样本平均来作为随机变量期望的估计. 在衍生品定价中, 模特卡罗过程体现如下步骤:

(1) 据风险中性概率分布, 模拟衍生品模型中标的状态变量的样本路径, 如衍生品生命期内的资产价格和利率;

(2) 对于每个模拟样本路径, 计算贴现的衍生品现金流;

(3) 取所有样本路径贴现现金流的样本平均.

作为例子, 考虑普通欧式看涨期权的定价, 用于描述蒙特卡罗过程. 数值过程要求计算看涨期权在到期日收益的期望 $E_t[\max(S_T - X, 0)]$, 并且贴现到当前时刻 t, 即 $e^{-r(T-t)}E_t[\max(S_T - X, 0)]$, 其中 S_T 为在到期日 T 时的资产价格, X 为敲定价格. 假设在风险中性测度下, 资产价格是一个对数正态分布 (见方程 (2.4.16))

$$\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}}, \tag{6.3.1}$$

其中 Δt 为时间步长, σ 为波动率, r 为无风险利率. 这里, 以 ϵ 表示均值为 0, 方差为 1 的标准正态分布, 因此, $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$ 表示 Δt 时间内具有波动率 σ 的资产价格维纳过程增量的离散近似. 大多数计算机程序语言都可以生成随机数 ϵ, 由于其随机性, 每次都产生不同的值. 假设从当前时刻 t 到到期日 T 之间有 N 个时间步长, 则 $\Delta t = (T-t)/N$. 方程 (6.3.1) 给出的数值过程重复 N 次, 以模拟从 S_t 到 $S_T = S_{t+N\Delta t}$ 的价格路径. 由这个模拟资产价格路径产生的看涨期价格可以通过贴现收益公式来计算,

$$c = e^{-r(T-t)}\max(S_T - X, 0). \tag{6.3.2}$$

对于欧式看涨期权模型, 这样就完成了蒙特卡罗模拟的一次采样迭代.

经过足够多次上面模拟的重复, 看涨期权的期望价值可以通过计算样本模拟对应的期权值的样本平均得到, 而且也可以得到看涨期权值估计的标准差. 令 c_i 表示第 i 次模拟得到的看涨期权估计值, M 为总模拟次数, 则看涨期权的期望值为

$$\hat{c} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} c_i, \tag{6.3.3}$$

估计值的样本方差为

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(c_i - \hat{c})^2. \tag{6.3.4}$$

对于足够大的 M, 分布

$$\frac{\hat{c}-c}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{M}}}, \quad c \text{ 为看涨期权的真值}$$

趋于标准正态分布. 注意: $\hat{c}$ 的标准差为 $\hat{s}/\sqrt{M}$, 因此, 估计的置信极限可以通过增加模拟次数 M 来减小. M 出现在因子 $1/\sqrt{M}$ 中, 意味着标准差减小 1/10 需要模拟次数增加 100 倍.

蒙特卡罗模拟的一个主要优势在于, 误差和期权问题的维数是独立的, 另外一个优势是在期权模型中, 它很容易适用于各种复杂的收益函数. 例如, 亚式期权到期日的收益依赖于一定时间区间内资产价格的平均值, 而回望期权的收益依赖于某时间区间内资产价格的极值. 对于每次模拟的资产价格路径, 都可以很容易地获得平均值或极值. 蒙特卡罗模拟的主要缺点是为了达到足够高的精度水平需要进行大量的模拟. 和网格树算法、有限差分法相比, 在计算效率方面, 蒙特卡罗模拟并没有优势. 然而, 从另一方面来看, 从业者处理新结构衍生产品时可以通过蒙特卡罗模拟来得到一个估计价格, 而不用对新衍生品构造定价模型.

可以通过采用各种方差减小技术来提高蒙特卡罗模拟的效率 (Hull and White, 1988; Boyle et al., 1997), 其中的一些技术将在下面讨论.

6.3.1 方差减小技巧

为了能够显著地减少模拟试验的次数 M, 需要减小估计值的样本方差 $\hat{s}^2$. 两个最常见的方差减小技术是**对偶变量方法**(antithetic variates method) 和**控制变量方法**(control variate method).

首先, 描述如何在计算效率方面评价方差减小技术的有效性. 设 W_T 是产生期权估计值 V 所需的总计算量. 如果有两种方法产生期权价值的蒙特卡罗估计, 每次模拟分别需要 W_1 和 W_2 个单位的计算量. 为简化起见, 假设 W_T 为 W_1 和 W_2 的总和. 令 $V_i^{(1)}$ 和 $V_i^{(2)}$ 分别表示利用方法 1 和方法 2, 第 i 次模拟时所产生 V 的估计值, 对应的标准差分别为 σ_1 和 σ_2. 利用 W_T 次总工作量, 两种方法产生的用来估计 V 的样本平均分别为

$$\frac{W_1}{W_T}\sum_{i=1}^{W_T/W_1} V_i^{(1)}, \quad \frac{W_2}{W_T}\sum_{i=1}^{W_T/W_2} V_i^{(2)}.$$

基于大数定理, 上面两个估计可以用正态分布近似, 其均值为 V, 标准差分别为

$$\sigma_1\sqrt{\frac{W_1}{W_T}}, \quad \sigma_2\sqrt{\frac{W_2}{W_T}}.$$

因此, 如果

$$\sigma_1^2 W_1 < \sigma_2^2 W_2, \tag{6.3.5}$$

则在计算效率方面, 第一个方法比第二个方法要好. 换句话讲, 当考虑计算效率时, 只有方差比率 σ_1^2/σ_2^2 小于工作量比率 W_2/W_1 时, 较低方差的估计值才更好.

1. 对偶变量方法

设以 $\{\epsilon^{(i)}\}$ 表示来自标准正态分布的独立样本, 用以描述第 i 次模拟的资产价格路径, 这样

$$S_T^{(i)} = S_t\, e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{\Delta t}\sum\limits_{j=1}^{N}\epsilon_j^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \cdots, M, \tag{6.3.6}$$

其中 $\Delta t = \dfrac{T-t}{N}$, M 为总模拟次数. 注意: $\epsilon_j^{(i)}$ 是来自标准正态分布的随机样本. 利用方程 (6.3.2), (6.3.3), 得到敲定价格为 X 的欧式看涨期权价格的一个无偏估计

$$\hat{c} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} c_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} e^{-r(T-t)}\max(S_T^{(i)} - X, 0). \tag{6.3.7a}$$

可以看到, 如果 $\{\epsilon^{(i)}\}$ 是标准正态分布, 则 $\{-\epsilon^{(i)}\}$ 也是标准正态分布, 利用 $\{-\epsilon^{(i)}\}$ 模拟的资产价格 $\tilde{S_T}^{(i)}$ 也是到期日资产分布的一个有效样本. 这样得到看涨期权价

格的一个新的无偏估计

$$\tilde{c} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\tilde{c}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} e^{-r(T-t)}\max(\tilde{S}_T^{(i)} - X, 0). \tag{6.3.7b}$$

通常, 希望 c_i 和 $\tilde{c}_i$ 负相关, 也就是说, 如果其中一个值高于真实值, 则另一个值就会低于真实值. 比较合理的选择似乎是取两个估计的平均值. 事实上, 就取对偶变量估计为

$$\bar{c}_{AV} = \frac{\hat{c} + \tilde{c}}{2}. \tag{6.3.8}$$

从计算效率方面来考虑, 由式 (6.3.5) 可以看出, 如果 $\text{cov}(c_i, \tilde{c}_i) \leqslant 0$, 则对偶变量方法可以提高效率 (见习题 6.27).

2. 控制变量方法

当有两个相似期权 A 和 B 时, 可以采用控制变量方法. 希望求得的是期权 A 的价格, 而期权 B 的解析价格已知. 以 V_A 和 V_B 分别表示期权 A 和期权 B 的真实价值, $\hat{V}_A$ 和 $\hat{V}_B$ 分别为利用蒙特卡罗模拟得到的期权 A 和期权 B 的估计值. 怎样根据已知估计值 $\hat{V}_A$, 利用 V_B 和 $\hat{V}_B$ 的信息来改进期权 A 价值的估计?

控制变量法的目的是利用如下公式改进期权 A 价值的估计:

$$\hat{V}_A^{cv} = \hat{V}_A + (V_B - \hat{V}_B), \tag{6.3.9}$$

其中误差 $V_B - \hat{V}_B$ 用来作为估计 V_A 的控制变量. 为了证实该方法, 考虑上述方差的如下量化关系:

$$\text{var}\left(\hat{V}_A^{cv}\right) = \text{var}(\hat{V}_A) + \text{var}(\hat{V}_B) - 2\,\text{cov}(\hat{V}_A, \hat{V}_B),$$

因此,

$$\text{var}(\hat{V}_A^{cv}) < \text{var}(\hat{V}_A), \quad \text{var}(\hat{V}_B) < 2\,\text{cov}(\hat{V}_A, \hat{V}_B).$$

于是当 $\hat{V}_A$ 和 $\hat{V}_B$ 的协方差比较大时, 控制变量法可以减小 V_A 估计的方差. 当两个期权强相关时也有如此结果. 需要计算两个估计 $\hat{V}_A$ 和 $\hat{V}_B$. 然而, 如果两个期权的标的资产是相同的, 则利用同一组模拟价格路径, 在计算 $\hat{V}_A$ 时只需要稍微增加一些计算量就可以计算出 $\hat{V}_B$.

为了更好地利用控制变量 $V_B - \hat{V}_B$, 定义控制变量估计为

$$\hat{V}_A^{\beta} = \hat{V}_A + \beta(V_B - \hat{V}_B), \tag{6.3.10}$$

其中 β 为不等于 1 的参数. 方差之间新的关系为

$$\text{var}\left(\hat{V}_A^{\beta}\right) = \text{var}\left(\hat{V}_A\right) + \beta^2\text{var}\left(\hat{V}_B\right) - 2\beta\text{cov}\left(\hat{V}_A, \hat{V}_B\right). \tag{6.3.11}$$

特别地, 选取 β, 使得 var $(\hat{V}_A^{\beta})$ 最小,

$$\beta^* = \frac{\mathrm{cov}(\hat{V}_A, \hat{V}_B)}{\mathrm{var}(\hat{V}_B)}. \tag{6.3.12}$$

不像方程 (6.3.9) 总是选择 $\beta = 1$, 基于 β^* 的控制变量估计一定可以减小方差. 不幸的是, 确定 β^* 需要计算 $\mathrm{cov}(\hat{V}_A, \hat{V}_B)$, 而这通常是未知的. 然而, 可以根据模拟得到的 $V_A^{(i)}$ 和 $V_B^{(i)}(i = 1, 2, \cdots, M)$, 利用回归技巧来估计 β^*.

亚式期权的定价

应用控制变量方法成功的例子是估计算术平均亚式期权的价值. 利用相应的几何平均亚式期权的精确解析公式来评估该估计. 这两类亚式期权在本质上非常相似, 除了到期日收益函数是资产价格的算术平均或几何平均.

亚式期权的平均特征没有给蒙特卡罗模拟增加任何困难, 因为对于给定的模拟路径, 在不同观测时刻, 资产价格的平均值很容易计算. 由于大多数几何平均亚式期权都有期权定价公式, 而利用蒙特卡罗模拟计算对应的算术平均亚式期权的定价时, 方差减小过程可以利用这些显式公式来减小置信区间 (Kemna and Vorst, 1990).

设 V_A 表示收益函数依赖于标的资产价格算术平均的期权价格, V_G 表示收益函数依赖于标的资产价格几何平均的期权价格. 以 $\hat{V}_A$ 和 $\hat{V}_G$ 分别表示资产价格单次模拟路径算术平均和几何平均对应收益函数的贴现值, 则

$$V_A = E[\widehat{V}_A] \quad 和 \quad V_G = E[\widehat{V}_G]. \tag{6.3.13}$$

于是就有

$$V_A = V_G + E[\widehat{V}_A - \widehat{V}_G],$$

因此, V_A 的无偏估计为

$$\hat{V}_A^{cv} = \hat{V}_A + (V_G - \hat{V}_G). \tag{6.3.14}$$

6.3.2 低偏差序列

蒙特卡罗方法利用随机点 (更加准确地说是伪随机点), 其收敛速度为 $O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$, 其中 M 为模拟的次数. $O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ 收敛阶意味着要达到 $O(\epsilon)$精度水平需要 $O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ 次模拟. 如此低阶的收敛速度肯定不够理想. 另外, 模拟的精度也对初始选取十分敏感.

通常, 伪随机点并不是均匀地分散在所讨论问题的区域内. 如果这些点更加均匀地分布, 也许可以提高收敛的速度. 数论中有一个概念, 称为**偏差**(discrepancy), 用于度量 d 维空间中一组点对于均匀度的偏离. 低偏差意味着点更加均匀分散. 有

一些很好的测试序列, 称为拟随机序列 (尽管本质上它们是确定的), 具有较低的偏差水平. 例如, Sobol 点、Halton 点 (Paskov and Traub, 1995). 这些低偏差序列具有很好的性质, 当增加一系列点时, 整个点序列仍然具有相似的偏差水平. 生成这些序列的程序在许多软件包中都可以找到 (如文献 (Press et al., 1992)).

采用不同序列所得到的模拟收敛速度可以通过离散平均数值积分来估计. 如果采用均匀的空间节点, 利用梯形数值积分公式, 则误差为 $O(M^{-2/d})$, 其中 d 为积分的维数. 对于 Sobol 点或 Halton 点, 收敛速度为 $O\left(\frac{(\ln M)^d}{M}\right)$, 当 d 适中时, 蒙特卡罗的收敛速度 $O\left(\frac{1}{M}\right)$ 仍然是有利的.

在金融应用中, 采用不同低偏差序列的各种数值研究揭示, 利用低偏差序列计算产生的误差比采用普通随机序列产生的误差要低. Paskov 和 Traub (1995) 利用 Sobol 点和 Halton 点计算了资产抵押债券的价格, 该价格涉及一个 d 高达 360 的积分. 他们指出 Sobol 序列比 Halton 序列要好, 而这两个都优于标准的蒙特卡罗模拟. 表现突出的原因可以归结为被积函数是光滑的. 在金融中, 仍然有许多研究正在寻找更好的低偏差序列.

6.3.3 美式期权的定价

通常认为蒙特卡罗方法只能用于欧式类型衍生品. 用模拟来定价美式期权的主要困难在于提前实施特征的**向后**(backward) 特性, 因为不知道在某一时刻资产值达到一个特定值提前实施是否是最优的. 只有预先明确执行策略才能确定一次模拟路径对应的期权估计值.

文献中提出了各种模拟算法来解决上面的困难. 最早的模拟算法是 Tilley (1993) 提出的 "打包和排序" 算法. 该算法利用倒向计算和打包技巧估计期权的持有价值. 在每个时刻, 具有相似资产价格的模拟路径归入一类, 得到一个单周期期权值的估计. 另一方法 (Grant et al., 1996) 的第一步是尝试利用倒向计算在每个提前实施点近似实施边界, 然后基于已知的执行策略利用向前模拟估计期权价格. 其他方法 (Broadie and Glasserman, 1997) 尝试找到模拟路径对应期权值的上、下界. 上界基于非复合树, 而下界基于随机网格. 这些期权值的高低估计渐近收敛到期权的真实值.

最近比较常用的方法是利用基函数的线性回归方法. 动态规划过程的条件期望可以通过投影在一组有限的基函数上来近似. 而近似值函数则利用蒙特卡罗模拟和最小平方回归法计算. Longstaff 和 Schwartz (2001) 选择 Laguerre 多项式作为基函数. Tsitsiklis 和 Van Roy (2001), Lai 和 Wong (2004) 讨论了选择基函数的基本原则. Clément 等(2002) 证明这种算法的几乎处处收敛性. Glasserman 和 Yu(2004)

分析了当基函数的数目和模拟路径的数目都增加时算法的收敛性.

下面将介绍 4 类算法, 即打包和排序法、提前实施边界参数法、随机网格法和通过基函数的线性回归法. Fu 等(2001) 比较了用各种蒙特卡罗模拟法定价美式类型期权的性能, Glasserman(2004) 全面回顾了蒙特卡罗方法在金融工程中的应用.

1. Tilley 的打包和排序算法

Tilley(1993) 提出"打包和排序"算法, 该算法利用倒向归纳计算美式期权持有价值的估计值. 模拟过程的每个时间步长、模拟的资产价格路径按照资产价格排序, 并打包成组. 该方法依据给定包内的资产价格路径是十分相似的, 因此, 它们具有相同的单周期期望期权值. 每个时间步长都要确定执行或持有的边界.

假设期权在特定时刻 $t = 1, 2, \cdots, N$ 可以执行. 实际上, 这种离散化假设将具有连续提前实施权利的美式期权变为具有离散实施机会的百慕大期权 (见习题 6.28). 模拟过程产生有限条从 $t = 0$ 到 $t = N$ 的资产价格路径, 其中第 k 条资产价格路径可以表示成序列 $\{S_0(k), \cdots, S_N(k)\}$. 设 d_t 表示从 t 到 $t+1$ 时的贴现因子, D_t 表示从 0 到 t 时的贴现因子, 因此, $D_t = d_0 d_1 \cdots d_{t-1}$. 令 X 表示期权的敲定价格. 倒向推导过程从 $t = N-1$ 开始. 对于每个 t, 根据如下步骤推导:

(1) 按照资产价格将价格路径进行排序, 然后将排序后的路径划分成 Q 个不同的包, 每个包包含 P 个路径, $R = QP$. 用 $B_t(k)$ 表示 t 时刻包中包含路径 k 的价格路径集合, 对于每个 k, 计算期权的内在价值 $I_t(k)$.

(2) 计算期权的持有价值 $H_t(k)$, 被定义为前一期期权价值的期望的现值

$$H_t(k) = \frac{d_t(k)}{P} \sum_{j \in B_t(k)} V_{k+1}(j), \tag{6.3.15}$$

其中 $V_{t+1}(j)$ 在先前时间的步长已经计算过. 特别地, 对所有的 j, $V_N(j) = I_N(j)$.

(3) 对每条路径 k, 比较 $H_t(k)$ 和 $I_t(k)$, "暂时"确定是持有期权还是执行期权. 定义 $x_t(k)$ 作为"暂时"执行或持有的指示变量, 其中

$$x_t(k) = \begin{cases} 1, & I_t(k) \geqslant H_t(k), \\ 0, & I_t(k) < H_t(k), \end{cases}$$

"1" 和 "0" 分别表示 "实施" 和 "持有".

(4) 通常, 有不止一个包满足对 $k \in B_t(k)$, $x_t(k) = 1$, 同一个包内的其他路径为 0. 这些包有一个从 "持有" 到 "执行" 的 "过渡区域". 该算法通过在 "持有" 和 "执行" 之间创造一个明确的边界来改进. 为了达到这个目的, 研究序列 $\{x_t(k) : k = 1, \cdots, R\}$, 确定最长字符串中的第一个 "1" 作为准确边界, 而这个字符串的长度超过每个 "0" 字符串的长度. 例如, 考虑如下字符串:

0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0;

↑

边界

"1" 字符串的最长长度是 5, 而"0" 字符子串的长度为 2,3 和 1. "1" 字符串的路径指标记为 k_t^*. 接下来, 定义一个 "更新" 实施/持有指示变量

$$y_t(k) = \begin{cases} 1, & k \geqslant k_t^*, \\ 0, & k < k_t^*. \end{cases}$$

(5) 对于每条路径 k, 定义期权的当前价值 $V_t(k)$,

$$V_t(k) = \begin{cases} I_t(k), & y_t(k) = 1, \\ H_t(k), & y_t(k) = 0. \end{cases}$$

上述过程从 $t = N - 1$ 到 $t = 0$ 进行倒向处理. 最后, 定义实施/持有指示变量

$$Z_t(k) = \begin{cases} 1, & \text{对所有的} s < t \text{都有} y_t(k) = 1, y_s(t) = 0, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

一旦确定了每条价格路径的实施策略, 期权价格的估计值就为

$$\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{R}\sum_{t=1}^{N} Z_t(k)D_t(k)I_t(k).$$

对每个路径 k, $Z_t(k)$ 只在某一时刻才等于 1, $D_t(k)I_t(k)$ 是该路径上期权收益函数的贴现值.

Tilley 算法存在一些大的缺陷. 该算法计算效率比较低, 因为它要求储存所有时间步长上所有的模拟资产价格路径. 当模拟路径数目较多时, 所有价格路径的打包和排序对储存和计算都提出了苛刻的要求. 正如 Tilley 的数值试验显示的那样, 该算法并不能保证收敛到真实解, 而且将算法扩展到多资产期权也会变得非常烦琐 (见习题 6.29).

2. Grant-Vora-Weeks 算法

由 Grant等(1996) 提出的模拟算法, 首先在当前时刻 t 和到期时刻 T 之间的选定时刻 $t_i(i = 1, 2, \cdots, N - 1)$ 上确定最优实施价格 $S_{t_i}^*$. 最优实施价格可以通过模拟一系列时间步长、时间上倒向处理来确定. 一旦确定了实施边界, 期权价格就可以按照常用的模拟过程来确定, 提前实施边界为已知的实施边界.

通过美式看跌期权的定价来描述该过程. 设当前时刻 t 和到期日 T 之间只有三个时间步长, 其中 $t_0 = t$, $t_3 = T$. 假定常数分红率为 q, 在 T 时的最优执行价格

等于 $\min\left(\frac{r}{q}X, X\right)$, 其中 X 为期权的执行价格, r 为无风险利率. 在时间 t_2, 距离到期日还有一个时间周期, 当 $S_{t_2} \leqslant S_{t_2}^*$ 时, 看跌期期权价值为 $X - S_{t_2}$; 当 $S_{t_2} > S_{t_2}^*$ 时, 为 $E[P_T]e^{-r(T-t_2)}$, 其中 $P_T = \max(X - S_T, 0)$ 表示看跌期权在到期日的价值. 显然, $E[P_T]$ 依赖于 S_{t_2}. 对于给定的值 S_{t_2}, 可以进行足够多次模拟以估计 $E[P_T]$. 通过找到合适 S_{t_2}, 可以确定最有实施价格 $S_{t_2}^*$, 因此,

$$X - S_{t_2}^* = e^{-r(T-t_2)}E[P_T|S_{t_2}^*]. \tag{6.3.16}$$

求解 $e^{-r(T-t_2)}E[P_T]$ 的模拟估计, 这是 S_{t_2} 的函数, 从接近但小于 $S_{t_3}^*$ 的 S_{t_2} 开始 (注意: $S_{t_3}^*$ 是已知的, $S_{t_2}^*$ 必须小于 $S_{t_3}^*$), 对一系列逐渐减小 S_{t_2} 重复模拟过程. 一旦得到 S_{t_2} 和贴现期望值 $e^{-r(T-t_2)}E[P_T]$ 的对应关系, 就能够求得 $S_{t_2}^*$ 的估计, 使得方程 (6.3.16) 成立.

沿着时间倒向处理, 继续估计 t_1 时刻的最优实施价格. 现在, 模拟从 t_1 开始. 首先选择初始资产价格 S_{t_1}, 使其稍微小于 $S_{t_2}^*$, 然后对逐渐减小的 S_{t_1} 重复模拟过程. 仍然希望找到持有看跌期权的贴现期望估计值, 这个期望值是 S_{t_1} 的函数. 在通常的模拟中, t_2 时刻生成的资产价格 S_{t_2} 依赖于初始值 S_{t_1}. 利用先前步骤得到的 $S_{t_2}^*$ 的估计, 可以确定 S_{t_2} 是否落在实施区域. 如果是, 则模拟路径对应的看跌期权估计值为提前实施值; 否则, 继续模拟, 生成到期日 T 的资产值. 该模拟路径的看跌期权值就等于对应到期日收益的现值. 进行足够多次的模拟, 以得到贴现期望值的估计. 按照相似的方式, 可以确定临界值 $S_{t_1}^*$, 使得当选取 S_{t_1} 为 $S_{t_1}^*$ 时, 内在价值 $X - S_{t_1}^*$ 等于持有看跌期权贴现期望值的估计.

一旦确定了 t_1 和 t_2 时刻的最优实施价格, 就可以模仿上面的数值过程, 通过初值为 S_{t_0} 的模拟过程找到 t_0 时刻持有看跌期权贴现期望值的估计. 给定 S_{t_0}, 看跌期权在 t_0 时刻的值是利用模拟得到贴现期望的估计值和提前实施的内涵价值 $X - S_{t_0}$ 中最大的一个 (考虑到 t_1 和 t_2 的提前实施策略已确定).

3. Broadie-Glasserman 算法

随机网格算法由 Broadie 和 Glasserman (1997) 提出, 该算法对真实期权值产生两个估计值, 一个偏高, 另一个偏低, 但是当模拟次数趋于无穷时, 两个都是渐近无偏估计. 结合这两个估计就得到期权值的保守的置信区间.

首先, 构造每个节点具有 b 个分支的随机树 (图 6.7, $b = 3$), t_j 时刻节点的资产值可以表示为

$$S_j^{i_1 i_2 \cdots i_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, N, \quad 1 \leqslant i_1, \cdots, i_j \leqslant b,$$

其中 N 为时间步长的总数目. t_j 时刻节点的总数为 b^j, 其中 S_0 为固定的初始状

态, 每个序列 $S_0, S_1^{i_1}, S_2^{i_1 i_2}, \cdots, S_N^{i_1 i_2 \cdots i_N}$ 为资产价格马尔可夫过程的一次实现. 当两个序列在某个 i_j 上不同时, 它们相互独立地变化.

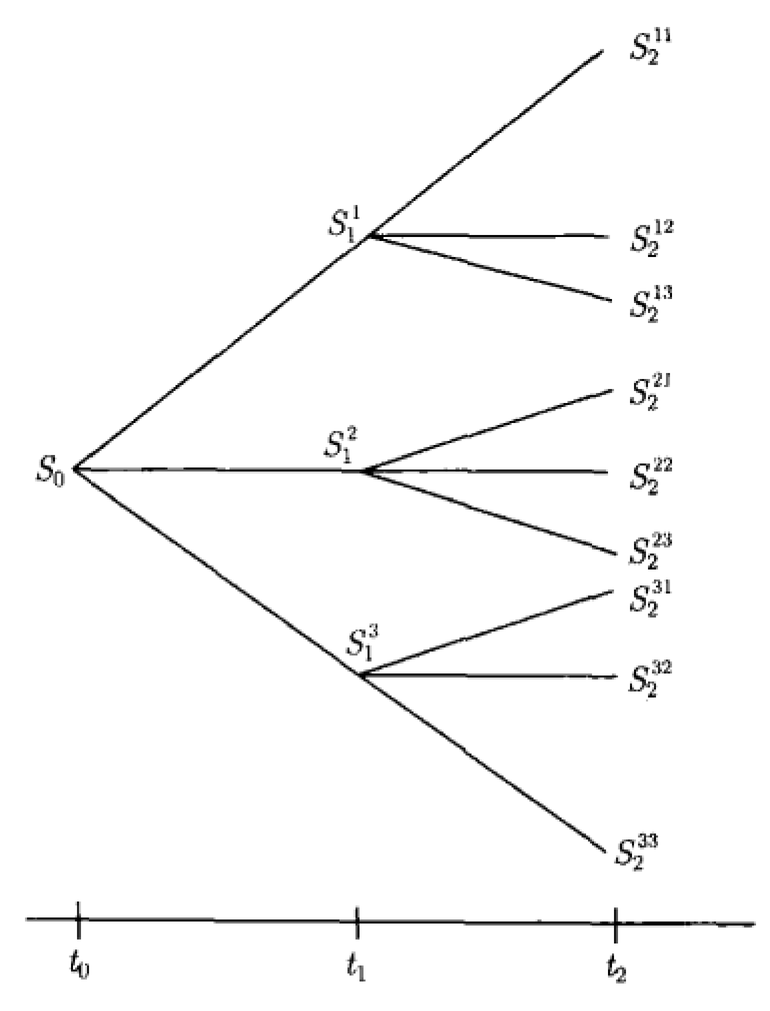


图 6.7 两个时间步长, 三个分支的模拟树

令 $\theta_{\text{high},j}^{i_1\cdots i_j}$ 和 $\theta_{\text{low},j}^{i_1\cdots i_j}$ 分别表示 t_j 时刻节点 $(i_1, \cdots, i_j)$ 上期权值的高低估计. 另外, 设 $h_j(s)$ 是在 t_j 时刻状态 s 时实施期权的收益, $1/R_{j+1}$ 是从 t_j 到 t_{j+1} 的贴现因子. Broadie 和 Glasserman 定义 t_j 时刻 $(i_1, \cdots, i_j)$ 节点期权值的高估计是提前实施收益和具有 b 个相邻子节点持有值估计的最大值, 即

$$\theta_{\text{high},j}^{i_1\cdots i_j} = \max\left(h_j\left(S_j^{i_1\cdots i_j}\right), \frac{1}{b}\sum_{i_{j+1}=1}^{b}\frac{1}{R_{j+1}}\theta_{\text{high},j+1}^{i_1\cdots i_j i_{j+1}}\right). \tag{6.3.17}$$

可以简单地说明为什么上面的估值偏高. 在模拟过程中, 如果 t_{j+1} 时刻节点上的资产价格偏高, 则上述动态规划过程将选择不实施, 取值高于最优实施. 另一方面, 如果 t_{j+1} 时刻模拟的资产价格偏低, 则动态规划过程将会选择实施, 即使最优决策是不实施. 因为利用了未来的信息, 所以期权值被过高估计.

低估计的数值算法复杂一些. 在每个节点, 一个分支用于估计持有价值, 而其他 $b-1$ 个分支用于估计实施决策. 相同的过程重复 b 次, 其中每个分支轮流选择一次. 为了更加详细地解释该过程, 假设第 k 个分支用于估计持有价值, 而其他 $b-1$ 个分支用来估计实施决策. 如果收益 $h_j\left(S_j^{i_1\cdots i_j}\right)$ 大于或等于持有价值的期望值, 则选择

提前实施. 这个期望通过 $b-1$ 个分支上贴现值 $\frac{1}{R_{j+1}}\theta_{\text{low},j+1}^{i_1\cdots i_{j+1}}(i_{j+1}=1,\cdots,b,i_{j+1}\neq k)$ 取平均来计算. 如果选择提前实施, 则 $\eta_j^{i_1\cdots i_j k}$ 取收益值 $h_j(S_j^{i_1\cdots i_j})$; 否则, 就取持有值 $\frac{1}{R_{j+1}}\theta_{\text{low},j+1}^{i_1\cdots i_j k}$. 这样, 通过这 b 步计算得到 b 个估计值, 而它们的平均值给出了节点上的期权估计值. 这个过程如下描述: 令

$$\eta_j^{i_1\cdots i_j k}=\begin{cases} h_j\left(S_j^{i_1\cdots i_j}\right), & h_j\left(S_j^{i_1\cdots i_j}\right)\geqslant \frac{1}{b-1}\sum\limits_{\substack{i_{j+1}=1\\ i_{j+1}\neq k}}^{b}\frac{1}{R_{j+1}}\theta_{\text{low},j+1}^{i_1\cdots i_j i_{j+1}}, \\ \frac{1}{R_{j+1}}\theta_{\text{low},j+1}^{i_1\cdots i_j k}, & h_j\left(S_j^{i_1\cdots i_j}\right)<\frac{1}{b-1}\sum\limits_{\substack{i_{j+1}=1\\ i_{j+1}\neq k}}^{b}\frac{1}{R_{j+1}}\theta_{\text{low},j+1}^{i_1\cdots i_j i_{j+1}}, \quad k=1,\cdots,b, \end{cases} \tag{6.3.18}$$

则

$$\theta_{\text{low},j}^{i_1\cdots i_j}=\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b}\eta_j^{i_1\cdots i_j k}. \tag{6.3.19}$$

上述过程给出一个低估计值的解释留作练习 (见习题 6.33).

算法 (6.3.17) 和 (6.3.18), (6.3.19) 都是倒向推导, 即知道了 t_{j+1} 时刻的估计, 就可以计算一个时间段前 t_j 时刻的估计. 对于高、低偏差估计, 从到期日 $T=t_N$ 开始迭代, 到期日收益函数都为

$$\theta_N^{i_1\cdots i_N}=h_N\left(S_N^{i_1\cdots i_N}\right). \tag{6.3.20}$$

Broadie-Glasserman 算法可以推广处理多资产期权, 计算可以在工作站上平行处理, 也可以利用方差减小技术加速收敛速度. 算法也可以体现多重决策, 而不仅仅是两重决策: 实施或持有.

4. 利用基函数的线性回归法

在提前实施为离散时刻的假设下, 期权价值满足如下动态规划方程:

$$V_n=\max(h_n(S),H_n(S)),\quad n=0,1,\cdots,N-1, \tag{6.3.21}$$

其中 $S=S(t_n),H_n(S)$ 为 t_n 时刻的持有价值, $h_n(S)$ 为实施收益. 在到期日 $t_N=T$ 有 $V_N=h_N(S)$(为记号方便起见, 令 $H_N(S)=0$). 不同时刻的持有价值满足如下递归格式:

$$H_n(S)=E\left[\max(h_{n+1}(S(t_{n+1})),H_{n+1}(S(t_{n+1}))|S(t_n)=S)\right]. \tag{6.3.22}$$

困难在于估计式 (6.3.22) 的条件期望, 这可以通过 $H_n(S)$ 的如下逼近解决:

$$H_n(S) \approx \sum_{m=0}^{M} \alpha_{nm}\phi_{nm}(S), \tag{6.3.23}$$

其中 $\phi_{nm}(S)$ 为待选择的基函数. Longstaff 和 Schwartz (2001) 提出, 通过到基函数生成空间的最小平方投影来确定 α_{nm} 的系数. 他们选择的基函数是 Laguerre 多项式, 定义为

$$L_m(S) = e^{-S/2}\frac{e^S}{m!}\frac{d^m}{dS^m}\left(S^m e^{-S}\right), \quad m = 0, 1, 2, \cdots. \tag{6.3.24}$$

前几项分别为

$$L_0(S) = e^{-S/2}, \quad L_1(S) = e^{-S/2}(1-S), \quad L_2(S) = e^{-S/2}\left(1 - 2S + \frac{S^2}{2}\right).$$

沿着 Longstaff 和 Schwartz(2001) 算法的思路, 用 $C(\omega, s; t, T)$ 表示在 t 时刻及之前期权没有实施条件下期权产生的现金流路径, 其中 ω 表示样本路径, T 为期权的到期日. 假设期权的持有者在后来 s 时刻都采取最优停时策略, 其中 $t < s \leqslant T$. 回顾美式期权价值是期权现金流贴现的最大值, 其中最大是对所有的停时. 寻找最优停时的一个分段近似, 该最优停时对应着美式期权的提前实施. 像其他模拟算法那样, 关键在于确定持有价格的条件期望值.

以 $H_n(\omega; t_n)$ 表示 t_n 时刻的持有价值. 根据无套利原则, $H_n(\omega)$ 是在风险中性测度下, 剩余现金流贴现的期望值. 在 t_n 时刻, $H_n(\omega)$ 为

$$H_n(\omega; t_n) = E\left[\sum_{j=n+1}^{N} e^{-r(t_j - t_n)} C(\omega, t_j; t_n, T)\right], \tag{6.3.25}$$

其中期望是在风险中性测度下 t_n 时刻的滤波上条件. 假设已经选择 M 个基函数, 然后通过将某些样本路径上贴现资金流回归到基函数来估计 $H_n(\omega)$, 而这些样本路径在 t_n 时刻期权是有价值的. Longstaff 和 Schwartz (2001) 提出, 只有期权有价值的路径可用于估计, 因为实施决策只有在赚钱区域才有意义. 一旦利用线性回归得到持有价值估计 $\widehat{H}_n(\omega)$ 的泛函形式, 就可以根据路径 ω, t_n 时刻已知资产价格计算持有价值的估计值.

计算的目标是求解停时准则, 以沿着每个资产价格路径在每个时刻点最大化期权价值. 从到期日 t_N 开始倒向计算. 在 t_N 时刻, 现金流为到期日的收益函数, 是已知的. 向前一个时间步长, 寻找在 t_{N-1} 时刻期权有价值的路径. 之所以只利用这些路径, 是因为在可以实施的区域内才能较好地估计条件期望值. 对于这些路径, 如果期权在 t_{N-1} 时刻仍然未实施, 则计算 t_N 时刻的贴现现金流. 考虑路

径 k, 设在 t_{N-1} 和 t_N 时刻的资产价格分别为 $S_{N-1}^{(k)}$ 和 $S_N^{(k)}(k=1,\cdots,K)$, 其中 K 为 t_{N-1} 时刻期权有价值的总路径数. 在路径 k 上, t_{N-1} 时刻的贴现现金流为 $e^{-r(t_N-t_{N-1})}h_N(S_N^{(k)})$, 其中 h_N 为期权到期日的收益函数. 利用 K 个数据点和所选择的 M 个基函数的信息, 通过回归 t_{N-1} 时刻的贴现资金流 (关于 t_{N-1} 时刻的资产值) 估计持有价值 $\widehat{H}_{N-1}^{(k)}$. 如果立即实施的价值大于等于持有价值估计值, 则对于有价值路径 ω, t_{N-1} 时刻的提前实施是最优的. 此时, 令 t_{N-1} 时刻的现金流为实施价值.

一旦确定了 t_{N-1} 时刻的现金流路径和停时准则, 就可以利用相同的方式递归地计算前面时间节点 $t_{N-2},\cdots,t_1$. 这样就得到每条路径所有时刻的最优停时准则. 一旦确定了所有路径期权产生的现金流, 就可以将每个现金流贴现到求解时间, 平均所有的样本价格路径, 以计算期权价值的估计值.

为了描述上述数值过程, 采用 Longstaff 和 Schwartz (2001) 给出的数值例子. 考虑三年期美式 (实际上是百慕大) 看跌期权, 其敲定价为 1.1, 标的资产不分红. 看跌期权只能在 $t=1,2,3$ 时刻实施. 取无风险利率为 0.06. 在风险中性测度下, 资产价格只产生 8 条样本路径. 下面的表格给出了这些路径.

路径	资产价格路径				现金流 $t=3$
	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	
1	1.00	1.09	1.08*	1.34	0.00
2	1.00	1.16	1.26	1.54	0.00
3	1.00	1.22	1.07*	1.03	0.07
4	1.00	0.93	0.97*	0.92	0.18
5	1.00	1.11	1.56	1.52	0.00
6	1.00	0.76	0.77*	0.90	0.20
7	1.00	0.92	0.84*	1.01	0.09
8	1.00	0.88	1.22	1.34	0.00

* 看跌期权在 $t=2$ 时刻有价值的样本路径.

注意: 看跌期权在 5 条路径上, 在 $t=2$ 时刻有价值. 如何求解最优停时准则, 使得沿着每条路径在每个时间点最大化看跌期权价值?

对于 $t=2$ 时期权有价值的这 5 条路径, 如果 $t=2$, 则看跌期权不实施, 计算 $t=2$ 时刻收到的贴现现金流. 设 X 表示 $t=2$ 时刻资产的价格, Y 表示在 $t=2$ 不实施条件下 $t=3$ 时刻的贴现现金流. 期权有价值的资产路径对应的 X 和 Y 为

路径	Y	X	实施价值	持有价值
1	0.00×0.94176	1.08	0.02	0.0369
3	0.07×0.94176	1.07	0.03	0.0461
4	0.18×0.94176	0.97	0.13	0.1176
6	0.20×0.94176	0.77	0.33	0.1520
7	0.09×0.94176	0.84	0.26	0.1565

注: 贴现因子为 $e^{-0.06}=0.94176$.

为简单起见，选择基函数为 $1, X$ 和 X^2，用这些基函数回归 Y. Longstaff 和 Schwartz(2001) 得到如下条件期望函数：

$$E[Y|X] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2.$$

现在，比较 $t=2$ 立即实施所得的价值和持有的价值 (利用上面条件期望函数计算). 例如，对于路径 1，$X = 1.08$，立即实施价值为 $1.10 - 1.08 = 0.02$，而持有价值为 $-1.070 + 2.983 \times 1.08 - 1.813 \times 1.08^2 = 0.0369$. 对于第一条路径，持有价值更高，在 $t=2$ 时刻，实施期权并非最优的. 对于路径 1，在 $t=2$ 之前不提前实施条件下，期权持有者得不到任何现金流. 对于路径 4，由于实施价值比持有价值高，$t=2$ 的现金流为实施价值. 可以验证，对于路径 6 和 7，在 $t=2$ 时刻，实施也是最优的.

对于这 8 条资产价格路径，下表总结了 $t=2$ 和 $t=3$ 时刻收到的现金流.

路径	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	—	0.00	0.00
2	—	0.00	0.00
3	—	0.00	0.07
4	—	0.13	0.00
5	—	0.00	0.00
6	—	0.33	0.00
7	—	0.26	0.00
8	—	0.00	0.00

注意：对于路径 4, 6 和 7，看跌期权在 $t=2$ 时提前实施是最优的. 一旦期权在 $t=2$ 时刻实施，在 $t=3$ 时刻的现金流就为 0.

接下来，递推确定 $t=1$ 时刻的停时准则. 在 $t=1$ 时刻，期权有 5 条有价值的路径 (路径 1, 4, 6, 7 和 8). 类似地，利用常数，X 和 X^2 以回归 $t=1$ 时刻期权现金流的贴现值，估计 $t=1$ 时刻的期望函数，其中 X 为 $t=1$ 时刻的资产价格. 再次，计算 $t=1$ 时刻持有价值的估计值和立即实施的价值.

路径	Y	X	实施价值	持有价值
1	0.00×0.94176	1.09	0.01	0.0139
4	0.13×0.94176	0.93	0.17	0.1092
6	0.33×0.94176	0.76	0.34	0.2866
7	0.26×0.94176	0.92	0.18	0.1175
8	0.00×0.94176	0.88	0.22	0.1533

注：$t=1$ 时刻估计的条件期望函数为 $E[Y|X] = 2.038 - 3.335X + 1.356X^2$.

在 $t=1$ 时刻，对于路径 4, 6, 7 和 8，实施是最优的. 现在，确定了所有时间的最优停时准则.

路径	停止准则			期权现金流矩阵		
	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	0	0	0	0.00	0.00	0.00
2	0	0	0	0.00	0.00	0.00
3	0	0	1	0.00	0.00	0.07
4	1	0	0	0.17	0.00	0.00
5	0	0	0	0.00	0.00	0.00
6	1	0	0	0.34	0.00	0.00
7	1	0	0	0.18	0.00	0.00
8	1	0	0	0.22	0.00	0.00

注："1" 表示实施日期的最优实施策略.

对于给定路径, 一旦在某个较早时刻选择了最优实施, 则利用倒向推导过程, 后面时刻的停止准则就显而易见了. 当确定了每条路径每个时刻上看跌期权所产生的现金流时, 就可以将每个现金流贴现到现时, 取所有路径的平均值, 从而计算看跌期权价值.

6.4 习　题

6.1　Jarrow 和 Rudd (1983) 不采用树对称条件 $u = 1/d$ (见方程 (6.1.1c)), 而选择第三个条件为 $p = 1/2$. 结合方程 (6.1.1a), (6.1.1b), 证明

$$u = R(1+\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t}-1}),\quad d = R(1-\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t}-1}),\quad p = \frac{1}{2}.$$

6.2　假设标的资产以红利率 q 连续分红, 则 u, d 和 p 的两个方程可以修改为

$$pu + (1-p)d = e^{(r-q)\Delta t},$$

$$pu^2 + (1-p)d^2 = e^{2(r-q)\Delta t}e^{\sigma^2\Delta t}.$$

证明二叉树模型的参数值可以修改如下：资产价格的增长因子 $e^{r\Delta t}$(在风险中性测度下) 用新因子 $e^{(r-q)\Delta t}$ 替换, 而二叉树的贴现因子仍然是 $e^{-r\Delta t}$.

6.3　证明

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(n,k,p') = N(d_1),$$

其中

$$p' = ue^{-r\Delta t}p,\quad d_1 = \frac{\ln\dfrac{S}{X}+\left(r+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

提示：注意：

$$1-\Phi(n,j,p')=P\left(\frac{j-np'}{\sqrt{np'(1-p')}}<\frac{\ln\dfrac{X}{S}-n\left(p'\ln\dfrac{u}{d}+\ln d\right)-\alpha\ln\dfrac{u}{d}}{\sqrt{np'(1-p')}\ln\dfrac{u}{d}}\right),\ 0<\alpha\leqslant 1.$$

考虑 $n\left(p'\ln\dfrac{u}{d}+\ln d\right)$ 和 $np'(1-p')\left(\ln\dfrac{u}{d}\right)^2$ 按照 Δt 的幂次 Taylor 展开，证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left(p'\ln\frac{u}{d}+\ln d\right)=\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau,\quad \lim_{n\to\infty} np'(1-p')\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2=\sigma^2\tau,$$

其中 $n\Delta t=\tau$.

6.4 考虑修正的二叉树模型，其用于定价标的资产不分红美式看跌期权的数值解 (见方程 (6.1.14))，推导接近到期日期权的最优实施价格. 将其结果和 $\Delta t\to 0$ 的连续模型进行比较.

6.5 考虑二叉树的节点，该二叉树用于定价标的资产不分红美式看跌期权的数值解. 节点 (n,j) 对应着距当前时刻具有 n 个时间步长，并且在这 n 步运动中资产价格有 j 次向上跳的节点. 节点 (n,j) 上的看跌期权值用 P_j^n 表示. 和连续模型相似，定义实施区域 $\mathcal{S}$ 和持有区域 $\mathcal{C}$ 分别为

$$\mathcal{S}=\left[(n,j)|P_j^n=X-Su^jd^{n-j}\right],\quad \mathcal{C}=\left[(n,j)|P_j^n>X-Su^jd^{n-j}\right].$$

也就是说，$\mathcal{S}\,(\mathcal{C})$ 表示期权已经实施 (未实施) 节点的集合. 设 N 是二叉树总时间步长的数目，证明 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{C}$ 具有如下性质 (Kim and Byun, 1994)：

(1) 假设 $(n+1,j)$ 和 $(n+1,j+1)$ 属于 $\mathcal{S}$，则对 $0\leqslant n\leqslant N-1, 0\leqslant j\leqslant n$ 有 $(n,j)\in\mathcal{S}$;

(2) 假设 $(n+2,j+1)\in\mathcal{C}$，则对 $0\leqslant n\leqslant N-2, 0\leqslant j\leqslant n$，有 $(n,j)\in\mathcal{C}$;

(3) 假设 $(n,j)\in\mathcal{S}$，则 $(n,j-1)$ 和 $(n-1,j-1)\in\mathcal{S}$; 另外，假设 $(n,j)\in\mathcal{C}$，则对 $1\leqslant n\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant n-1$ 有 $(n,j+1)\in\mathcal{C}$ 和 $(n-1,j)\in\mathcal{C}$.

6.6 考虑可回购美式看跌期权的二叉树定价，令

$$P_{\text{cont}}=\frac{pP_{j+1}^{n+1}+(1-p)P_j^{n+1}}{R},$$

证明二叉树格式 (6.1.15) 可以修改为

$$P_j^n=\max(\min(P_{\text{cont}},K),X-S_j^n).$$

给出修正格式的金融含义.

6.7 证明在 n 步时间的数值计算中, 三叉树和二叉树格式的乘法和加法总数为

格式	乘法的数目	加法的数目
三叉树	$3n^2$	$2n^2$
二叉树	n^2+n	$\frac{1}{2}(n^2+n)$

6.8 设在三叉树格式中, 令 $p_2=0$, $p_1=-p_3=p$. 通过匹配 $\zeta(t)$ 和 $\zeta^a(t)$ 的均值和方差

$$E[\zeta^a(t)]=2pv-v=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t,$$
$$\operatorname{var}(\zeta^a(t))=v^2-E[\zeta^a(t)]^2=\sigma^2\Delta t,$$

证明求解上面两个方程, 参数 v 和 p 的值为

$$v=\sqrt{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\Delta t^2+\sigma^2\Delta t}$$

$$p=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sqrt{\sigma^2\Delta t+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\Delta t^2}}\right].$$

6.9 Boyle (1988) 提出如下三跳过程来近似单周期资产价格过程:

跳的种类	概率	资产价格
上跳	p_1	uS
不动	p_2	S
下跳	p_3	dS

其中 S 为当前的资产价格. 选取中间跳比率为 1.Boyle 三叉树模型有 5 个参数: u,d 和概率值. 参数满足的方程为

(1) 设概率值之和为 1,

$$p_1+p_2+p_3=1;$$

(2) 令近似离散分布和连续对数正态分布具有相同的一、二阶矩,

$$p_1u+p_2+p_3d=e^{r\Delta t}=R,$$

$$p_1u^2+p_2+p_3d^2-(p_1u+p_2+p_3d)^2=e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t}-1\right),$$

最后一个方程可以简化为

$$p_1u^2 + p_2 + p_3d^2 = e^{2r\Delta t}\, e^{\sigma^2\Delta t},$$

剩下的两个条件可以自由选择. Boyle(1988) 选择这两个条件为

$$ud = 1$$

和

$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad \lambda\text{为自由参数}.$$

将 5 个方程联立求解, 证明

$$p_1 = \frac{(W-R)u-(R-1)}{(u-1)(u^2-1)}, \quad p_3 = \frac{(W-R)u^2-(R-1)u^3}{(u-1)(u^2-1)},$$

其中 $W = R^2e^{\sigma^2\Delta t}$. 证明当 $\lambda = 1$ 时, Boyle 三叉树模型简化为 Cox-Ross-Rubinstein 三叉树格式.

6.10 令 $y = \ln S$, Kamrad-Ritchken 的三叉树格式可以表示为

$$c(y, t-\Delta t) = [p_1c(y+v,t) + p_2c(y,t) + p_3(y-v,t)]\, e^{-r\Delta t}.$$

证明上面三叉树格式的 Taylor 展开为

$$\begin{aligned}
&-c(y,t-\Delta t) + [p_1c(y+v,t) + p_2c(y,t) + p_3(y-v,t)]e^{-r\Delta t} \\
=&\Delta t\frac{\partial c}{\partial t}(y,t) - \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(y,t) + \cdots + (1-e^{-r\Delta t})c(y,t) \\
&+ e^{-r\Delta t}\left[(p_1-p_3)v\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{2}(p_1+p_3)v^2\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right. \\
&\left. + \frac{1}{6}(p_1-p_3)v^3\frac{\partial^3 c}{\partial y^3} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

给定概率值如方程 (6.1.19a)~(6.1.19c), 证明三叉树格式的数值解 $c(y,t)$ 满足

$$0 = \frac{\partial c}{\partial t}(y,t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial c}{\partial y}(y,t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}(y,t) - rc(y,t) + O(\Delta t).$$

6.11 证明三叉树相关区域的宽度以 $\sqrt{n}$ 量级增长 (图 6.5), 其中 n 为距离到期日的时间步长数.

6.12 考虑方程 (6.1.22) 定义的 5 点多叉树格式和对应的 4 点格式 (通过设置 $\lambda = 1$ 得到), 证明 n 步计算的乘法和加法总数为 (Kamrad and Ritchken, 1991)

格式	乘法数目	加法数目
5 点	$\frac{5}{3}(2n^3+n)$	$\frac{4}{3}(2n^3+n)$
4 点	$\frac{2}{3}(2n^3+3n^2+n)$	$\frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n)$

6.13　考虑三资产期权模型, 标的资产对数收益过程为

$$\ln\frac{S_i^{\Delta t}}{S_i}=\zeta_i,\quad i=1,2,3,$$

其中 ζ_i 表示均值为 $\left(r-\dfrac{\sigma_i^2}{2}\right)\Delta t$, 方差为 $\sigma_i^2\Delta t(i=1,2,3)$ 的正态随机变量. 设 ρ_{ij} 表示 ζ_i 和 $\zeta_j(i,j=1,2,3,i\neq j)$ 的瞬间相关函数, 假设多元分布 $\xi_i^a(i=1,2,3)$ 的近似取为

ζ_1^a	ζ_2^a	ζ_3^a	概率
v_1	v_2	v_3	p_1
v_1	v_2	$-v_3$	p_2
v_1	$-v_2$	v_3	p_3
v_1	$-v_2$	$-v_3$	p_4
$-v_1$	v_2	v_3	p_5
$-v_1$	v_2	$-v_3$	p_6
$-v_1$	$-v_2$	v_3	p_7
$-v_1$	$-v_2$	$-v_3$	p_8
0	0	0	p_9

其中 $v_i=\lambda\sigma_i\sqrt{\Delta t}(i=1,2,3)$. 按照 Kamrad-Ritchken 方法, 求解概率值, 使得当 $\Delta t\to 0$ 时, 近似离散分布收敛到连续多元分布.

提示: 第一个和最后一个概率值为

$$\begin{aligned}p_1=&\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(\frac{r-\frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1}+\frac{r-\frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}+\frac{r-\frac{\sigma_3^2}{2}}{\sigma_3}\right)\right.\\&\left.+\frac{\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}}{\lambda^2}\right\},\\p_9=&1-\frac{1}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

6.14　考虑窗口巴黎式特征期权. 在每个时间点, 以该时刻及之前的连续观测时刻 $\widehat{m}$ 定义移动窗口. 在给定时刻重出期权, 如果资产价格已经落入敲出区域 m 个时刻点, 则 $m\leqslant\widehat{m}$, 并且在移动窗口内. 在什么条件下, 窗口巴黎式特征可以简化连续观测巴黎式特征? 在前向打靶法中, 如何构造对应的离散网格函数 g_{win}?

提示: 定义二进制字符串 $A = a_1a_2\cdots a_{\hat{m}}$ 以表示资产价格的历史路径, 用于描述在移动窗口内资产价格是否落入敲出区域, 所涉及的路径相关状态向量用二进制作为其元素 (Kwok and Lau, 2001a).

6.15　构造前向打靶格式, 用于定价连续观测欧式浮动敲定价格回望看涨期权. 特别说明如何定义到期日的收益函数. 如何修改前向打靶格式, 使其适用于美式提前实施特征?

6.16　考虑具有自动重置敲定价格特征的欧式看跌期权, 如果期权在预先设定日期的内在价值为 0, 则敲定价格重新设置为当前的资产价格. 到期日的敲定价格事先是未知的, 依赖于在预先设定日期的实际资产值. 构造前向打靶格式, 以定价敲定价格重置看跌期权 (Kwok and Lau, 2001a).

提示: 设 $t_\ell(\ell = 1, 2, \cdots, m)$ 是预先给定的重置日期, X_ℓ 表示 t_ℓ 时刻重设的敲定价格, 推导

$$X_\ell = \max(X, X_{\ell-1}, S(t_\ell)),$$

其中 X 为原先的敲定价格, $S(t_\ell)$ 表示 t_ℓ 时刻的资产价格.

6.17　假设希望利用函数在 $x_0, x_0 - \Delta x$ 和$x - 2\Delta x$ 的值在 x_0 以误差 $O(\Delta x^2)$ 近似 $\dfrac{df}{dx}$, 也就是说,

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \alpha_{-2}f(x_0 - 2\Delta x) + \alpha_{-1}f(x_0 - \Delta x) + \alpha_0 f(x_0) + O(\Delta x^2),$$

其中 α_{-2}, α_{-1} 和 α_0 为待确定的未知系数, 则可以通过求解如下方程组来得到这些系数:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{-2} \\ \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.18　考虑如下差分算子, 证明它们以二阶精度近似对应的微分算子:

(a) $$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0} = \frac{2f(x_0) - 5f(x_0 - \Delta x) + 4f(x - 2\Delta x) - f(x_0 - 3\Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2);$$

(b) $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = {} & [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0 - \Delta y) \\ & - f(x_0 - \Delta x, y_0 + \Delta y) + f(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y)]/(4\Delta x\Delta y) \\ & + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2).\end{aligned}$$

6.19 证明如下 Crank-Nicolson 格式局部截断误差的主项为 $O(\Delta\tau^2, \Delta x^2)$:

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta\tau} = \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right)$$
$$- \frac{r}{2}(V_j^n + V_j^{n+1}).$$

提示:在点 $\left(j\Delta x, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta\tau\right)$ 进行 Taylor 展开.

6.20 考虑如下形式 Black-Scholes 方程:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad W = e^{-r\tau}V, x = \ln S,$$

其中 $V(S,\tau)$ 为期权值, S 为资产价格. 双层六点隐式**紧格式**(compact scheme) 具有如下形式:

$$a_1 W_{j+1}^{n+1} + a_0 W_j^{n+1} + a_{-1} W_{j-1}^{n+1} = b_1 W_{j+1}^n + b_0 W_j^n + b_{-1} W_{j-1}^n,$$

其中

$$c = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta\tau}{\Delta x}, \qquad \mu = \sigma^2 \tfrac{\Delta\tau}{\Delta x^2},$$
$$a_1 = 1 - 3\mu - 3c - \frac{c^2}{\mu} + \frac{c}{\mu}, \qquad a_0 = 10 + 6\mu + \frac{2c^2}{\mu},$$
$$a_{-1} = 1 - 3\mu + 3c - \frac{c^2}{\mu} - \frac{c}{\mu}, \qquad b_1 = 1 + 3\mu + 3c + \frac{c^2}{\mu} + \frac{c}{\mu},$$
$$b_0 = 10 - 6\mu - \frac{2c^2}{\mu}, \qquad b_{-1} = 1 + 3\mu - 3c + \frac{c^2}{\mu} - \frac{c}{\mu}.$$

证明该紧格式具有二阶时间精度和四阶空间精度.

6.21 利用傅里叶方法推导 von Neumann 稳定性条件

(i) Jarrow-Rudd 二叉树格式 (见习题 6.1);

(ii) Kamrad-Ritchken 三叉树格式;

(iii) 显式 FTCS 格式 (见方程 (6.2.2)).

6.22 设 $p(S,M,t)$ 表示欧式浮动敲定价格回望看跌期权的价格函数. 定义 $x = \ln\frac{M}{S}$ 和 $V(x,t) = \frac{p(S,M,t)}{S}$, 则 $V(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(q - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x} - qV = 0, \quad x > 0,\ 0 < t < T.$$

终值和边界条件分别为

$$V(x,T)=e^x-1,\quad \frac{\partial V}{\partial x}(0,t)=0.$$

令 $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{r-q}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)$, 设置 $\Delta x=\sigma\sqrt{\Delta t}$, 二叉树格式具有如下形式:

$$V_j^n=\frac{1}{1+q\Delta t}\left[\alpha V_{j-1}^{n+1}+(1-\alpha)V_{j+1}^{n+1}\right],\quad j\geqslant 0.$$

假设 $x=0$ 的边界条件近似为

$$V_{-1}^{n+1}=V_0^{n+1},$$

数值边界条件为

$$V_0^n=\frac{1}{1+q\Delta t}\left[\alpha V_0^{n+1}+(1-\alpha)V_1^n\right].$$

以 $\mathcal{T}_0^n$ 表示上述二叉树格式在 $j=0$ 的局部截断误差, 证明

$$\mathcal{T}_0^n=-\frac{1}{1+q\Delta t}\frac{\sigma^2}{4}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{x=0}+O(\Delta x).$$

因此, 该二叉树格式是不相容的.

6.23　为了对浮动执行价格回望看跌期权得到相容的二叉树格式, 在 $j=0$ 利用有限体积法来构造二叉树离散格式. 首先, 从 $x=0$ 到 $x=\frac{\Delta x}{2}$ 将方程积分得到

$$\begin{aligned}0=&\int_0^{\frac{\Delta x}{2}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}-qV\right)dx+\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{\frac{\Delta x}{2}}-\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_0\right]\\&+\left(q-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(V_{\frac{\Delta x}{2}}-V_0\right).\end{aligned}$$

采用如下近似:

$$\int_0^{\frac{\Delta x}{2}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}-qV\right)dx\approx\left(\frac{V_0^{n+1}-V_0^n}{\Delta t}-qV_0^n\right)\Delta x,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{\frac{\Delta x}{2}}\approx\frac{V_1^{n+1}-V_0^{n+1}}{\Delta x},\quad V_{\frac{\Delta x}{2}}\approx\frac{V_1^{n+1}+V_0^{n+1}}{2},$$

在 $j=0$ 的二叉树近似为

$$V_0^n=\frac{1}{1+q\Delta t}\left[(2\alpha-1)V_0^{n+1}+2(1-\alpha)V_1^{n+1}\right].$$

验证上述二叉树近似的相容性.

6.24　假设采用 FTCS 格式求解 Black-Scholes 方程, 因此,

$$\frac{V_j^{n+1}-V_j^n}{\Delta\tau}=\frac{\sigma^2}{2}S_j^2\frac{V_{j+1}^n-2V_j^n+V_{j-1}^n}{\Delta S^2}+rS_j\frac{V_{j+1}^n-V_{j-1}^n}{2\Delta S}-rV_j^n.$$

证明数值格式不出现振荡的充分条件为 (Zvan et al., 1998)

$$\Delta S<\frac{\sigma^2 S_i}{r},\quad \frac{1}{\Delta\tau}>\frac{\sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2}+r.$$

6.25　有序障碍期权具有两边障碍边界. 不像普通双障碍期权, 它确定了穿越障碍的顺序. 只有穿越第一个障碍之后, 才能激活第二个障碍. 只有按照预先确定的顺序穿越两个障碍边界, 期权才被敲出. 在 Black-Scholes 定价框架下, 构造用于定价连续障碍期权的显式有限差分格式 (Kwok et al., 2001).

6.26　惩罚方法的特征是通过在 Black-Scholes 方程中增加一个非线性惩罚项来替换美式期权模型线性互补方程. 设 $h(S)$ 表示美式期权的实施收益. 取非线性惩罚项为 $\rho\max(h-V,0)$, 其中 ρ 为正惩罚参数, $V(S,\tau)$ 为期权价格函数. 证明当 $\rho\to\infty$ 时, 如下方程的解:

$$\frac{\partial V}{\partial\tau}=\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV+\rho\max(h-V,0)$$

趋于美式期权价格函数. 构造 Crank-Nicolson 格式以求解上面的非线性微分方程, 并求解对应非线性代数方程组的解. 注意: 非线性来源于惩罚项 (Forsyth and Vetzal, 2002).

6.27　考虑对偶变量方法 (见 (6.3.7a), (6.3.7b)), 解释为何

$$\mathrm{var}\left(\frac{c_i+\widetilde{c}_i}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{var}(c_i)+\ \mathrm{cov}(c_i,\widetilde{c}_i)\right].$$

注意: 生成 $\bar{c}_{AV}$[见方程 (6.3.8)] 的计算量大约是生成 $\hat{c}$ 的两倍. 应用式 (6.3.5), 证明如果

$$\mathrm{cov}(c_i,\widetilde{c}_i)\leqslant 0,$$

则对偶变量方法可以提高计算效率. 给出一个为何上述负相关性质通常都成立的统计理由 (Boyle et al., 1997).

6.28　考虑百慕大期权定价问题, 其中百慕大期权在 $t_1<t_2<\cdots<t_d=T(t_1\geqslant 0)$ 时刻有 d 个实施机会. 设百慕大期权的签发日期和到期日分别为 0 和 T. 设 M_t 表示 0 时刻一美元投资到无风险资产上 t 时刻的价值. 设 h_t 表示 t 时刻实施的收益, τ^* 是取值于 $\{t_1,t_2,\cdots,t_d\}$ 的停时, 则 0 时刻百慕大期权的价值为

$$V_0=\sup_{\tau^*}E_0\left[\frac{h_\tau}{M_\tau}\right].$$

考虑如下定义的量 (Andersen and Broadie, 2004):

$$Q_{t_i} = \max\left(h_{t_i}, E_{t_i}\left[\frac{M_{t_i}}{M_{t_{i+1}}} Q_{t_{i+1}}\right]\right), \quad i = 1, 2, \cdots, d-1,$$

解释为什么 Q_{t_i} 是在 t_i 时刻新发行的百慕大期权的价值. 是否和 0 时刻发行的百慕大期权在 t_i 时刻的价值相同? 如果不相同, 解释其原因?

6.29 通常不能直接将 Tilley 算法扩展到多资产美式期权. 讨论修改打包排序过程, 对于 $n(n > 1)$ 个资产的价格路径分组. 另外, 当实施边界是高维平面时, 考虑如何确定实施或持有的指示变量 (Fu et al., 2001).

6.30 在 Grant-Vora-Weeks 算法中 (Fu et al., 2001), 讨论如何在求根过程中实现切割方法, 用于在如下代数方程中求解最优实施价格 $S_{t_i}^*$:

$$X - S_{t_i}^* = e^{-r(T-t_i)} E\left[P_{i+1} \middle| S_{t_i} = S_{t_i}^*\right]$$

(Fu et al., 2001).

6.31 判断由 Grant-Vora-Weeks 算法得到的期权价格估计值是属于偏高的、偏低的, 还是无偏的.

6.32 解释为什么方程 (6.3.18), (6.3.19) 所定义的估计值 $\theta_{\text{low},j}^{i_1\cdots i_j}$ 是偏低的.

提示: 由于利用独立的信息集合来确定持有价值和提前实施决策, 消除了向上的偏差. 在有限的样本内, 提前实施决策总是次优的.

第 7 章　利率模型和债券定价

在前几章讨论的定价模型中, 无风险利率常常被假定为常数. 这样的假设在短期期权中是可以接受的, 此时, 利率只出现在贴现因子中. 近几年来, 在市场中看到大量的固定收益衍生产品和新型利率衍生产品, 它们的收益是强烈依赖于利率的. 在这些金融衍生产品中, 利率不仅用于贴现, 也出现在定义金融衍生产品的收益函数中. 这些利率衍生产品的价格对于利率水平高度敏感. 因此, 正确地建立利率的随机波动模型以及利率的期限结构, 对于给出利率衍生产品可信赖的定价模型是十分重要的.

利率衍生产品的交易提供了利率信息和不断增值的资本市场. 债券、互换以及互换期权是可交易衍生产品, 并且它们的价格是可以直接由市场的报价得到的. 债券的价格严格依赖于利率在其产品期限内的随机波动性. 与债券不同, 利率本身不是可交易的资产, 只能用依赖于利率的债券和其他固定收益金融产品进行交易. 在本章中, 将考虑各种利率随机动态模型, 推导利率的变化与债券价格之间的数学关系. 而把各种利率衍生产品的定价模型放在下一章进行讨论.

在 7.1 节中, 讨论债券的贴现价格和收益曲线的关系, 研究远期合约、债券远期和典型利率互换的特性. 一些关于利率期限结构理论发展的历史也作简要的叙述. 然后由零息票债券的价格延伸出各种利率的定义. 对利率的期限结构的理论发展作一个简要的说明. 同时, 给出了确定性利率下的零息票的价格.

在 7.2 节中, 将讨论各种单因子短期利率模型. 当短期利率模型服从 Itô 过程时, 应用无套利原理推导债券定价的微分方程. 将给出债券价格如何表示为随机积分的期望形式. 当债券价格函数服从仿射结构时, 推导短期利率模型中参数应满足的条件. 将详细讨论 Vasicek 均值回归模型和 Cox-Ingersoll-Ross 平方根扩散模型, 考察并分析从两种典型的仿射结构模型得到利率的期限结构. 给出广义单因子模型可应用性的实证研究. 由于经常会出现由短期利率模型得到的利率期限结构和波动率期限结构与市场上观测到的初始期限结构不一致, 所以要考虑带有时间函数参数的利率模型, 并且给出如何利用当前市场上可交易的债券价格的期限结构进行参数校正.

在单因子利率模型下, 不同到期日的债券的短期收益是完全相关的. 而多因子模型克服了单因子模型的这个主要缺陷, 因而在 7.3 节中, 考虑多因子利率模型, 包括两个因子的长短期利率模型和随机波动率模型以及多因子仿射结构模型. 然而,

大多数这些多因子利率模型的解析可解性较差, 将分别说明多因子利率模型的优点和缺陷.

在 7.4 节中, 考虑由 HJM 模型描述的远期利率随机波动模型. 大部分流行的短期利率模型都可以看成是 HJM 框架的特例. HJM 框架提供了描述短期利率的近似的一般方法. HJM 形式的模型一般都不满足马尔可夫性. 这些模型的数值计算方法将会变得非常复杂, 因此, 限制了它们的实际应用范围. 研究 HJM 模型具有马尔可夫性的条件, 并且给出各种不同类型的具有马尔可夫性的 HJM 模型的特征.

7.1 债券价格与利率

债券是一种金融合约, 债券发行者承诺在债券到期日支付给债券持有者本金, 并在特定的时间 (通常是周期性的) 支付给债券持有者票息. 如果没有票息, 则这个债券就称为**贴现债券或零息票** (discount bond or zero coupon bond). 由债券持有者预付的款项可以被看成是借给债券发行人的贷款. 债券的票面价值通常被称为**面值** (par value). 一个自然的问题是: 在合约的初始时刻, 债券投资者应该支付多少款项, 才能保证对于双方是公平的呢? 款项的多少就是债券的价格. 债券的价格可以被理解为债券在整个期限内现金流的现值, 也就是债券持有者期望在债券的生命期限中变成现金的数量. 因为利率是随机波动的, 所以计算债券现金流当前价值时用到的贴现因子是随机的.

在债券发行后, 由于在期限过程中的变化、利率的波动以及其他因素, 如债券发行者的信用质量变化等, 债券的价格会在它的有效期限内不断地变化. 在本节和 7.2 节中, 只考虑债券不会违约的情况. 尽管没有任何公司的债券是完全没有违约风险的, 但在一般情况下, 美国国库券被认为是零违约风险的. 从无风险债券价格推导出的利率被称为**无风险** (riskless) 利率. 关于有违约风险的债券的定价以及描述债券发行者信用变化过程的模型, 它们本身就是非常巨大的课题, 而且在信用风险模型方面的文献也在不断更替和发展. 不过这些问题在本书中将不予讨论.

7.1.1 债券价格与收益率曲线

零息票债券价格 $B(t,T)$ 是一个关于时间 t 和期限 T 的函数. 因此, $B(t,T)$ 的图像是一个以 t 和 T 为变量的二维图像. 在当前时刻 t_0, $B(t_0,T)$ 相对于 T 的图像, 体现了债券价格随着不同期限的运动轨迹 (图 7.1).

为方便起见, 只要不是特别说明, 记每份息票的面值为一个单位. 如果利率为正, 因为当债券的期限变长时, 贴现因子也会变大, 因此, $B(t,T)$ 始终是到期日 T 的减函数. 债券的市场价格表示对未来市场利率的期望. 容易理解那些到期日很接近的债券价格之间存在很强的相关性. 为了更好地理解和描述债券价格的变化规

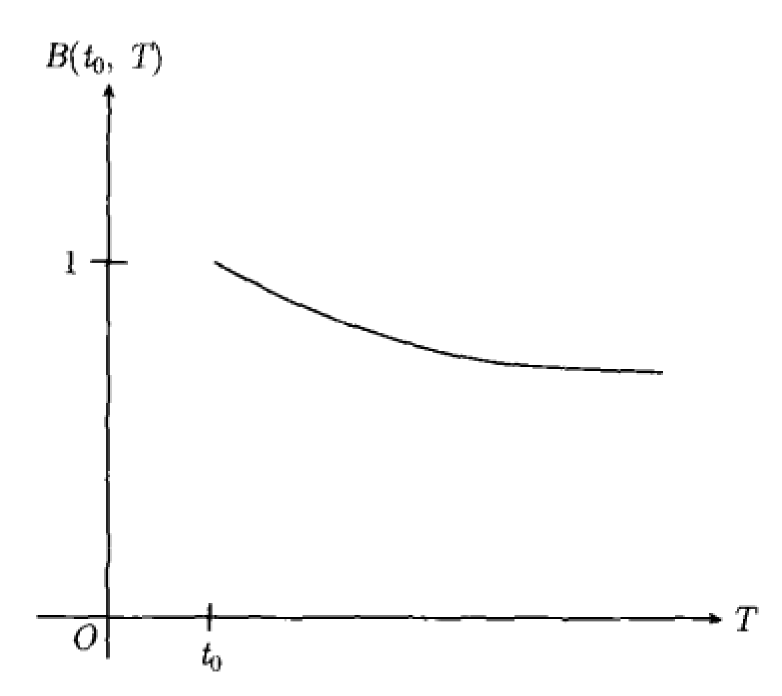


图 7.1 零息票债券价格在 t_0 时刻以后相对于到期日的变化图像,
债券价格 $B(t_0,T)$ 是到期日 T 的减函数

律, 应该研究这种相关性.

另一方面, 若设零息票的期限 T_0 固定, 则对于 $t<T_0$, 可以画出 $B(t,T_0)$ 相对于 t 的图像 (图 7.2). 此时, 零息票价格关于时间 t 的函数可以看成是一个随机过程. 随着时间 t 不断接近到期日 T_0, 零息票价格趋于单位面值, 这被称为**回归面值现象** (pull-to-par phenomenon).

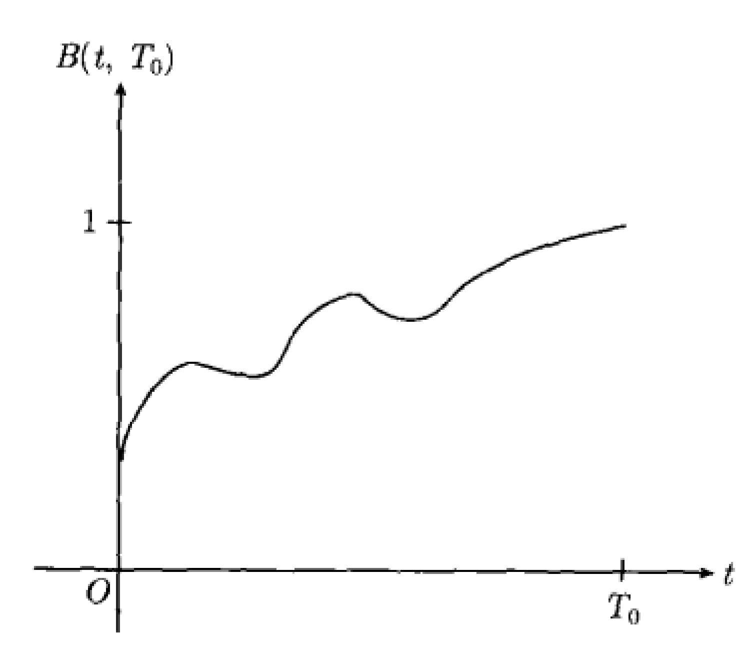


图 7.2 对于有固定到期日 T_0 的零息票债券价格的演化, 观察到 $B(t,T_0)\big|_{t=T_0}=1$,
即 $t=T_0$ 得到单位面值

由可交易的零息票价格 $B(t,T)$ 可以定义收益率曲线 $R(t,T)$,

$$R(t,T)=-\frac{1}{T-t}\ln B(t,T). \tag{7.1.1}$$

这恰好就是债券从时刻 t 到到期日 T 的时间段 $T-t$ 的**内部收益率** (internal rate of return). **收益率曲线** (yield curve) 就是函数 $R(t,T)$ 相对于 $T-t$ 的图像, 收益率

曲线对于时间段 $T-t$ 的依赖关系称为它的**期限结构** (term structure). 期限结构显示了市场对于债券收益率与不同期限的看法. 通常, 收益率随着债券的期限延长而增大, 因为期限越长, 不确定的因素就越多. 然而, 如果短期利率已经在一个很高的水平, 那么长期债券的收益率有可能会比其短期债券的收益率要低.

7.1.2 远期利率合约、债券远期和标准互换

市场上大部分基本的金融利率工具是远期利率合约, 它表示在某个未来日期用固定利率收益与浮动利率收益互换的合约. 债券远期是一个标的资产是债券的远期合约. 典型利率互换可以看成一列远期利率合约的组合, 它包含了一列事先规定时刻的固定利率收益和浮动利率收益的交换. 下面将先讨论这些金融工具的期限结构, 然后推导这些可交易债券的无套利价格.

1. 远期利率合约

一份远期利率合约 (FRA) 是指在未来交割日 S, 两个交易对手交换固定利率和浮动利率收益的协议. 浮动利率是 LIBOR (伦敦银行间的同业拆借利率), 用 $L[R,S]$ 表示, 它将在未来的合约重置日 R 时刻, 可以在市场中观察到的作为区间 $[R,S]$ 的利率, 区间长度通常为 $3\sim 6$ 个月. 信誉度比较高的金融机构可以在伦敦同业拆借市场以 LIBOR 这样的利率借到一系列不同到期日的美元. LIBOR 通常是以年利率的形式报价, 尽管它的区间通常小于一年. FRA 中有三个重要的时间参数, 当前时刻 t, 重置日期 R 以及到期日 S. 令 $\mathcal{N}$ 表示合约的面值, α_R^S 表示时间区间 $[R,S]$ 的换算因子. 由于以天为计价日的习惯 (见习题 7.1), α_R^S 可能稍微不同于实际时间区间 $S-R$ 的长度. 设 K 为固定利率, 则浮动利率收益为 $\mathcal{N}\alpha_R^S L[R,S]$, 同时固定利率的收益为 $\mathcal{N}\alpha_R^S K$. 图 7.3 显示了一个 FRA 随时间变动时的现金流的变化规律.

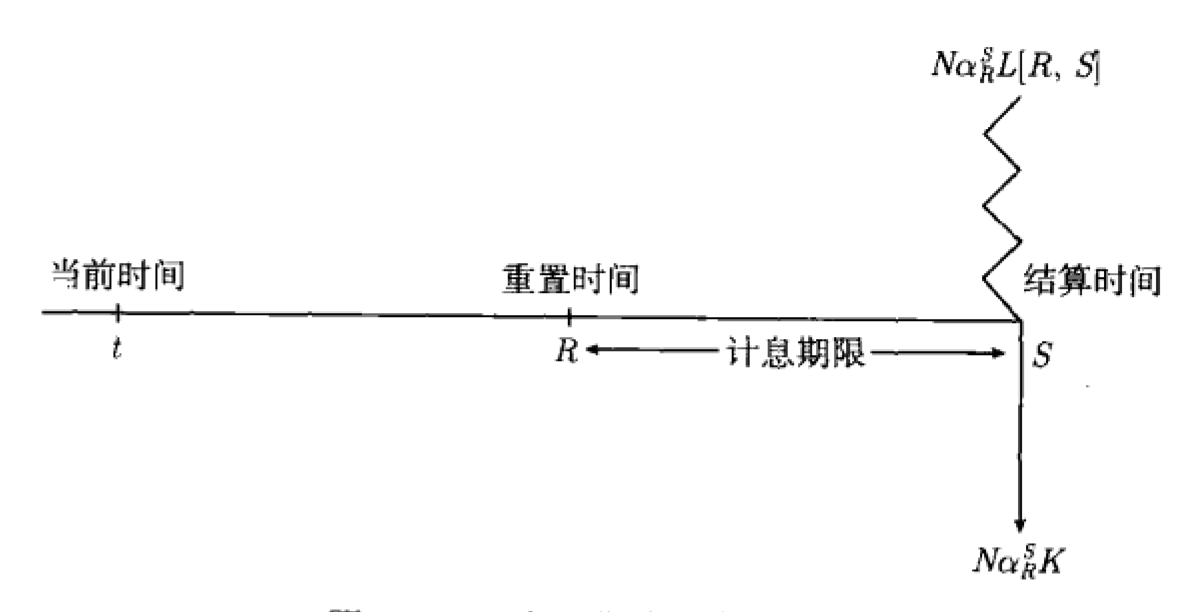


图 7.3 一个远期合约的现金流

对于获得固定利率一方, 为了定出时间 t 时刻 $(t<R)$FRA 的价格, 复制了固定利率获得者在时间 S 的现金流:

(1) 持有多头头寸 $\mathcal{N}(1+\alpha_R^S K)$ 份的到期日为 S 的零息票;

(2) 持有空头头寸 $\mathcal{N}$ 份到期日为 R 的零息票.

下面研究这种复制是如何工作的. 浮动利率在时间 S 付出, 可以看成是 R 时刻 $\mathcal{N}$ 美元供给的. $\mathcal{N}$ 美元从 R 时刻到 S 时刻现金变为 $N(1+\alpha_R^S L[R,S])$ 美元. 在时间 S 时, 这些债券头寸的净现金流为 $\mathcal{N}\alpha_R^S(K-L[R,S])$ 美元, 它精确地复制了固定利率获得者的现金流. 复制的投资组合在 t 时刻的价值为

$$\mathcal{N}[(1+\alpha_R^S K)B(t,S)-B(t,R)],$$

由此就可以给出 t 时刻固定利率获得者 FRA 的价格.

若令上式为零, 则可解出固定利率 K. 此时的固定利率 K 的称为**远期 LIBOR** (forward LIBOR), 用 $L_t[R,S]$ 表示, 它可看成是 t 时刻观察到的 LIBOR 在未来时间区间 $[R,S]$ 的远期价格. 远期 LIBOR 可用零息票表示为

$$L_t[R,S]=\frac{1}{\alpha_R^S}\left[\frac{B(t,R)}{B(t,S)}-1\right]. \tag{7.1.2}$$

2. 债券远期

考虑 T_F 时刻的一份远期合约, 它的标的资产是到期日为 T_B 的债券, 其中 $T_B>T_F$. 假设债券在 T_F 时刻后 $T_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所得到的票息分别为 C_i, 并且在 T_B 时刻支付面值 P. 令 F 表示 t 时刻债券远期的价格, 那么债券远期在 t 时刻的价格是由未来现金流在当前时刻的贴现和的形式给出的, 从而可以得到

$$V=\sum_{i=1}^{n}C_iB(t,T_i)+PB(t,T_B)-FB(t,T_F).$$

为了定出 t 时刻的远期价格, 令 $V=0$, 于是有

$$F=\sum_{i=1}^{n}C_i\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_F)}+P\frac{B(t,T_B)}{B(t,T_F)}. \tag{7.1.3}$$

3. 典型利率互换

在 1.4.1 小节看到, 一个典型利率互换 FRAs 的固定利率获得方, 可以复制为持有多头头寸的固定利率债券和持有空头头寸的浮动利率债券. 相应地, 一个利率互换可以看成是一系列的 FRAs. 令 $T_1,\cdots,T_n$ 为事先指定的支付日, T_n 为互换的最后到期日. 浮动利率收益与固定利率收益在支付日进行交换, 令 α_i 表示区间 $[T_{i-1},T_i](i=1,2,\cdots,n)$ 的时间单位换算因子. 在 T_i 时刻, 固定利率获得方得到固定利率收益为 $\mathcal{N}\alpha_iK$, 其中 $\mathcal{N}$ 为互换面值, K 为固定利率. 浮动利率方得到浮动利率收益为 $\mathcal{N}\alpha_iL[T_{i-1},T_i]$, 其中 $L[T_{i-1},T_i]$ 为在 T_{i-1} 时刻重置的区间 (T_{i-1},T_i) 的

LIBOR 值. 固定利率获得方在 T_i 时刻获得的净现金流为 $N\alpha_i(K - L[T_{i-1}, T_i])$. 对于 $t < T_0$, T_i 时刻的现金流在 t 时刻的价格可由以下形式给出:

$$\mathcal{N}[(1 + \alpha_i K)B(t, T_i) - B(t, T_{i-1})].$$

将所有这些 $T_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时刻的贴现现金流相加, 即得固定利率获得方 (或者叫做浮动利率的支付方). 在 t 时刻利率互换的价格为

$$\begin{aligned} V(t; N, K) &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}[B(t, T_i) - B(t, T_{i-1}) + \alpha_i K B(t, T_i)] \\ &= \left[\mathcal{N}B(t, T_n) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}\alpha_i K B(t, T_i)\right] - \mathcal{N}B(t, T_0). \end{aligned}$$

在上述方程中, 所有正项的和表示到期日为 T_n 固定利率的债券多头的价格, 它在 $T_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时刻获得面值为 $\mathcal{N}$ 的债券的利息为 $\mathcal{N}\alpha_i K$, 因为面值为 $\mathcal{N}$ 浮动利率债券在 $T_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时刻支付了浮动利率的利息, 并且在 T_n 时刻获得面值 $\mathcal{N}$. 它在 T_0 时刻的价格是 $\mathcal{N}$, 这是因为在 T_0 时刻的同样现金 $\mathcal{N}$, 放置于获得浮动 LIBOR 利率的存款账户中, 会产生和浮动利率债券相同的现金流 (图 7.4). 因此, 在时刻 t, 浮动利率债券的价格是 $\mathcal{N}B(t, T_0)$.

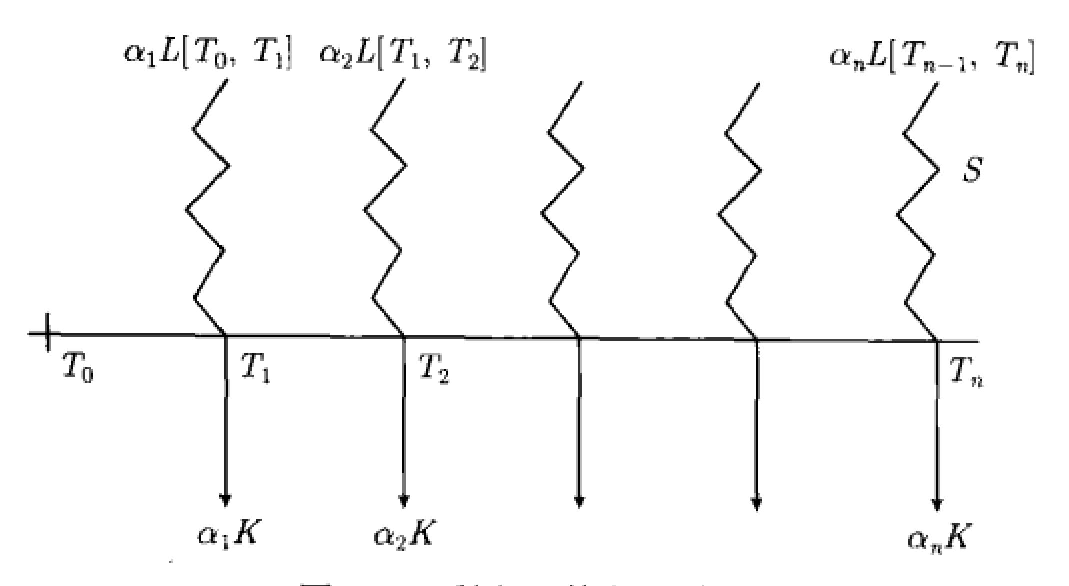


图 7.4 利率互换的现金流

利率互换, 使得 $V(t; \mathcal{N}, K)$ 的值对于交易双方都为零, 由此可得出 t 时刻**远期互换率** (forward swap rate) $K_t[T_0, T_n]$ 的定义. 远期互换率可表示为可交易零息票的价格形式

$$K_t[T_0, T_n] = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(t, T_i)}. \tag{7.1.4}$$

7.1.3 远期利率和短期利率

在区间 $[R, S]$ 内的 t 时刻远期 LIBOR $L_t[R, S]$ 假定实行离散复利. 然而, 在

连续复利模型下, 定义 t 时刻**连续远期利率** (continuous forward rate) $f(t,T_1,T_2)$ 更方便, 其中 $t<T_1<T_2$. 为了将 $f(t,T_1,T_2)$ 与可交易的零息票的价格 $B(t,T_1)$ 和 $B(t,T_2)$ 联系起来, 考虑 t 时刻一个债券远期合约的价格, 此时, 买家同意在 T_1 时刻购买一张单位面值到期日为 T_2 的零息票债券. 将方程 (7.1.3) 中的息票取为 $C_i=0(i=1,2,\cdots,n)$, 面值设为单位值, 即 $P=1$, 则到期日为 T_2 的一张单位面值关于到期日为 T_1 的零息票债券的远期价格可以表示为 $B(t,T_2)/B(t,T_1)$. 当某人在 T_1 时刻支付远期价格 $B(t,T_2)/B(t,T_1)$ 时, 他将会在 T_2 时刻得到一美元. 由定义, t 时刻连续远期利率的价格 $f(t,T_1,T_2)$ 与这个债券远期的价格有以下关系式:

$$\frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}\,e^{f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)}=1.$$

这就是说, 数量为 $B(t,T_2)/B(t,T_1)$ 在区间 $[T_1,T_2]$ 以远期利率 $f(t,T_1,T_2)$ 实行连续复利, 增长至一美元, 即在有限区间 $[T_1,T_2]$ 上, 实行连续复利利率 $f(t,T_1,T_2)$, 增长因子为 $e^{f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)}$. 于是有

$$f(t,T_1,T_2)=-\frac{1}{T_2-T_1}\ln\frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}. \tag{7.1.5}$$

在金融市场中, 远期利率通常应用于有限的时间区间. 然而, 为方便起见, 在债券定价的数学公式和利率模型中, 通常用一个很小的时间区间**即时远期利率** (instantaneous forward rate) 进行处理. 令 $T_1=T$, $T_2=T+\Delta T$, 在未来无穷小的时间区间 $[T,T+\Delta T]$ 上, t 时刻的远期即时利率由以下形式给出:

$$\begin{aligned}F(t,T)&=-\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\ln B(t,T+\Delta T)-\ln B(t,T)}{\Delta T}\\&=-\frac{1}{B(t,T)}\frac{\partial B}{\partial T}(t,T),\quad t<T,\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

其中 $F(t,T)$ 可以理解为一个到期日为 T 的债券投资在一个无限小的时间增值区间的边际收益率. 相反地, 由方程 (7.1.6), 债券价格 $B(t,T)$ 可以表示成如下即时远期利率的形式:

$$B(t,T)=\exp\left(-\int_t^T F(t,u)\,du\right). \tag{7.1.7}$$

进一步, 合并方程 (7.1.1) 和 (7.1.7), $F(t,T)$ 可以表示为

$$R(t,T)=\frac{1}{T-t}\int_t^T F(t,u)\,du \tag{7.1.8a}$$

或者如下等价形式:

$$F(t,T)=\frac{\partial}{\partial T}[R(t,T)(T-t)]=R(t,T)+(T-t)\frac{\partial R}{\partial T}(t,T). \tag{7.1.8b}$$

在方程 (7.1.8a) 中, $F(t,u)$ 给出了未来无限小的时间区间 $(u, u+du)$ 上在当前 t 时刻的内部收益率, 并且它在时间段 (t,T) 上的平均值给出了到期日的收益率. 上述方程表明, 债券价格和债券收益率可以由远期即时利率和期限结构获得. 另一方面, 即时远期利率如定义那样给出了即时的意义. **短期利率** (short rate) $r(t)$ (也叫做**即时点利率** (instantaneous spot rate)), 简记为

$$r(t) = \lim_{T \to t} R(t,T) = R(t,t) = F(t,t). \tag{7.1.9}$$

$B(t,T)$ 关于 T 的图像不可避免地成为向下倾斜的曲线, 因为期限越长的债券在利率为正的情况下通常都有越低的价格 (图 7.1). 然而, 收益率曲线 ($R(t,T)$ 关于 T 的图像) 表示各种不同到期日的债券回报率的平均值, 所以它可以是一个递增或者递减的曲线. 因此, 收益率曲线给出了比债券价格曲线更多的信息. 由方程 (7.1.8b) 推断出, 如果收益率曲线是递增的, 则远期利率曲线 ($F(t,T)$ 关于 T 的图像) 将在收益率曲线之上; 反之, 则在收益率曲线之下.

1. 银行账户过程

一个银行账户财富积累是一个自融资的、在 $[t, t+\Delta t]$ 区间上以 $r(t)$ 为回报率的滚动交易策略获得的. 假设银行账户在 0 时刻有一美元, 则银行账户过程 $M(t)$ 可描述为

$$\frac{dM(t)}{dt} = r(t)M(t), \quad M(0) = 1,$$

这个方程的解为

$$M(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)\,du\right). \tag{7.1.10}$$

2. 期限结构理论

目前有多个期限结构理论去解释收益率曲线的图形, 其中之一称为**期望理论** (expectation theory), 它源于远期利率反映的是未来短期利率的期望. 令 $E_t[r(u)]$ 表示在 $\mathcal{F}_t$ 的条件下 $r(u)(u > t)$ 的期望. 在期望理论中, 到期日的收益率可以被表示成 (比较方程 (7.1.8a))

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T E_t[r(u)]\,du. \tag{7.1.11}$$

第二种理论为**市场分割理论** (market segmentation theory), 它源于每一个借款人或者贷款人都有到期日偏好. 于是收益率曲线的斜率将依赖于长短期市场资金的供求关系. 第三种理论为**流动性偏好理论** (liquidity preference theory). 它认为贷款人相对长期贷款而言, 更偏好于短期贷款, 因为一般情况下都会偏好于资本的流动性.

因此, 长期债券通常应比短期债券有更好的收益. 市场分割理论中期限结构表示方程和流动性偏好理论非常相似, 定义为

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[\int_t^T E_t[r(u)]\,du + \int_t^T L(u,T)\,du\right], \tag{7.1.12}$$

其中 $L(u,T)$ 被理解成到期日为 T 的债券在 u 时刻的瞬时期限的保证金 (Langetieg, 1980). 保证金表示对期望理论的偏离, 它是市场分割理论中的特例或者对应流动性偏好理论中的单调递增情况.

7.1.4 确定性利率下的债券价格

在考虑随机利率下的债券定价之前, 需要推导债券与时间有关的确定性利率下的定价方程. 此时, 短期利率 $r(t)$ 为时间的确定性函数. 在通常情况下, 债券价格是时间和利率的函数, 而当利率不是一个独立的状态变量, 本身是已知的时间函数时, 债券价格就仅仅是时间的函数. 令 $B(t)$ 和 $k(t)$ 分别表示债券价格和确定的息票利率. 债券在到期日 T 的终值条件为 $B(T)=P$, 其中 P 为债券的面值.

下面推导 $B(t)(t<T)$ 满足的一阶线性常微分方程. 以当前时刻 t 为起始时间, 在一个无限小的时间增量 dt 中, 债券价格的改变为 $\frac{dB}{dt}dt$, 并且获得的息票收益为 $k(t)\,dt$. 由无套利原理, 上面两项的和必须等于无风险回报 $r(t)B(t)\,dt$. 这给出了

$$\frac{dB}{dt} + k(t) = r(t)B, \quad t<T. \tag{7.1.13}$$

为了求解偏微分方程, 两边分别乘以积分因子 $e^{\int_t^T r(s)\,ds}$ 得

$$\frac{d}{dt}\left[B(t)e^{\int_t^T r(s)\,ds}\right] = -k(t)e^{\int_t^T r(s)\,ds}.$$

由终值条件 $B(T)=P$, 债券价格函数解得

$$B(t) = e^{-\int_t^T r(s)\,ds}\left[P + \int_t^T k(u)e^{\int_u^T r(s)\,ds}du\right]. \tag{7.1.14}$$

债券方程 (7.1.14) 的金融意义非常清楚: 在区间 $[u,u+du]$ 获得的息票收益 $k(u)du$, 它们在到期日 T 的价值将增至 $k(u)e^{\int_u^T r(s)\,ds}\,du$, 因此, 在未来 T 时刻的价值、债券期限内获得的息票总收益为 $\int_t^T k(u)e^{\int_u^T r(s)\,ds}\,du$. 票面价值和息票流在当前时刻的价值可由 T 获得的总和的贴现给出, 而贴现因子为 $e^{-\int_t^T r(s)\,ds}$. 这恰好就是债券在当前 t 时刻的价格, 它与定价方程 (7.1.14) 给出的公式是一致的. 依赖于 $r(t)B(t)$ 和 $k(t)$ 的数量关系, 债券价格函数可以是时间的增函数或者减函数 (见方程 (7.1.13)).

7.2 单因子短期利率模型

由期权定价鞅理论的基本结果, 风险中性测度 Q 的存在性蕴含着 T 时刻收益为 $H(T)$ 的未定权益在 t 时刻的无套利价格由以下形式给出 (见方程 (3.2.16)):

$$V(t) = E_Q^t \left[e^{-\int_t^T r(u)\, du} H(T) \right], \tag{7.2.1}$$

其中 E_Q^t 为关于滤波 $\mathcal{F}_t$ 在测度 Q 下的条件数学期望. 由于零息票最终收益为 $H(T) = 1$, 所以有

$$B(t, T) = E_Q^t \left[e^{-\int_t^T r(u)\, du} \right]. \tag{7.2.2}$$

一旦短期利率 $r(t)$ 被确定, 就可以计算出债券的价格. 这就是为什么大多数早期的利率模型都以短期利率变化的特征为基础建立的原因.

7.2.1 短期利率模型和债券价格

假设短期利率 r_t 服从如下微分方程所描述的 Itô 过程:

$$dr_t = \mu(r_t, t)\, dt + \rho(r_t, t)\, dZ_t, \tag{7.2.3}$$

其中 dZ_t 为标准布朗运动的微分, $\mu(r_t, t)$ 和 $\rho(r_t, t)^2$ 分别为即时漂移项和波动项. 下面利用无套利原理推导出债券所满足的微分方程. 由于短期利率 r_t 并不是可交易的资产, 所以微分方程应该与关于 r_t 的市场风险价格有关. 不同到期日的债券价格需要满足一定的相容性关系才能保证不存在套利机会. 在现实测度下, 以期望的形式表示债券的价格, 并且将推导出从现实测度到无风险中性测度变换的 Radon-Nikodym 导数.

在本小节中, 假设债券价格只依赖于 r_t , 没有违约风险、流动性风险和其他因素. 如果令债券价格为 $B(r, t)$ (将 T 固定), 认为 r_t, Z_t 分别是时间 t 的函数或随机过程), 则利用 Itô 引理, 给出债券价格满足的偏微分方程如下:

$$dB = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \mu \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) dt + \rho \frac{\partial B}{\partial r} dZ. \tag{7.2.4}$$

$B(r, t)$ 的运动方程 (7.2.4) 可以表示成如下对数的形式:

$$\frac{dB}{B} = \mu_B(r, t)\, dt + \sigma_B(r, t)\, dZ.$$

此时, 债券价格的漂移率 $\mu_B(r, t)$ 和波动率 $\sigma_B(r, t)$ 分别为

$$\mu_B(r, t) = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \mu \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right), \tag{7.2.5a}$$

$$\sigma_B(r,t) = \frac{\rho}{B}\frac{\partial B}{\partial r}. \tag{7.2.5b}$$

因为短期利率不是可交易的资产, 所以它不能像期权中的标的资产那样用于债券的对冲, 但是可以用不同到期日的债券对冲来代替. 这是因为不同到期日的债券都是与即时回报率相关的, 即它们的债券价格方程中存在着相同的短期随机利率 r_t. 下面将构造投资组合: 买进到期日为 T_1 的面值为一美元的债券 V_1, 同时卖出到期日为 T_2 的面值为一美元的债券 V_2. 构造投资组合 Π 为以下形式:

$$\Pi = V_1 - V_2.$$

由方程 (7.2.4) 定义的债券的价格过程, 投资组合在 dt 中的价值变化为

$$d\Pi = [V_1\mu_B(r,t;T_1) - V_2\mu_B(r,t;T_2)]\,dt + [V_1\sigma_B(r,t;T_1) - V_2\sigma_B(r,t;T_2)]\,dZ.$$

假设 V_1 和 V_2 取成如下形式:

$$V_1 = \frac{\sigma_B(r,t;T_2)}{\sigma_B(r,t;T_2)-\sigma_B(r,t;T_1)}\Pi, \quad V_2 = \frac{\sigma_B(r,t;T_1)}{\sigma_B(r,t;T_2)-\sigma_B(r,t;T_1)}\Pi,$$

那么 $d\Pi$ 中的随机项变为零, 此时, 方程变为

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{\mu_B(r,t;T_1)\sigma_B(r,t;T_2) - \mu_B(r,t;T_2)\sigma_B(r,t;T_1)}{\sigma_B(r,t;T_2)-\sigma_B(r,t;T_1)}dt. \tag{7.2.6a}$$

因为投资组合 Π 是即时无风险的, 所以为了避免套利机会, 它必须满足无风险短期利率, 即

$$d\Pi = r\Pi\,dt. \tag{7.2.6b}$$

综合方程 (7.2.6a), (7.2.6b) 有

$$\frac{\mu_B(r,t;T_1)-r}{\sigma_B(r,t;T_1)} = \frac{\mu_B(r,t;T_2)-r}{\sigma_B(r,t;T_2)}.$$

上述关系对任意的到期日 T_1 和 T_2 都成立, 所以比值 $\dfrac{\mu_B(r,t)-r}{\sigma_B(r,t)}$ 应该与到期日 T 无关. 将它定义为 $\lambda(r,t)$, 即

$$\frac{\mu_B(r,t)-r}{\sigma_B(r,t)} = \lambda(r,t). \tag{7.2.7}$$

$\lambda(r,t)$ 就称为短期利率的**市场风险价格** (market price of risk) (见习题 7.4), 因为它给出了债券在单位风险时预期即时回报率的额外增长. 若市场遵从无套利原理, 则互相对冲的债券应该有一个相同的, 且与到期日无关的市场风险价格. 将 $\mu_B(r,t)$ 和 $\sigma_B(r,t)$ 的表达式 (7.2.5) 代入方程 (7.2.7), 即得如下零息票价格满足的偏微分方程

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (\mu - \lambda\rho)\frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0, \quad t < T, \tag{7.2.8}$$

其终值条件为 $B(T,T)=1$. 一旦短期利率 r 的扩散过程和市场风险价格 $\lambda(r,t)$ 确定, 债券价格就可以由 (7.2.8) 解出. 因为短期利率不是可交易的资产, 所以不能像在股票期权那样, 从 $B(r,t)$ 价格方程中消除风险偏好.

1. 市场风险价格

在债券定价方程中, 飘移率 $\mu(r,t)$ 和波动率 $\rho(r,t)$ 可以由观察得到的短期利率数据统计获得. 一旦 $\mu(r,t)$ 和 $\rho(r,t)$ 已知, 市场风险价格 $\lambda(r,t)$ 便可以利用以下关系估计 (见习题 7.6):

$$\left.\frac{\partial R}{\partial T}\right|_{T=t}=\frac{1}{2}\mu(r,t)-\rho(r,t)\lambda(r,t), \tag{7.2.9}$$

其中 $\left.\frac{\partial R}{\partial T}\right|_{T=t}$ 为收益率曲线 $R(t,T)$ 在到期日的瞬时斜率.

2. 现实测度下期望形式的债券价格

债券价格形式上可以表示为现实测度 P 下积分的期望,

$$\begin{aligned}B(r,t;T)=&E_P^t\left[\exp\left(-\int_t^T\left[r(u)-\frac{\lambda^2(r(u),u)}{2}\right]du\right.\right.\\&\left.\left.+\int_t^T\lambda(r(u),u)\,dZ(u)\right)\right],\quad t\leqslant T,\end{aligned}\tag{7.2.10}$$

其中 E_P^t 表示关于滤波 $\mathcal{F}_t$ 在现实测度 P 下的条件期望. 为表示方便起见, 定义如下辅助函数:

$$V(r,t;\xi)=\exp\left(-\int_t^\xi\left[r(u)-\frac{\lambda^2(r(u),u)}{2}\right]du+\int_t^\xi\lambda(r(u),u)dZ(u)\right),\quad t\leqslant\xi.$$

将 Itô 微分应用于计算 $B(r,\xi;T)V(r,t;\xi)$ 的微分可得

$$\frac{dV}{V}=\left(-r-\frac{\lambda^2}{2}\right)d\xi+\lambda dZ+\frac{\lambda^2}{2}d\xi=-rd\xi+\lambda dZ,$$

$$dBdV=-\lambda V\rho\frac{\partial B}{\partial r}d\xi.$$

再由方程 (7.2.8) 有

$$\begin{aligned}d(BV)=&\ V\,dB+B\,dV+dB\,dV\\=&\ V\frac{\partial B}{\partial\xi}+u\frac{\partial B}{\partial r}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2B}{\partial r^2}d\xi+V\rho\frac{\partial B}{\partial r}dZ\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ BV - rd\xi + \lambda dZ - \lambda V\rho\frac{\partial B}{\partial r}d\xi \\
=& V\frac{\partial B}{\partial \xi} + (u - \lambda\rho)\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - rBd\xi \\
&+ BV\lambda\, dZ + V\rho\frac{\partial B}{\partial r}dZ \\
=& BV\lambda\, dZ + V\rho\frac{\partial B}{\partial r}dZ.
\end{aligned}
$$

接下来, 对上述方程从 t 到 T 积分, 并且在条件 P 下求期望. 因为随机积分的期望值为零, 所以有

$$E_P^t[B(r,T;T)V(r,t;T) - B(r,t;T)V(r,t;t)] = 0.$$

利用终值条件 $B(r,T;T) = 1$ 和 $V(r,t;t) = 1$, 最终得到

$$B(r,t;T) = E_P^t[V(r,t;T)],$$

这与方程 (7.2.10) 的结果是一致的.

下面应用测度变换, 由现实测度 P 变到风险中性测度 Q, 使得债券价格在 Q 下为鞅, 并且满足方程 (7.2.2). 假设 $\lambda(r,t)$ 满足 Novikov 条件

$$E_Q\left[\exp\left(\int_0^T \frac{\lambda^2(r(u),u)}{2}\, du\right)\right] < \infty,$$

定义

$$\widetilde{Z}(t) = Z(t) + \int_0^t \lambda(r(u),u)du,$$

那么存在一个等价鞅测度 Q, 使得 $\widetilde{Z}(t)$ 是 Q 布朗运动. 因为相应的 Radon-Nikodym 导数可以写成

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T \lambda(r(u),u)dZ(u) - \int_0^T \frac{\lambda^2(r(u),u)}{2}du\right),$$

所以由表达式 (7.2.10) 和上述测度变换有

$$B(r,t;T) = E_Q^t\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)\, du\right)\right], \tag{7.2.11}$$

因此, Q 是个鞅 (见方程 (7.2.2)). 债券价格由风险中性测度 Q 下的随机贴现因子的期望给出. 由下面的关系:

$$d\widetilde{Z}_t = dZ_t + \lambda(r_t,t)\, dt$$

以及方程 (7.2.3), 短期利率 r_t 在 Q 下的运动方程可表示为

$$dr_t = [\mu(r_t,t) - \lambda(r_t,t)\rho(r_t,t)]\,dt + \rho(r_t,t)d\widetilde{Z}_t. \tag{7.2.12}$$

假设债券价格方程 $B(r,t;T)$ 满足方程 (7.2.8), 并且 r_t 由方程 (7.2.12) 给出, 则由 Feynman-Kac 表示定理, $B(r,t;T)$ 服从方程 (7.2.11) 给出的期望表达式. 在测度 Q 下,$B(r,t)$ 的随机微分方程变成 (见习题 7.7)

$$\frac{dB}{B} = r_t\,dt + \sigma_B(t,T)\,d\widetilde{Z}_t, \tag{7.2.13a}$$

其中

$$\sigma_B(t,T) = -\frac{\rho}{B}\frac{\partial B}{\partial r}. \tag{7.2.13b}$$

3. 仿射期限结构模型

如果债券价格满足下面的形式:

$$B(t,T) = e^{a(t,T)-b(t,T)r}, \tag{7.2.14}$$

则相应的短期利率模型称为仿射期限结构模型. 假设在风险中性测度 Q 下, 短期利率 r_t 由以下形式的方程给出:

$$dr_t = \mu(r_t,t)\,dt + \rho(r_t,t)\,dZ_t, \tag{7.2.15}$$

那么 $B(t,T)$ 满足方程

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \mu\frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0, \quad t < T \tag{7.2.16}$$

以及终值条件 $B(T,T) = 1$. 将假设的债券价格仿射期限结构解 (7.2.14) 代入方程 (7.2.16) 有

$$\frac{\partial a}{\partial t}(t,T) - \left[1 + \frac{\partial b}{\partial t}(t,T)\right] r - \mu(r,t)b(t,T) + \frac{\rho^2(r,t)}{2}b^2(t,T) = 0 \tag{7.2.17}$$

以及终值条件 $a(T,T) = 0$, $b(T,T) = 0$. 对任意给定的 $\mu(r,t)$ 和 $\rho(r,t)$, 关于 $a(t,T)$ 和 $b(t,T)$ 的方程 (7.2.17) 一般无法求解. 然而, 当 $\mu(r,t)$ 和 $\rho(r,t)$ 关于 r 都是仿射结构的, 即

$$\mu(r,t) = \mu_0(t) + \mu_1(t)r \quad 和 \quad \rho^2(r,t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)r \tag{7.2.18}$$

时, 方程 (7.2.17) 就变成

$$\begin{aligned}&\frac{\partial a}{\partial t}(t,T) - \mu_0(t)b(t,T) + \frac{\alpha_0^2(t)}{2}b^2(t,T)\\&- \left[\frac{\partial b}{\partial t}(t,T) + \mu_1(t)b(t,T) - \frac{\alpha_1(t)}{2}b^2(t,T) + 1\right] r = 0.\end{aligned}$$

因为上述方程对任意 r 都成立, 由此推导出 $a(t,T)$ 和 $b(t,T)$ 应满足下面两个联立方程:

$$\frac{\partial b}{\partial t}(t,T)+\mu_1(t)b(t,T)-\frac{\alpha_1(t)}{2}b^2(t,T)+1=0, \quad b(T,T)=0, \tag{7.2.19a}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}(t,T)-\mu_0(t)b(t,T)+\frac{\alpha_0^2(t)}{2}b^2(t,T)=0, \quad a(T,T)=0. \tag{7.2.19b}$$

上面关于 $b(t,T)$ 的非线性微分方程称为 **Ricatti 方程** (Ricatti equation). 对于一些特殊形式的 $\mu_1(t)$ 和 $\alpha_1(t)$, 可以推导出 $b(t,T)$ 的解析形式的解. 而一旦 $b(t,T)$ 的解析解确定了, 就可以直接对方程 (7.2.19b) 积分, 从而得到 $a(t,T)$. 在接下来的两小节中, 考虑两个著名的短期利率模型, 此时, 相应的债券价格服从仿射期限结构解.

7.2.2　Vasicek 均值回归模型

Vasicek (1977) 提出了具有 Ornstein-Uhlenbeck 形式的短期利率 r_t 满足的随机过程, 即在现实测度下有

$$dr_t=\alpha(\gamma-r_t)\,dt+\rho\,dZ_t, \quad \alpha>0. \tag{7.2.20}$$

上述过程有时也称为弹性随机游走或者**均值回归过程** (mean reversion process). 即时漂移项 $\alpha(\gamma-r_t)$ 表示此过程总是趋于长期均值 γ 的, 并且回归速度依赖于相对于均值偏离的大小. 均值回归假设是符合经济现象的, 因为随着时间的流逝, 利率会被拉回到某个长期均值利率值. 为了进一步解释均值回归现象, 讨论当利率增长时, 经济发展会放慢速度, 并且对于贷款的需求也会减少, 因此, 必然会导致利率有下降的趋势. 对随机微分方程 (7.2.20) 进行积分可以得到

$$r(T)=\gamma+[r(t)-\gamma]e^{-\alpha(T-t)}+\rho\int_t^T e^{-\alpha(T-t)}\,dZ(t). \tag{7.2.21}$$

因为随机积分中包含布朗运动, 所以 Vasicek 模型下的短期利率可能为负值. 假设当前时刻 t 的短期利率 $r(t)$ 已知, 则短期利率在 T 时刻的均值可表示为

$$E[r(T)|r(t)]=\gamma+[r(t)-\gamma]e^{-\alpha(T-t)}. \tag{7.2.22}$$

均值回归过程 $r(t)$ 的方差为

$$\frac{d}{dt}\operatorname{var}(r(t))=-2\alpha\operatorname{var}(r(t))+\rho^2.$$

考虑到 $t=T$ 时 r 的方差为零, (见式 (7.2.21)), 于是得到

$$\operatorname{var}(r(T)|r(t))=\frac{\rho^2}{2\alpha}\left[1-e^{-2\alpha(T-t)}\right], \quad t<T. \tag{7.2.23}$$

解析形式的债券价格公式

假设市场风险价格 λ 为常数, 并且独立于 r 和 t; 那么在 Vasicek 模型下可以推导出债券价格的解析公式. 在 Vasicek 均值回归模型 (7.2.18) 中, 取 $\mu_0 = \alpha\gamma - \lambda\rho$, $\mu_1 = -\alpha$, $\alpha_0 = \rho$ 以及 $\alpha_1 = 0$, 于是得到以下关于 $a(t,T)$ 和 $b(t,T)$ 的两个微分方程:

$$\frac{da}{dt} + (\lambda\rho - \alpha\gamma)b + \frac{\rho^2}{2}b^2 = 0, \quad t < T,$$

$$\frac{db}{dt} - \alpha b + 1 = 0, \quad t < T$$

和相应的终值条件 $a(T,T) = 0$ 和 $b(T,T) = 0$. 求解这两个微分方程即得

$$B(r,t;T) = \exp\left(\frac{1}{\alpha}[1 - e^{-\alpha(T-t)}](R_\infty - r) - R_\infty(T-t) - \frac{\rho^2}{4\alpha^3}[1 - e^{-\alpha(T-t)}]^2\right), \quad t < T, \tag{7.2.24}$$

其中 $R_\infty = \gamma - \dfrac{\rho\lambda}{\alpha} - \dfrac{\rho^2}{2\alpha}$ (R_∞ 实际上等于 $\lim\limits_{T\to\infty} R(t,T)$, 见下面的式 (7.2.26)), 利用方程 (7.2.5a), (7.2.5b), 到期日为 T 的债券的即时回报率的均值和标准差分别为

$$\mu_B(r,t;T) = r(t) + \frac{\rho\lambda}{\alpha}[1 - e^{-\alpha(T-t)}], \tag{7.2.25a}$$

$$\sigma_B(r,t;T) = \frac{\rho}{\alpha}[1 - e^{-\alpha(T-t)}]. \tag{7.2.25b}$$

到期收益率可以表示为

$$R(t,T) = R_\infty + \frac{[r(t) - R_\infty][1 - e^{-\alpha(T-t)}]}{\alpha(T-t)} + \frac{\rho^2}{4\alpha^3(T-t)}[1 - e^{-\alpha(T-t)}]^2. \tag{7.2.26}$$

令 $T \to \infty$, 方程 (7.2.26) 中的最后两项将为零, 于是长期限的内部收益率可以看成是常数. 注意到 $R(t,T)$ 和 $\ln B(r,t;T)$ 是 $r(t)$ 的线性函数, 由于 $r(t)$ 服从正态分布的, 从而 $R(t,T)$ 也是正态分布的, 而 $B(r,t;T)$ 是对数正态分布的. 如果在方程 (7.2.26) 中, 令 $T = T_1$ 和 $T = T_2$, 并且消去 $r(t)$, 则得到 $R(t,T_1)$ 和 $R(t,T_2)$ 之间的关系, 它只依赖于参数的值.

读者可以在习题 7.12 中继续研究 Vasicek 模型收益率曲线期限结构的更多性质, 离散形式的 Vasicek 模型也将在习题 7.13 中给出.

7.2.3 Cox-Ingersoll-Ross 平方根扩散模型

回忆 7.2.2 小节中研究的 Vasicek 模型, 由于其本身具有高斯分布的性质, 因此, 短期利率可能为负. 为了修正这个缺陷, Cox 等 (1985) 提出了以下平方根短期利率模型:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)\,dt + \rho\sqrt{r_t}\,dZ_t, \quad \alpha, \gamma > 0. \tag{7.2.27}$$

只要初始利率非负, 那么 r_t 就不会取负值. 这是由于均值回归模型的漂移项总是趋于将 r_t 拉回到它的长期均值 γ, 并且当 r_t 趋于零时, 波动率变得很小 (回忆在 Vasicek 模型中, 波动率为常数). 可以证明只有当 $\rho^2 > 2\alpha\gamma$ 时, r_t 才有可能取零值. 而当上面的漂移项足够大满足 $2\alpha\gamma \geqslant \rho^2$ 时, 不可能有 $r_t = 0$ 成立 (严格证明参见文献 (Cairns, 2004)). 下面将给出一个启发式论证. 定义 $L_t = \ln r_t$, 那么利用 Itô 引理, L_t 的微分为

$$dL = \left[\left(\alpha\gamma - \frac{\rho^2}{2}\right)e^{-L} - \alpha\right]dt + \rho e^{-L/2}\,dZ. \tag{7.2.28}$$

对于正的 L, 漂移项和波动项系数没有问题. 但是当 L 取非常大的负值时, 它们将可能会被放大而爆破. 如果满足 $2\alpha\gamma < \rho^2$, 则对于 L 取大的负值, 漂移项将会变成负值, 使得 L 很快趋于 $-\infty$. 这表明条件 $2\alpha\gamma \geqslant \rho^2$ 是短期利率过程保持绝对正值的必要条件.

短期利率在 T 时刻, 以当前时刻 t 取值为条件的概率密度具有以下形式:

$$g(r(T); r(t)) = ce^{-u-v}\left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2(uv)^{1/2}), \tag{7.2.29}$$

其中

$$c = \frac{2\alpha}{\rho^2[1 - e^{-\alpha(T-t)}]}, \quad u = cr(t)e^{-\alpha(T-t)}, \quad v = cr(T), \quad q = \frac{2\alpha\gamma}{\rho^2} - 1,$$

而 I_q 是第一类 q 阶 Bessel 函数 (详细内容参见文献 (Feller, 1951)). $r(T)$ 在 $r(t)$ 条件下的均值和方差分别为 (见习题 7.11)

$$E[r(T)|r(t)] = r(t)e^{-\alpha(T-t)} + \gamma[1 - e^{-\alpha(T-t)}], \tag{7.2.30a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(r(T)|r(t)) = {} & r(t)\left(\frac{\rho^2}{\alpha}\right)[e^{-\alpha(T-t)} - e^{-2\alpha(T-t)}] \\ & + \frac{\gamma\rho^2}{2\alpha}[1 - e^{-\alpha(T-t)}]^2.\end{aligned} \tag{7.2.30b}$$

短期利率 $r(T)$ 的分布具备以下性质:

(i) 当 $\alpha \to \infty$ 时, 均值趋于 γ, 并且方差趋于零;

(ii) 当 $\alpha \to 0^+$ 时, 均值趋于 $r(t)$, 并且方差趋于 $\rho^2(T-t)r(t)$.

Cox-Ingersoll-Ross 模型是一种仿射期限结构模型, 于是零息票债券的价格为方程 (7.2.14) 的形式. 相对应的关于 $a(t,T)$ 和 $b(t,T)$ 微分方程表达式为

$$\frac{da}{dt} - \alpha\gamma b = 0, \quad t < T, \tag{7.2.31a}$$

$$\frac{db}{dt} - (\alpha + \lambda\rho)b - \frac{\rho^2}{2}b^2 + 1 = 0, \quad t < T, \tag{7.2.31b}$$

其中市场风险价格为 $\lambda\sqrt{r}$, 并且假设 λ 为常数. 终值条件为

$$a(T,T) = 0 \quad 和 \quad b(T,T) = 0.$$

上述方程的解为 (Cox et al., 1985)

$$a(t,T) = \frac{2\alpha\gamma}{\rho^2}\ln\left(\frac{2\theta e^{(\theta+\psi)(T-t)/2}}{(\theta+\psi)[e^{\theta(T-t)}-1]+2\theta}\right), \tag{7.2.32a}$$

$$b(t,T) = \frac{2\left[e^{\theta(T-t)}-1\right]}{(\theta+\psi)\left[e^{\theta(T-t)}-1\right]+2\theta}, \tag{7.2.32b}$$

其中

$$\psi = \alpha + \lambda\rho, \quad \theta = \sqrt{\psi^2 + 2\rho^2}.$$

在上述方程的解中, 注意到市场风险价格 λ 只出现于 ψ 中. Cox-Ingersoll-Ross 模型下的债券价格和到期收益率的性质将在习题 7.15~ 习题 7.17 中给出.

7.2.4 推广的单因子短期利率模型

除了 Vasicek 和 Cox-Ingersoll-Ross 模型, 还有一些其他的单因子短期利率模型也在文献中被提出. 许多模型都可以归于以下随机过程:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \rho r_t^{\gamma}\, dZ_t, \tag{7.2.33}$$

其中参数 α, β, γ 和 ρ 为常数. 例如, $\gamma = 0$ 和 $\gamma = 1/2$ 分别对应于 Vasicek 和 Cox-Ingersoll-Ross 模型, $\alpha = 0$ 和 $\gamma = 1$ 对应于几何布朗运动模型. 曾被 Merton 使用的随机利率模型 (1973, 第一章) 可以被归纳为 $\beta = 0$ 和 $\gamma = 0$ 的 Vasicek 模型. 其他一些单因子利率模型可以归结为如下形如方程 (7.2.33) 的随机过程:

Dothan 模型 (1978): $dr = \rho r\, dZ$;

Brennan-Schwartz 模型 (1980): $dr = (\alpha + \beta r)dt + \rho r\, dZ$;

Cox-Ingersoll-Ross variable rate 模型 (1980): $dr = \rho r^{3/2}\, dZ$;

Constant elasticity of variance 模型: $dr = \beta r\, dt + \rho r^{\gamma}\, dZ$.

注意到当 $\gamma > 0$ 时, 波动率随着利率水平的变大而增长. 这个特性称为**利率水平效应** (level effect).

Chan 等 (1992) 对上述这些单因子短期利率模型作了实证分析. 他们发现, 大多数成功描述短期利率运动规律的模型都是那些波动率的变化对于利率水平有高度敏感性的模型. 这个发现验证了金融上的直觉, 即波动率的期限结构是决定未定权益的非常重要的因素. 利用一个月国债收益率的数据, 他们发现, 那些满足 $\gamma \geqslant 1$

的模型描述短期利率的运动规律要好于满足 $\gamma < 1$ 的模型. 在短期利率运动模型中, 短期利率波动率和 r 的利率水平之间的关系远远比均值回归性质重要得多. 均值回归性质的介入经常会引起复杂的期限结构分析. 他们认为, 由于均值回归占有次要的位置, 所以在一个模型中额外的加入均值回归特性可能无法验证. Vasicek 和 Merton 模型中允许利率取负值总是遭到批评. 然而, 更为严重的缺陷是在模型中假设 $\gamma = 0$. 这个假设蕴含了利率变化的波动率是独立于利率水平的常数. 从他们的实证研究得出的另一个惊人的结论是看涨期权的价格因不同的模型而不同, 并且由这些模型导出的期限结构只提供了有限的结构, 它不能正确地给出许多可交易债券的价格. 利用这些模型的理论收益曲线为利率衍生产品定价, 而不是由现实市场中观察到的, 都是源于它内部的缺陷. 而一旦短期利率过程被完全确定, 任何关于初始利率期限结构和它如何在未来发展也就随之完全确定. 所有这些表明, 短期利率单因子扩散模型的框架并不能真正精确地描述实际的利率期限结构.

在下一小节中, 考虑如何扩展短期利率模型, 使得模型中包含时间函数参数. 这些参数函数可以由当前债券价格的期限结构确定.

7.2.5　债券价格当前期限结构的校正

一个利率模型应该把债券价格当前的期限结构作为一个输入而不是输出. 如果由模型解出的债券理论价格不符合市场上观测到的债券价格, 那么就会存在套利机会. 为了解决上述缺点, 考虑一类符合当前期限结构的模型, 它允许通过对时间函数参数的校正, 使得债券的理论价格与市场观测到的债券价格的期限结构或者远期利率一致. 将短期利率 r_t 作为状态变量的两个流行的模型是 Ho-Lee 模型和 Hull-White 模型. 为了修正短期利率可能取负值的情况, Black-Derman-Toy 模型和 Black-Karasinski 模型使用 $\ln r_t$ 代替 r_t 作为状态变量.

1) Ho-Lee (HL) 模型

这是文献中第一个提出符合当前期限结构的模型 (Ho and Lee, 1986), 它最初是以二叉树的形式出现的. 连续时间形式的模型为

$$dr_t = \phi(t)\,dt + \sigma\,dZ_t, \tag{7.2.34}$$

其中 r_t 为短期利率, σ 为短期利率的连续瞬时方差. 可通过选取适当的依赖于时间的漂移项函数 $\phi(t)$ 来保证模型符合初始时刻的期限结构 (见习题 7.19).

2) Hull-White (HW) 模型

Ho-Lee 模型中波动率为常数, 并且没有均值回归性质, 为此, Hull 和 White (1990) 提出以下短期利率模型:

$$dr_t = [\phi(t) - \alpha(t)r_t]\,dt + \sigma(t)r_t^{\beta}\,dZ_t. \tag{7.2.35}$$

均值回归水平是由 $\dfrac{\phi(t)}{\alpha(t)}$ 给出. 当 $\beta = 0$ 时, 模型 (7.2.35) 可以被理解为扩展的 Vasicek 模型; 当 $\beta = 1/2$ 时, 它又可以看成是扩展的 Cox-Ingersoll-Ross 模型.

1. 债券价格期限结构的拟合

考虑 Hull-White 模型的一个特殊形式, 即仅仅漂移项中的 $\phi(t)$ 是依赖于时间的函数. 在风险中性测度 Q 下, 短期利率服从过程

$$dr_t = [\phi(t) - \alpha r_t]\, dt + \sigma\, dZ_t, \tag{7.2.36}$$

其中 α 和 σ 都是常数. 这个模型具有均值回归性以及非常好的可解性. 下面将利用当前时刻债券的期限结构信息推导 $\phi(t)$ 具体解析表达式.

债券价格 $B(r,t;T)$ 的方程为

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + [\phi(t) - \alpha r]\frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0. \tag{7.2.37}$$

由于满足仿射结构的债券价格必须满足形如 (7.2.14) 的方程, 所以求解关于 $a(t,T)$ 和 $b(t,T)$ 两个常微分方程有

$$b(t,T) = \frac{1}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha(T-t)}\right], \tag{7.2.38a}$$

$$a(t,T) = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T b^2(u,T)\, du - \int_t^T \phi(u) b(u,T)\, du. \tag{7.2.38b}$$

下面推导由当前时刻的债券价格 $B(r,t;T)$ 的期限结构来确定 $\phi(T)$. 由方程 (7.2.38b) 并且应用关系式

$$\ln B(r,t;T) + rb(t,T) = a(t,T)$$

有

$$\int_t^T \phi(u) b(u,T)\, du = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T b^2(u,T)\, du - \ln B(r,t;T) - rb(t,T). \tag{7.2.39}$$

为了求解 $\phi(u)$, 首先是得到一个对于 $\int_t^T \phi(u)\, du$ 的解析表达式. 对 $\int_t^T \phi(u) b(u,T) du$ 关于 T 进行微分, 然后减去形如 $\int_t^T \phi(u) e^{-\alpha(T-t)} du$ 的项. 方程 (7.2.39) 左边关于 T 的微分为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T}\int_t^T \phi(u) b(u,T)\, du &= \phi(u) b(u,T)\Big|_{u=T} + \int_t^T \phi(u)\frac{\partial}{\partial T} b(u,T)\, du \\ &= \int_t^T \phi(u) e^{-\alpha(T-u)}\, du,\end{aligned} \tag{7.2.40}$$

接下来, 对式 (7.2.39) 两边同时微分得

$$\int_t^T \phi(u)e^{-\alpha(T-u)}\,du = \frac{\sigma^2}{\alpha}\int_t^T [1-e^{-\alpha(T-u)}]e^{-\alpha(T-u)}\,du \\ -\frac{\partial}{\partial T}\ln B(r,t;T) - re^{-\alpha(T-t)}. \tag{7.2.41}$$

在方程 (7.2.39) 两边乘以 α, 并且与方程 (7.2.41) 相加得到

$$\int_t^T \phi(u)\,du = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\int_t^T [1-e^{-2\alpha(T-u)}]\,du - r \\ -\frac{\partial}{\partial T}\ln B(r,t;T) - \alpha\ln B(r,t;T).$$

最后对上述方程再次关于 T 两边微分, 得到利用债券价格 $B(r,t;T)$ 的当前期限结构形式表示 $\phi(T)$ 如下:

$$\phi(T) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}[1-e^{-2\alpha(T-t)}] - \frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln B(r,t;T) - \alpha\frac{\partial}{\partial T}\ln B(r,t;T). \tag{7.2.42a}$$

相应地, 也可以将 $\phi(T)$ 表示成当前远期利率 $F(t,T)$ 的期限结构形式. 注意: $-\frac{\partial}{\partial T}\ln B(r,t;T) = F(t,T)$, 因而可以将 $\phi(T)$ 重新写成以下形式:

$$\phi(T) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}[1-e^{-2\alpha(T-t)}] + \frac{\partial}{\partial T}F(t,T) + \alpha F(t,T). \tag{7.2.42b}$$

同理, 也可以将漂移项 $\phi(T)$ 用当前收益率曲线 $R(t,T)$ 的形式写出解析表示式 (见习题 7.22).

利用方程 (7.2.13b), 债券价格的波动率 $\sigma_B(t,T)$ 如下 (注意: 必须加绝对值):

$$\sigma_B(t,T) = \left|\frac{\sigma}{B}\frac{\partial B}{\partial r}\right| = |-\sigma b(t,T)| = \frac{\sigma}{\alpha}[1-e^{-\alpha(T-t)}].$$

代入方程 (7.2.13a) 即得在风险中性测度 Q 下, 债券价格满足方程

$$\frac{dB}{B} = r\,dt + \frac{\sigma}{\alpha}[1-e^{-\alpha(T-t)}]\,dZ. \tag{7.2.43}$$

因为债券的波动率独立于 r, 于是债券价格在任何给定时刻, 关于它在更早时刻价格的条件分布是一个正态分布. 为了与债券或者其远期利率初始期限结构匹配而进行校正, 令漂移项是依赖于时间的函数. 类似的方法可用于如下一般形式的 Vasicek 均值回归模型 (Hull and White, 1990) 下的与当前时刻债券价格或远期利率相匹配的校正:

$$dr_t = [\theta(t) + \alpha(t)(d-r_t)]\,dt + \sigma_r(t)\,dZ_t. \tag{7.2.44}$$

关于校正更详细的讨论见习题 7.23.

2. Black-Derman-Toy 模型和 Black-Karasinski 模型

类似于 Ho-Lee 模型, Black-Derman-Toy (BDT) 模型最初是用二叉树的形式表示的 (Black et al., 1990). 等价的连续时间模型可以写成

$$d\ln r_t = \left[\theta(t) - \frac{\sigma_r'(t)}{\sigma_r(t)}\ln r_t\right] dt + \sigma_r(t)\, dZ_t. \tag{7.2.45}$$

在这个模型中, 短期利率是以对数正态分布的形式出现的, 所以短期利率总是非负的. 第一个函数参数 $\theta(t)$ 要选择使得模型符合当前短期利率的期限结构. 然而, 第二个函数参数 $\sigma_r(t)$ 要选择符合当前短期利率波动率的期限结构. 当波动率函数 $\sigma_r(t)$ 为常数时, BDT 模型就退化为 HL 模型的对数形式.

假设在 BDT 模型中, 回归率和波动率是可分离的, 那么有

$$d\ln r_t = [\theta(t) - \alpha(t)\ln r_t]\, dt + \sigma_r(t)\, dZ_t. \tag{7.2.46}$$

这个修改的形式称为 Black-Karasinski(BK) 模型 (Black and Karasinski, 1991).

7.3 多因子利率模型

在 7.2 节关于单因子利率模型的讨论中, 短期利率被假设服从一个确定参数的单因子连续时间模型. 大多数这样类型的模型都具备良好的可解性, 即可以从中解出相应的债券价格的闭合解. 但是在单因子模型假设下, 可能得到的利率期限结构的形式非常有限. 另外, 用单因子模型描述市场真正利率的随机运动过于简化. 为了克服这些缺陷, 考虑构造多因子利率模型, 它可以包含其他的一些因子. 多因子模型给出的利率期限结构是由更高自由度的模型描述的, 但是多因子模型的可解性通常也会变差. 在大多数情况中, 需要求助于数值方法来求解债券价格. 同时, 模型参数的校正也变得难度很大. 这些方面的缺点受到一些实际从业者的批评.

下面讨论几类比较流行的多因子模型. 第一类模型是利用短期利率和长期利率作为基本状态变量. 第二类模型状态变量为短期利率以及短期利率波动率. 多因子仿射期限模型的一般形式将在 7.3.3 小节中讨论.

7.3.1 短期利率/长期利率模型

市场实际从业者一般将利率分为短期利率和长期利率两类. 短期利率包括国债利率、银行间存款利率和证券票据的利率. 通常这些利率的期限小于一年. 长期利率是指由长期债券的价格确定的利率, 某些这样的债券期限可能会长达 30 年. 这两种利率当然不会以任何一种方式相互锁定.

Brennan 和 Schwartz (1979) 选择两个标的随机因子, 使得它们分别决定了短期利率 r_t 和长期利率 ℓ_t 的期限结构 (为简单起见, 在接下来的表达式中, 将往往省

略 r_t, ℓ_t 和布朗过程中的时间下标 t). 它们的模型假设 r 和 ℓ 服从以下形式的随机过程:

$$dr = \beta_r(r,\ell,t)\,dt + \eta_r(r,\ell,t)\,dZ_r, \tag{7.3.1a}$$

$$d\ell = \beta_\ell(r,\ell,t)\,dt + \eta_\ell(r,\ell,t)\,dZ_\ell, \tag{7.3.1b}$$

其中 dZ_r 和 dZ_ℓ 为标准布朗过程的微分. 令 ρ 表示 dZ_r 和 dZ_ℓ 的相关系数, 即 $\rho\,dt = dZ_r\,dZ_\ell$, 利率的期望和方差的变化假设为 r 和 ℓ 的函数. 令 $B(r,\ell,t;T)$ 是到期日为 T 的单位零息票债券的价格. 由 Itô 引理, 零息票债券价格满足的随机过程为

$$\frac{dB}{B} = \mu(r,\ell,t)\,dt + \sigma_r(r,\ell,t)\,dZ_r + \sigma_\ell(r,\ell,t)\,dZ_\ell, \tag{7.3.2}$$

其中

$$\mu(r,\ell,t) = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \beta_r\frac{\partial B}{\partial r} + \beta_\ell\frac{\partial B}{\partial \ell} + \frac{\eta_r^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \rho\eta_r\eta_\ell\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial \ell} + \frac{\eta_\ell^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial \ell^2}\right),$$

$$\sigma_r(r,\ell,t) = \frac{\eta_r}{B}\frac{\partial B}{\partial r}, \quad \sigma_\ell(r,\ell,t) = \frac{\eta_\ell}{B}\frac{\partial B}{\partial \ell}. \tag{7.3.3}$$

由于模型中有两个随机因子, 所以需要三个不同到期日的债券组成无风险对冲组合. 假设构造的债券投资组合的份额分别为 V_1, V_2, V_3, 到期日分别为 T_1, T_2, T_3. 令 Π 为投资组合的价值, 下面利用像推导 Black-Scholes 方程的类似方法使得投资组合“瞬时冻结”. 由方程 (7.3.2), 投资组合在 dt 时间内的回报率为

$$\begin{aligned} d\Pi = &[V_1\mu(T_1) + V_2\mu(T_2) + V_3\mu(T_3)]dt \\ &+ [V_1\sigma_r(T_1) + V_2\sigma_r(T_2) + V_3\sigma_r(T_3)]dZ_r \\ &+ [V_1\sigma_\ell(T_1) + V_2\sigma_\ell(T_2) + V_3\sigma_\ell(T_3)]dZ_\ell, \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

其中 $\mu(T_i) = \mu(r,\ell,t;T_i)$ 表示到期日为 $T_i(i=1,2,3)$ 债券的漂移率, $\sigma_r(T_i)$ 和 $\sigma_\ell(T_i)$ 也有相似的解释. 假设选取 V_1, V_2, V_3, 使得方程 (7.3.4) 中随机项的系数为零, 这样使得投资组合瞬时无风险. 这就导出关于 V_1, V_2 和 V_3 的两个方程, 即

$$\begin{aligned} V_1\sigma_r(T_1) + V_2\sigma_r(T_2) + V_3\sigma_r(T_3) = 0, \\ V_1\sigma_\ell(T_1) + V_2\sigma_\ell(T_2) + V_3\sigma_\ell(T_3) = 0. \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

因为投资组合 Π 是瞬时无风险的, 所以它的利率必然是无风险短期利率以避免套利, 即得

$$d\Pi = [V_1\mu(T_1) + V_2\mu(T_2) + V_3\mu(T_3)]dt = r(V_1 + V_2 + V_3)\,dt,$$

所以

$$V_1[\mu(T_1) - r] + V_2[\mu(T_2) - r] + V_3[\mu(T_3) - r] = 0. \tag{7.3.6}$$

综合以上结论便得关于 V_1, V_2, V_3 一个齐次线性方程组, 即

$$\begin{pmatrix} \sigma_r(T_1) & \sigma_r(T_2) & \sigma_r(T_3) \\ \sigma_\ell(T_1) & \sigma_\ell(T_2) & \sigma_\ell(T_3) \\ \mu(T_1)-r & \mu(T_2)-r & \mu(T_3)-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3.7}$$

由于上述线性方程组存在非零解, 因此, 系数矩阵的最后一行应是前两行的线性组合. 由于到期日 T_1, T_2 和 T_3 是任意的, 于是漂移率和波动函数满足以下关系:

$$\mu(r,\ell,t) - r = \lambda_r(r,\ell,t)\sigma_r(r,\ell,t) + \lambda_\ell(r,\ell,t)\sigma_\ell(r,\ell,t). \tag{7.3.8}$$

在一般情况下, 系数 λ_r 和 λ_ℓ 依赖于 r,ℓ 和时间 t. 其中 λ_r 和 λ_ℓ 可看成是短期利率和长期利率各自市场风险价格. 将方程 (7.3.3) 中 $\mu(r,\ell,t), \sigma_r(r,\ell,t)$ 和 $\sigma_\ell(r,\ell,t)$ 的表达式代入方程 (7.3.8) 即得到以下债券价格满足的定价方程:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\eta_r^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \rho\eta_r\eta_\ell\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial \ell} + \frac{\eta_\ell^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial \ell 2} \\ &+ (\beta_r - \lambda_r\eta_r)\frac{\partial B}{\partial r} + (\beta_\ell - \lambda_\ell\eta_\ell)\frac{\partial B}{\partial \ell} - rB = 0. \end{aligned} \tag{7.3.9}$$

注意定价方程 (7.3.9) 中出现市场风险价格.

永续债券和利率风险的市场价格

长期利率经常和一种无风险债券 —— 永续债券直接联系起来. **永续债券** (consol bond) 是一份永久债券 (无限到期日), 它保证连续支付常数息票率 c. 令 $G(\ell)$ 表示永续债券的价格, 则

$$G(\ell) = \frac{c}{\ell}. \tag{7.3.10}$$

因为长期利率是可交易资产的函数, 所以长期利率风险的市场价格 λ_ℓ 可以表示成 r,ℓ 的函数, 而随机过程 ℓ 又由其他一些参数决定. 首先, 应用 Itô 引理, 对 G 进行微分得到

$$dG = \frac{\partial G}{\partial \ell}\,d\ell + \frac{\eta_\ell^2}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial \ell^2}\,dt = c\left(-\frac{\beta_\ell}{\ell^2} + \frac{\eta_\ell^2}{\ell^3}\right)dt - c\frac{\eta_\ell}{\ell^2}\,dZ_\ell,$$

从而

$$\frac{dG}{G} = \left(\frac{\eta_\ell^2}{\ell^2} - \frac{\beta_\ell}{\ell}\right)dt - \frac{\eta_\ell}{\ell}\,dZ_\ell. \tag{7.3.11}$$

永续债券的瞬时回报率 μ_c 是息票率 ℓ 和 G 的漂移率之和, 即

$$\mu_c = \frac{\eta_\ell^2}{\ell^2} - \frac{\beta_\ell}{\ell} + \ell, \tag{7.3.12}$$

从而得到 (Brennan and Schwartz, 1979)

$$\lambda_\ell(r,\ell,t) = \frac{\mu_c - r}{\sigma_\ell(r,\ell,t)} = \frac{\beta_\ell - \ell^2 + r\ell}{\eta_\ell} - \frac{\eta_\ell}{\ell}, \tag{7.3.13}$$

其中

$$\sigma_\ell = \frac{\eta_\ell}{G}\frac{\partial G}{\partial \ell} = -\eta_\ell/\ell. \tag{7.3.14}$$

在模型求解中需要面对的困难是什么呢？首先，对于两个利率的随机过程，参数的确定是非常复杂的．其次，计算的可靠性也是非常难于保证的．最后，在两个因子的利率模型的有限差分数值解法中，还需要知道债券定价方程所有的边值条件：当其中任何一个利率趋于无穷时，债券价格趋于零，这是可以预知的．然而，零利率下边值条件的确定是非常难于解决的．

一个和长短期利率模型类似的形式是由 Schaefer 和 Schwartz (1984) 提出的．他们选择长期利率和价差 (定义为长期利率减去短期利率) 为基本状态变量．利用长期利率和价差基本不相关的特性以及系数冻结技术，他们得到了债券价格的一个近似解析解．更多的有关 Schaefer-Schwartz 模型的细节将在习题 7.27 中给出．

7.3.2　随机波动率模型

在文献中，还有一些其他形式的多因子利率模型，如文献 (Fong and Vasicek, 1991)．为了更好地刻划利率的期限结构，将短期利率的波动率也假设为随机的状态变量．其实，将利率的波动率作为第二个状态变量是自然的，因为波动率总是债券和期权价格的决定因素．他们提出了短期利率 r 的微分方程以及短期利率的瞬时方差 v 服从以下均值回归过程：

$$dr = \alpha(\overline{r} - r)\,dt + \sqrt{v}\,dZ_r, \tag{7.3.15a}$$

$$dv = \gamma(\overline{v} - v)\,dt + \xi\sqrt{v}\,dZ_v, \tag{7.3.15b}$$

其中 $\overline{r}$ 和 $\overline{v}$ 分别为 r 和 v 的长期均值参数．α, γ 和 ξ 设为常数．进一步，设 r 和 v 的市场风险价格与 $\sqrt{v}$ 成比例．令 ρ 表示 dZ_r 和 dZ_v 的相关系数常数，利用与无套利定价过程相似的讨论，零息票定价方程可以表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial \tau} &= \frac{v}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \rho\xi v\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial v} + \frac{\xi^2 v}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial v^2}\\ &\quad + (\alpha\overline{r} - \alpha r + \lambda v)\frac{\partial B}{\partial r} + [\gamma\overline{v} - (\gamma + \xi\eta)v]\frac{\partial B}{\partial v} - rB,\end{aligned} \tag{7.3.16}$$

其中 $\lambda\sqrt{r}$ 和 $\eta\sqrt{v}$ 分别表示 r 和 v 的市场风险价格，λ 和 η 设为常数．在 Fong-Vasicek 模型下可以推导出债券价格的解析公式，尽管最终形式涉及连带超几何函数以及复杂的计算过程 (Selby and Strickland, 1995)．Balduzzi 等 (1996) 通过增加

一个额外的状态变量扩展了 Fong-Vasicek 模型, 即短期利率的随机均值水平 $\bar{r}$. 他们假设 $r, \bar{r}$ 和 v 的随机过程如下:

$$\begin{aligned} dr &= \alpha(\bar{r} - r)dt + \sqrt{v}dZ_r, \\ d\bar{r} &= \beta(\theta - \bar{r})dt + \eta\, dZ_{\bar{r}}, \\ dv &= \gamma(\bar{v} - v)\, dt + \xi\sqrt{v}\, dZ_v, \end{aligned} \tag{7.3.17}$$

其中 $dZ_r\, dZ_v = \rho\, dt$, 其他相关系数被假设为零. 这个三因子模型将 Fong-Vasicek 模型作为特例 (假设均值为常数). 可以证明零息票债券的价格 $B(t,T)$ 存在指数仿射结构解, 即

$$B(t,T) = a(\tau)\exp(-b(\tau)r - c(\tau)\bar{r} - d(\tau)v), \quad \tau = T - t. \tag{7.3.18}$$

关于 $a(\tau), b(\tau), c(\tau)$ 和 $d(\tau)$ 的解析解的推导细节将在习题 7.30 给出.

7.3.3 仿射期限结构模型

由于具有良好的可解性, 所以仿射期限结构模型是一种非常流行的模型. 事实上, 所有在 7.2 节中提到的单因子短期利率模型都是仿射结构模型, 而之前就已经证明了单因子模型中, 只有当短期利率随机方程模型中的漂移项和波动项都是 r 的仿射函数 (见方程 (7.2.18)) 时才允许仿射结构解. 在本小节中, 将上面的结果类似地推广到多因子利率模型. 特别地, 将讨论具有仿射结构解的特征. 最后将证明随机波动率模型也属于仿射结构模型.

考虑一个依赖于 n 个随机状态变量 $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ 的多因子利率模型 (也可以写成向量的形式 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \cdots, X_n(t))^{\mathrm{T}}$), 如果零息票债券价格关于 $\mathbf{X}(t)$ 具有以下指数仿射形式:

$$B(t,T) = \exp(a(t,T) + \mathbf{b}(t,T)^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(t)), \tag{7.3.19}$$

则称这个模型为仿射结构形式的, 其中 $\mathbf{b}(t,T) = (b_1(t,T), \cdots, b_n(t,T))^{\mathrm{T}}$. 如果状态变量 $\mathbf{X}(t)$ 关于时间变量是齐次的, 并且 $a(t,T)$ 和 $\mathbf{b}(t,T)$ 只是 $T-t$ 的函数, 则称这个模型关于时间变量是齐次的. 此时, 期限为 τ 的债券的收益率 $R(t,t+\tau)$ 的表达式为

$$R(t,t+\tau) = -\frac{a(\tau)}{\tau} - \frac{\mathbf{b}(\tau)^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(t)}{\tau}. \tag{7.3.20}$$

令 $\tau \to 0^+$, 则有

$$\lim_{\tau\to 0^+}\frac{a(\tau)}{\tau} = \frac{da}{d\tau}(0), \quad \lim_{\tau\to 0^+}\frac{\mathbf{b}(\tau)}{\tau} = \frac{d\mathbf{b}}{d\tau}(0),$$

短期利率为

$$r(t)=-\frac{da}{d\tau}(0)-\frac{d\mathbf{b}^{\mathrm{T}}}{d\tau}(0)\mathbf{X}(t). \tag{7.3.21}$$

显然, 为了让债券价格 $B(t,t+\tau)$ 满足以下形式:

$$B(t,t+\tau)=\exp(a(\tau)+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{X}(t)), \tag{7.3.22}$$

$\mathbf{X}(t)$ 必须满足一定的条件. 为此, Duffie 和 Kan (1996) 证明了在风险中性测度 Q 下, $\mathbf{X}(t)$ 满足的随机微分方程为以下形式:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}(t) &= [\gamma+\delta\mathbf{X}(t)]dt \\ &\quad +\Sigma\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1+\beta_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(t)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\alpha_n+\beta_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(t)} \end{pmatrix} d\mathbf{Z}(t), \end{aligned} \tag{7.3.23}$$

其中 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$ 为常数标量, γ 和 $\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 为 n 维常数向量, δ 和 Σ 为 $n\times n$ 阶常数矩阵, $\mathbf{Z}(t)$ 为一个 n 维向量值布朗运动. 类似于一维的单因子 CIR 过程, 参数 α_i 和 β_i 必须满足一定的条件, 才能使得波动率 $\alpha_i+\beta_i^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 保持正值. 除非系数向量 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 恒为零, 否则, 波动率是随机的. 在这种特殊情况下, 模型就退化为高斯模型.

1. 多因子高斯模型的解析解

设短息利率 $r(t)$ 为如下形式:

$$r(t)=f(t)+\mathbf{g}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(t), \tag{7.3.24}$$

并假设在风险中性测度 Q 下, $\mathbf{X}(t)$ 服从高斯过程

$$d\mathbf{X}(t)=[\gamma+\delta\mathbf{X}(t)]dt+\Sigma\, d\mathbf{Z}(t), \tag{7.3.25}$$

其中所有的参数都是常数. 在这些假设下, 可以推导出债券价格的解析表达式. 首先, 考虑以下常微分方程组:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\delta\mathbf{y}, \tag{7.3.26}$$

初始条件为 $\mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$. 众所周知, 常微分方程组 (7.3.26) 的解为

$$\mathbf{y}(t)=\Phi(t)\mathbf{y}_0, \tag{7.3.27}$$

其中 $\Phi(t)$ 称为常微分方程组的基本矩阵, 它满足常微分方程组

$$\frac{d\Phi}{dt}=\delta\Phi(t) \tag{7.3.28}$$

以及初始条件 $\Phi(0) = I$, 其中 I 为单位矩阵. 随机微分方程组 (7.3.25) 的解可以写成

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\left[\mathbf{X}(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(u)\gamma du + \int_0^t \Phi^{-1}(u)\Sigma\, d\mathbf{Z}(u)\right]. \tag{7.3.29}$$

定义辅助函数

$$d(t,T) = -\int_t^T r(u)\,du = -\int_t^T \left[f(u) + \mathbf{g}(u)^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(u)\right]\,du. \tag{7.3.30}$$

因为 $\mathbf{X}(t)$ 中的短期利率是仿射结构的, 所以 $r(t)$ 和 $d(t,T)$ 仍然是高斯型的. 由于

$$B(t,T) = E_Q^t[\exp(d(t,T))]$$

以及 $d(t,T)$ 是高斯型的, 于是立得

$$B(t,T) = \exp\left(E_t[d(t,T)] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t(d(t,T))\right). \tag{7.3.31}$$

由此可以直接得到

$$\begin{aligned} &E_t[d(t,T)] \\ &= -\int_t^T \left[f(u) + \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(u)\Phi(u-t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(u)\int_t^u \Phi(u-s)\gamma\, ds\right] du, \quad (7.3.32\mathrm{a}) \\ &\mathrm{var}_t(d(t,T)) \\ &= \int_t^T \int_t^T \int_t^{\min(u,u^*)} \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(u)\Phi(u-s)\Sigma\Phi^{\mathrm{T}}(u^*-s)\mathbf{g}(u^*)\; ds du du^*. \quad (7.3.32\mathrm{b}) \end{aligned}$$

2. 仿射模型的等价类

尽管仿射结构模型中随机状态变量的个数不太多, 因为刻画 $X(t)$ 的方程中有很多函数参数, 所以由方程 (7.3.23) 确定的仿射扩散模型的可能形式很多. Dai 和 Singleton (2000) 断言: 如果对所有未定权益都得到相同的价格, 则这两个模型可以看成是等价的. 在他们的文章中, 给出了每种仿射模型等价类的规范表达式.

对于单因子仿射模型, 只有两种等价类, 即 Vasicek 模型和 CIR 模型. 当存在两个随机状态变量时, 等价类就变成了三个. 除了两因子的 Vasicek 模型和两因子的 CIR 模型, 还有第三类, 就是随机波动率模型. 这些等价类的规范形式如下:

(1) 两因子的 Vasicek 模型:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= -\delta_{11}X_1(t)dt + dZ_1(t), \\ dX_2(t) &= -[\delta_{21}X_1(t) + \delta_{22}X_2(t)]dt + dZ_2(t); \end{aligned} \tag{7.3.33}$$

(2) 两因子的 CIR 模型 (Longstaff-Schwartz 模型是一个典型的例子):

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \{\delta_{11}[\alpha_1 - X_1(t)]dt + \delta_{12}[\alpha_2 - X_2(t)]\}dt + \sqrt{X_1(t)}dZ_1(t), \\ dX_2(t) &= \{\delta_{21}[\alpha_1 - X_1(t)] + \delta_{22}[\alpha_2 - X_2(t)]\}dt + \sqrt{X_2(t)}dZ_2(t); \end{aligned} \tag{7.3.34}$$

(3) 两个因子的随机波动率模型 (Fong-Vasciek 模型是典型的例子):

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \delta_{11}[\alpha_1 - X_1(t)]dt + \sqrt{X_1(t)}dZ_1(t), \\ dX_2(t) &= \{\delta_{21}[\alpha_1 - X_1(t)] - \delta_{22}X_2(t)\}dt + [1 + \beta_{21}\sqrt{X_1(t)}]dZ_2(t). \end{aligned} \tag{7.3.35}$$

对于三个因子的模型, 等价类就增加到 4 个. 除了三因子 Vasick 模型和三因子的 CIR 模型以外, 其他两个等价类都是随机波动率模型. 它们的规范形式如下给出:

(4) 第一类三因子随机波动模型 (Balduzzi 等的模型是典型的例子):

$$\begin{aligned} dX_1(t) =& \delta_{11}[\alpha_1 - X_1(t)]dt + \sqrt{X_1(t)}dZ_1(t), \\ dX_2(t) =& \{\delta_{21}[\alpha_1 - X_1(t)] - \delta_{22}X_2(t) - \delta_{23}X_3(t)\}dt \\ &+ [1 + \beta_{21}\sqrt{X_1(t)}]dZ_2(t), \\ dX_3(t) =& \{\delta_{31}[\alpha_1 - X_1(t)] - \delta_{32}X_2(t) - \delta_{33}X_3(t)\}dt \\ &+ [1 + \beta_{31}\sqrt{X_1(t)}]dZ_3(t); \end{aligned} \tag{7.3.36}$$

(5) 第二种三因子的随机波动模型:

$$\begin{aligned} dX_1(t) =& \{\delta_{11}[\alpha_1 - X_1(t)] + \delta_{12}[\alpha_2 - X_2(t)]\}dt + \sqrt{X_1(t)}dZ_1(t), \\ dX_2(t) =& \{\delta_{21}[\alpha_1 - X_1(t)] + \delta_{22}[\alpha_2 - X_2(t)]\}dt + \sqrt{X_2(t)}dZ_2(t), \\ dX_3(t) =& \{\delta_{31}[\alpha_1 - X_1(t)] + \delta_{32}[\alpha_2 - X_2(t)] - \delta_{33}X_3(t)\}dt \\ &+ [1 + \beta_{31}\sqrt{X_1(t)} + \beta_{32}\sqrt{X_2(t)}]dZ_3(t). \end{aligned} \tag{7.3.37}$$

3. 仿射结构的扩展二次期限结构模型

在二次期限结构模型中, 短期利率由一个随机状态变量的二次向量函数给出, 也就是说, 此时 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \cdots, X_n(t))^{\mathrm{T}}$. 例如, 短期利率 $r(t)$ 可以如下定义 (见习题 7.32):

$$r(t) = f(t) + \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)^{\mathrm{T}}Q(t)\mathbf{X}(t), \tag{7.3.38}$$

其中 $f(t)$ 为标量函数, $\mathbf{g}(t)$ 为一个 n 维向量函数, $Q(t)$ 为一个 $n \times n$ 阶矩阵函数. 对 $\mathbf{X}(t)$ 作一定的限制性假设, 使得债券价格是一个二次指数函数形式. 关于二次

期限结构模型在文献中已有完整的研究 (Ahn et al., 2002; Leippold and Wu, 2002), 此处省略.

7.4 Heath-Jarrow-Morton 框架结构

利率期限结构信息包含债券价格 $B(t,T)$, 收益率曲线 $R(t,T)$, 或者即时远期利率 $F(t,T)$. Heath-Jarrow-Morton (HJM) 框架结构 (Heath et al., 1992) 尝试构造一族连续时间随机变量的期限结构. 它是建立在外生确定过程 $F(t,T)$ 基础上的. 模型的驱动状态变量为远期利率曲线 $F(t,T)$. 随机过程 $F(t,T)$ 假设服从如下最一般形式的多状态变量形式的模型:

$$F(t,T) = F(0,T) + \int_0^t \alpha_F(u,T)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_F^i(u,T)\,dZ_i(u), \tag{7.4.1a}$$

或者写成微分形式

$$dF(t,T) = \alpha_F(t,T)\,dt + \sum_{i=1}^n \sigma_F^i(t,T)\,dZ_i(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{7.4.1b}$$

后一个方程给出 $F(t,T)$ 关于时间变量 t 且以 T 为参数的随机微分方程. 显然, 这里的过程有无穷多, 即对于每个到期日 T 都对应一个关于时间 t 的过程. 然而, 如果 HJM 模型依赖于 n 个随机源, 则只需要知道 n 个到期日无限小的区间中的远期利率曲线变化, 由此来确定在所有到期日在同样小区间中的变化. 方程 (7.4.1a) 中, $F(0,T)$ 为市场可观察到的初始远期即时利率曲线, $\alpha_F(t,T)$ 为远期即时利率的漂移项, $\sigma_F^i(t,T)$ 为第 i 个远期利率的波动率函数, Z_i 为第 i 个布朗运动, 共有 n 个独立的布朗运动决定了远期利率曲线的随机波动. 漂移率函数 $\alpha_F(t,T)$ 和波动率函数 $\sigma_F^i(t,T)$ 是适应过程. 远期利率过程的初始值为 $F(0,T)$, 并在确定的漂移项和某些布朗运动的影响下变化. 这样确定的初始条件使得远期利率的理论值和实际市场观测值在 $t=0$ 时刻自动互相匹配.

对于任意给定的漂移项和波动项, 如方程 (7.4.1a) 确定的远期利率不一定能保证是无套利的. 在 7.4.1 小节中, 将给出漂移项 $\alpha_F(t,T)$ 必须与波动率函数 $\sigma_F^i(t,T)(i=1,\cdots,n)$ 相关联, 才能保证得到的债券价格不存在任何套利的机会. 非常重要的一点是 HJM 模型应该理解为一个分析利率变化的框架, 它本身并不是一个确切的模型. 在 7.4.2 小节中, 将演示如何在 HJM 框架结构下得到一些流行的短期利率模型. 在 HJM 模型下的远期利率的变化规律一般是一个非马尔可夫过程. 这个非马尔可夫性的性质会导致在用二叉树进行近似数值求解时出现所谓的浓密树 (bushy tree) 现象, 这是因为离散 HJM 树是非重组的 (non-recombining), 因

此, 会引起节点数量呈指数增长. 下面将研究短期利率模型在 HJM 框架结构下具有马尔可夫性的条件. 在 7.4.3 小节中, 考察 HJM 框架结构下远期 LIBOR 的变化规律, 以及即时远期过程中波动率函数和远期 LIBOR 的关系.

7.4.1　远期利率的漂移率条件

本小节研究 HJM 框架下可能会导致的远期利率和债券价格之间的套利关系, 结论是即时远期利率 $F(t,T)$ 的漂移项 $\alpha_F(t,T)$ 应该满足一定的条件才能保证没有套利机会. 假设没有套利机会, 则漂移项应该为仅依赖于 $F(t,T)$ 的波动率的函数. 首先由债券价格的随机微分方程开始, 然后推导即时远期利率满足的随机微分方程.

在风险中性测度 Q 下, 由于零息债券没有票息收益, 因此, 零息票债券 $B(t,T)$ 的漂移率必然为短期利率 $r(t)$. 假设 n 个风险因子由 n 个独立的测度 Q 下的布朗过程 $Z_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 来描述, 则债券价格 $B(t,T)$ 在测度 Q 下的变化规律由以下随机微分方程确定:

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r(t)dt - \sum_{i=1}^{n} \sigma_B^i(t,T)\ dZ_i(t), \tag{7.4.2}$$

其中 $\sigma_B^i(t,T)(i=1,2,\cdots,n)$ 为满足终值条件 $\sigma_B^i(T,T)=0$ 的适应过程. 由于 $-Z_i$ 与 Z_i 的分布函数相同, 因此, 可以在方程 (7.4.2) 中的随机项中出现负号而不会引起误解. 同式 (7.1.5) 中定义的一样, 连续远期利率 $f(t,T_1,T_2)$ 的微分为

$$df(t,T_1,T_2) = \frac{d\ln B(t,T_1) - d\ln B(t,T_2)}{T_2 - T_1}. \tag{7.4.3}$$

由 Itô 引理, 到期日为 T_j 的债券价格对数的微分为

$$d\ln B(t,T_j) = \left[r(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_B^i(t,T_j)^2\right] dt - \sum_{i=1}^{n} \sigma_B^i(t,T_j)\ dZ_i(t). \tag{7.4.4}$$

回忆一下, 即时远期利率定义为

$$F(t,T) = \lim_{\Delta T\to 0} f(t,T,T+\Delta T), \quad \Delta T > 0.$$

将方程 (7.4.4) 代入方程 (7.4.3), 令 $T_1 = T$, $T_2 = T+\Delta T$, 然后取极限 $\Delta T \to 0$, 可以得到以下即时远期利率的随机微分方程:

$$dF(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_B^i}{\partial T}(t,T)\sigma_B^i(t,T)dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_B^i}{\partial T}(t,T)dZ_i(t).$$

如果记 $\sigma_F^i(t,T) = \dfrac{\partial \sigma_B^i}{\partial T}(t,T)$, 则有

$$dF(t,T) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_F^i(t,T) \int_t^T \sigma_F^i(t,u)\ du \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_F^i(t,T)\ dZ_i(t). \tag{7.4.5}$$

因此, 在风险中性测度 Q 下, $F(t,T)$ 的漂移率和波动率函数 $\sigma_F^i(t,T)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足以下的**远期利率漂移项条件** (forward rate drift condition):

$$\alpha_F(t,T) = \sum_{i=1}^n \sigma_F^i(t,T) \int_t^T \sigma_F^i(t,u)\ du. \tag{7.4.6}$$

每一个 HJM 利率模型确定了远期利率在未来时刻的波动率函数 $\sigma_F^i(t,T)$. 而一旦**波动率结构** (volatility structure) $\sigma_F^i(t,T)$ 确定了, 漂移率 $\alpha_F(t,T)$ 就可以由方程 (7.4.6) 来确定. 作为一个类似于 Black-Scholes 股票期权的模型, 在 HJM 需要确定的包括标的物和波动率的测度. 而标的物就是整个期限结构, 波动率描述期限结构随着时间的变化规律. 初始期限结构充当了一个类似于 Black-Scholes 模型中的资产价格的角色.

假设波动率函数 $\sigma_F^i(t,T)$ 是确定性函数, 那么远期利率 $F(t,T)$ 和债券价格 $B(t,T)$ 在风险中性测度 Q 下服从高斯分布. 此时的 HJM 模型称为**高斯型** (Gaussian) 的.

7.4.2 短期利率过程和它们的马尔可夫特性

由前所述, 在风险中性测度 Q 下, $F(t,T)$ 的随机过程有以下形式:

$$F(t,T) = F(0,T) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \alpha_F^i(u,T)\ du + \int_0^t \sigma_F^i(u,T)\ dZ_i(u), \tag{7.4.7}$$

其中

$$\alpha_F^i(t,T) = \sigma_F^i(t,T) \int_t^T \sigma_F^i(t,u)\ du.$$

在测度 Q 下的短期利率过程可以写成

$$r(t) = F(0,t) + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^t \alpha_F^i(u,t)\ du + \int_0^t \sigma_F^i(u,t)\ dZ_i(u) \right]. \tag{7.4.8a}$$

在方程 (7.4.8a) 中直接对 t 微分有

$$dr(t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F(0,t) + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \alpha_F^i(u,t)\ du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sigma_F^i(u,t)\ dZ_i(u) \right] \right\} dt$$
$$+ \sum_{i=1}^n \sigma_F^i(t,t)\ dZ_i(t). \tag{7.4.8b}$$

因为漂移项中的积分中涉及随机量, 因而短期利率具有非马尔可夫特性. 这就导致路径依赖特性, 因为这些随机积分表示在时间区间 $(0,t)$ 中布朗运动增量的加权和.

对于一些特殊的波动率结构, 可以得到具有马尔可夫特性的短期利率过程. 现在讨论在 HJM 框架结构下, 得到一些流行的具有马尔可夫特性的短期利率模型. 也会研究具有马尔可夫性质的短期利率结构下的波动率函数的特征. 在接下来的讨论中, 集中研究 $n=1$ 的单因子模型. 关于多因子模型下的一些拓展及推广很容易得到, 其中部分结果作为练习.

首先考虑简单的情况. 令 $\sigma_F(t,T)=\sigma$ 为常数, 则有

$$r(t)=F(0,t)+\frac{\sigma^2t^2}{2}+\sigma Z(t), \tag{7.4.9a}$$

其微分形式为

$$dr(t)=\left[\frac{\partial F}{\partial t}(0,t)+\sigma^2t\right]dt+\sigma\,dZ(t). \tag{7.4.9b}$$

这正是 Ho-Lee 模型 (见习题 7.19). $F(t,T)$ 在测度 Q 下的随机微分方程变为

$$dF(t,T)=\sigma^2(T-t)dt+\sigma\,dZ(t). \tag{7.4.10}$$

另一种具有良好的解析可解性的波动率结构是由指数函数形式给出的, 即

$$\sigma_F(t,T)=\sigma e^{-\alpha(T-t)}. \tag{7.4.11}$$

对应的测度 Q 下的漂移系数为

$$\alpha_F(t,T)=\sigma_F(t,T)\int_t^T\sigma_F(t,u)du=\frac{\sigma^2}{\alpha}e^{-\alpha(T-t)}[1-e^{-\alpha(T-t)}].$$

远期利率和它服从的随机微分方程就可以写成

$$\begin{aligned}F(t,T)=&F(0,T)+\sigma\int_0^t e^{-\alpha(T-s)}\,dZ(s)\\&-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left[e^{-2\alpha T}(e^{2\alpha t}-1)-2e^{-\alpha T}(e^{\alpha t}-1)\right],\end{aligned} \tag{7.4.12a}$$

所以

$$dF(t,T)=\frac{\sigma^2}{2}\left[e^{-\alpha(T-t)}-e^{-2\alpha(T-t)}\right]dt+\sigma e^{-\alpha(T-t)}\,dZ(t). \tag{7.4.12b}$$

在 $F(t,T)$ 表达式中取极限 $T\to t$, 则有

$$r(t)=F(0,t)+\sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-u)}dZ(u)-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(2e^{-\alpha t}-e^{-2\alpha t}-1).$$

再求微分得到

$$dr(t)=\left[\frac{\partial F}{\partial t}(0,t)+\alpha F(0,t)+\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha t})-\alpha r(t)\right]dt+\sigma\,dZ(t). \tag{7.4.13}$$

因此, 选取指数波动率函数, 就得到如方程 (7.2.36) 所定义的 Hull-White 模型, 并且具有相同的时间依赖函数参数 (比较方程 (7.2.42) 给出的 $\phi(t)$). 更进一步, 利用方程 (7.4.12a) 的解析形式, 通过以下直接计算得到零息票债券价格 $B(t,T)$:

$$\begin{aligned}
&B(t,T)\\
=&\exp\left(-\int_t^T F(t,u)\,du\right)\\
=&\exp\left(-\int_t^T F(0,u)du+\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\int_t^T\left[e^{-2\alpha u}(e^{2\alpha t}-1)-2e^{-\alpha u}(e^{\alpha t}-1)\right]du.\right.\\
&\left.-\ \sigma\int_t^T\int_0^t e^{-\lambda(u-s)}dZ(s)\,du\right)\\
=&\exp\left(-\int_t^T F(0,u)du-[r(t)-F(0,t)]X(t,T)-\frac{\sigma^2}{4\alpha}X^2(t,T)(1-e^{-2\alpha t})\right),
\end{aligned}\tag{7.4.14}$$

其中

$$X(t,T)=\int_t^T\sigma_F(t,u)\ du=\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}.$$

在 HJM 框架结构下, 远期利率的初始期限结构 $F(0,T)$ 会自动出现在债券价格解析表达式中.

无论是 Ho-Lee 模型, 还是 Vasicek 模型, 它们都是具有马尔可夫特性的单因子短期利率模型. 一个很自然的问题是在 HJM 框架结构下, 是否还存在其他具有马尔可夫特性的短期利率模型. 这个问题已经在一系列文章中得到了很好的研究 (Ritchken and Sankarasubramanian, 1996; Inui and Kijima, 1998; Chiarella and Kwon, 2003).

下面考虑单因子 HJM 模型. 如果波动率函数 $\sigma_F(t,T)$ 满足以下可分离形式:

$$\sigma_F(t,T)=\gamma(t)\beta(T),\tag{7.4.15}$$

则很容易得到此时的 HJM 模型为具有马尔可夫特性的短期利率模型. Ho-Lee 模型和 Vasicek 模型都可以看成这种分离形式波动率的特例. 由方程 (7.4.8b) 有

$$r(t)=F(0,t)+\int_0^t\alpha_F(u,t)\ du+\beta(t)\int_0^t r(u)\ dZ(u),\tag{7.4.16a}$$

从而

$$\begin{aligned}
dr(t)=&\left[\frac{\partial}{\partial t}F(0,t)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\alpha_F(u,t)\ du\right.\\
&\left.+\beta'(t)\int_0^t\gamma(u)\ dZ(u)\right]dt+\ \gamma(t)\beta(t)\ dZ(t),
\end{aligned}\tag{7.4.16b}$$

其中

$$\alpha_F(t,T) = \sigma_F(t,T)\int_t^T \sigma_F(t,u)\,du = \gamma^2(t)\beta(T)\int_t^T \beta(u)\,du.$$

消去 $r(t)$ 和 $dr(t)$ 中的随机积分项, 就得到以下关于 $r(t)$ 的随机微分方程:

$$dr(t) = [a(t) + b(t)r(t)]dt + c(t)\,dZ(t) \tag{7.4.17}$$

其中

$$a(t) = g'(t) - \frac{g(t)\beta'(t)}{\beta(t)}, \quad b(t) = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)},$$

$$c(t) = \gamma(t)\beta(t), \quad g(t) = F(0,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\alpha_F(u,t)\,du.$$

由于这里的系数函数都是确定性的, 因此, 短期利率模型具有马尔可夫特性. 实际上, 它属于单因子仿射期限结构模型.

为了使短期利率过程具有马尔可夫特性, Inui 和 Kijima (1998) 提出了一种非常好的方法, 推导出远期利率波动率满足的充分条件. 考虑单因子 HJM 模型, $r(t)$ 漂移项满足

$$\mu_r(t) = \frac{\partial}{\partial t}F(0,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\alpha_F(u,t)\,du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\sigma_F(u,t)\,dZ(u). \tag{7.4.18}$$

假设 $\sigma_F(t,T)$ 对于某些确定性的函数 $k(T)$ 满足微分方程

$$\frac{\partial}{\partial T}\sigma_F(t,T) = -k(T)\sigma_F(t,T) \tag{7.4.19a}$$

以及初始条件

$$\sigma_F(t,t) = \sigma_0(r(t),t), \tag{7.4.19b}$$

其中 $\sigma_0(r(t),t)$ 可以理解为短期利率波动率 (见方程 (7.4.8b)), 可能依赖于短期利率 $r(t)$. 直接由方程 (7.4.19a), (7.4.19b) 解出 $\sigma_F(t,T)$,

$$\sigma_F(t,T) = \sigma_0(r(t),t)e^{-\int_t^T k(u)\,du}. \tag{7.4.20}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial T}\alpha_F(t,T)\\
=&\frac{\partial\sigma_F}{\partial T}(t,T)\int_t^T \sigma_F(t,u)\,du + \sigma_F^2(t,T)\\
=&-k(T)\sigma_F(t,T)\int_t^T \sigma_F(t,u)\,du + \sigma_F^2(t,T)\\
=&-k(T)\alpha_F(t,T) + \sigma_F(t,T)^2
\end{aligned}$$

以及

$$r(t) = F(0,t) + \int_0^t \alpha_F(u,t)\,du + \int_0^t \sigma_F(u,t)\ dZ(u),$$

所以短期利率的漂移项可以表示为

$$\begin{aligned}\mu_r(t) &= \frac{\partial}{\partial t}F(0,t) - k(t)\left[\int_0^t \alpha_F(u,t)\,du + \int_0^t \sigma_F(u,t)\,dZ(u)\right] \\ &\quad + \int_0^t \sigma_F(u,t)^2\ du \\ &= \frac{\partial}{\partial t}F(0,t) + k(t)\left[F(0,t) - r(t)\right] + \int_0^t \sigma_F(u,t)^2\,du. \end{aligned} \tag{7.4.21}$$

如果 σ_0 只依赖于时间, 则 $\sigma_F(t,T)$ 就是确定性函数, 因为短期利率的漂移项中没有随机项. 因此, 方程 (7.4.19a) 中的条件就足以使得短期利率过程具有马尔可夫特性. 其实, 此时的短期利率过程就是 Hull-White 模型. 令 $k(t) = 0$, $\sigma_0(r,t) = \sigma$, 就得到了 Ho-Lee 模型.

对于 σ_0 为 $r(t)$ 和 t 一般函数的情况, 则短期利率过程依赖于两个随机状态变量 $r(t)$ 和 $\phi(t)$, 其中

$$\phi(t) = \int_0^t \sigma_F(u,t)^2\ du, \tag{7.4.22a}$$

而

$$d\phi(t) = \left[\sigma_0(r(t),t)^2 - 2k(t)\phi(t)\right] dt, \tag{7.4.22b}$$

短期利率过程就可以写成

$$dr(t) = \left\{\frac{\partial}{\partial t}F(0,t) + k(t)[F(0,t) - r(t)] + \phi(t)\right\} dt + \sigma_0(r(t),t)\,dZ(t), \tag{7.4.23}$$

其中 $\{r(t), \phi(t)\}$ 组成了一个二维的马尔可夫过程.

7.4.3 高斯型 HJM 框架结构下的远期 LIBOR 过程

到目前为止, 考虑的期限结构模型都是以**即时** (instantaneous) 短期利率或远期利率的扩散模型为基础的. 然而, 利用即时利率作为状态变量为一些利率衍生产品定价不再有效, 因为这些衍生产品的收益函数的显式表达式是以市场利率作为变量的 (如 LIBOR 或者互换率). 回忆一下, 远期 LIBOR 是市场观测到的一系列远期合约中隐含的离散远期利率数据, 如果在风险中性测度 Q 下, 远期利率过程服从如方程 (7.4.7) 给出的高斯型 HJM 模型, 则可以写出远期 LIBOR 在测度 Q 下满足的方程. 令 $L_t[T, T+\delta]$ 表示在 $t(t < T, \delta > 0)$ 时刻观测到的未来时间区间段 $(T, T+\delta]$ 的远期 LIBOR 过程, 则由方程 (7.1.2) 和 (7.1.7), LIBOR 过程和即时远期利率 $F(t,T)$ 存在如下的关系:

$$1+\alpha L_t[T,T+\delta]=\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}=\exp\left(\int_T^{T+\delta}F(t,u)\,du\right), \tag{7.4.24}$$

其中 α 为利率区间 $(T,T+\delta]$ 上的时间换算因子. 为了记号简便起见, 定义

$$h(t;T,T+\delta)=\int_T^{T+\delta}F(t,u)\,du.$$

回忆一下债券价格过程中波动率第 i 个部分为 $\sigma_B^i(t,T)$,

$$\sigma_B^i(t,T)=\int_t^T\sigma_F^i(t,u)du.$$

为了计算 LIBOR 过程 L_t 的微分, 利用 Itô 引理得到

$$dL_t=\frac{e^{h(t)}}{\alpha}\left[dh(t)+\frac{(dh(t))^2}{2}\right].$$

直接计算得到

$$\begin{aligned}dh(t)=&\int_T^{T+\delta}dF(t,u)\;du\\=&\int_T^{T+\delta}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial u}[\sigma_B^i(t,u)^2]\;dudt\\&+\int_T^{T+\delta}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\sigma_B^i}{\partial u}(t,u)\;dudZ_i(t)\\=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left[\sigma_B^i(t,T+\delta)^2-\sigma_B^i(t,T)^2\right]dt\\&+\sum_{i=1}^n\left[\sigma_B^i(t,T+\delta)-\sigma_B^i(t,T)\right]dZ_i(t)\end{aligned}$$

以及

$$(dh(t))^2=\sum_{i=1}^n\left[\sigma_B^i(t,T+\delta)-\sigma_B^i(t,T)\right]^2\;dt,$$

从而得到

$$\begin{aligned}dL_t=&\frac{1+\alpha L_t}{\alpha}\sum_{i=1}^n[\sigma_B^i(t,T+\delta)-\sigma_B^i(t,T)]\sigma_B^i(t,T+\delta)\;dt\\&+\;[\sigma_B^i(t,T+\delta)-\sigma_B^i(t,T)]\,dZ_i(t).\end{aligned} \tag{7.4.25}$$

将 $L_t[T,T+\delta]$ 在测度 Q 下的随机微分方程写成如下形式:

$$dL_t = \mu_L(t;T,T+\delta)L_t dt + L_t \sum_{i=1}^{n} \sigma_L^i(t;T,T+\delta)\,dZ_i(t), \tag{7.4.26}$$

那么 σ_B^i 和 μ_L, σ_L^i 有何关系呢? 比较方程 (7.4.25) 和 (7.4.26) 中的随机项, 推得 LIBOR 过程与远期利率的波动率有如下关系:

$$\sigma_B^i(t,T+\delta) - \sigma_B^i(t,T) = \frac{\alpha L_t}{1+\alpha L_t}\sigma_L^i(t). \tag{7.4.27}$$

而漂移率 $\mu_L(t)$ 可以表示成

$$\mu_L(t) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_B^i(t,T+\delta)\sigma_L^i(t) \tag{7.4.28a}$$

或者

$$\mu_L(t) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_B^i(t,T)\sigma_L^i(t) \;+\; \frac{\alpha L_t}{1+\alpha L_t}\sum_{i=1}^{n}\sigma_L^i(t)^2. \tag{7.4.28b}$$

注意到在风险中性测度 Q 下, $L_t[T,T+\delta]$ 不是鞅. 在测度 Q 下, 远期利率的漂移率与 LIBOR 波动率之间的依赖关系是非常复杂的. 在 8.1 节中, 证明在到期日为 $(T+\delta)$ 的债券价格作计价单位的远期测度下, $L_t[T,T+\delta]$ 将成为鞅. 对于各种市场利率模型的讨论以及它们应用于不同类型的利率上限, 互换期权和新型 LIBOR 产品的定价研究将放在下一章.

7.5 习　题

7.1　对于 30/360 的习惯计算方法. 时间区间 $[D_1, D_2)$ (其中包含 D_1, 而不包含 D_2) 的年分式计算方法为

$$\frac{\max(30-d_1,0)+\min(d_2,30)+360\times(y_2-y_1)+30\times(m_2-m_1-1)}{360},$$

其中 d_i, m_i 和 y_i 分别表示日期 $D_i(i=1,2)$ 的日、月和年. 计算 2006 年 2 月 27 日 ~2008 年 7 月 31 日的年分式.

7.2　设 $F_t(T_0,T_i)$ 表示单位面值的 T_0 时刻购买且到期日为 T_i 的零息票债券在 t 时刻的远期价格. 远期互换利率 (见方程 (7.1.4)) 可以表示成

$$K_t[T_0,T_n] = \frac{1-F_t(T_0,T_n)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_t(T_i,T_n)},$$

其中 α_i 表示区间 $[T_{i-1},T_i]$ 的时间换算因子. 相应地, 假如将远期 LIBOR 记为 $L_i(t) = L_t[T_{i-1},T_i]$, 则由以下结论:

$$\frac{B(t,T_k)}{B(t,T_0)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i-1})} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1+\alpha_i L_i(t)}, \quad k \geqslant 1,$$

证明远期互换利率可以表示为

$$K_t[T_0,T_n] = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\alpha_i L_i(t)}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{1+\alpha_j L_j(t)}}.$$

7.3 定义即时远期利率 $\lim_{S \to R^+} L_t[R,S]$. 利用关系式 $\alpha_R^S = S - R$, 证明

$$\lim_{S \to R^+} L_t[R,S] = -\frac{\partial}{\partial R} \ln B(t,R).$$

7.4 (市场风险价格) 考虑两个都依赖于利率的衍生资产 A, B, 假设衍生资产 A 的期望回报率每年 4%, 波动率每年 10%, 同时衍生资产 B 波动率每年 20%. 假设无风险利率为每年 7%. 计算利率的市场风险价格和衍生资产 B 每年的期望回报率, 并给出为什么利率市场风险价格通常是负的金融解释.

提示: 股票和债券的回报率是与利率的变化负相关的.

7.5 假设债券的价格依赖于商品的价格, 商品价格 Q_t 服从如下随机微分方程:

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = \alpha\, dt + \sigma\, dZ_t.$$

利用不同到期日的债券对冲, 证明债券价格 $B(Q,t)$ 的定价方程为 (见方程 (7.2.8))

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} Q^2 \frac{\partial^2 B}{\partial Q^2} + (\alpha - \lambda\sigma) Q \frac{\partial B}{\partial Q} - rB = 0,$$

其中 λ 为市场风险价格, r 为无风险利率. 因为商品是**可交易资产** (traded security) (与利率不同), 商品价格也应该满足同样的微分方程. 在偏微分方程中, 用 Q 替换 B 得到

$$\alpha - \lambda\sigma = r.$$

说明为什么债券的定价方程和 Black-Scholes 方程有同样的形式, 而后者与投资者的风险偏好是无关的.

7.6 由债券价格表达式 (7.2.10), 利用 Itô 微分公式证明

$$\left.\frac{\partial^2 B}{\partial T^2}\right|_{T=t} = r^2(t) - 2\left.\frac{\partial R}{\partial T}\right|_{T=t},$$

其中 $R(t,T)$ 为到期日的收益率. 试建立利率市场风险价格 $\lambda(r,t)$ 与 $\left.\frac{\partial R}{\partial T}\right|_{T=t}$ 的关系.

7.7 假设短期利率 $r(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$dr(t) = \mu(r,t)dt + \rho(r,t)dZ(t),$$

则零息票债券价格 $B(r,t)$ 的微分方程可以写成 (见方程 (7.2.8))

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (\mu - \lambda\rho)\frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0.$$

对于任意的收益依赖于 $r(T)$ 的无票息支付的未定权益, 它的价格函数 $U(r,t)$ 满足上述同样的微分方程. 假设由下面的定义建立这个未定权益的价格和债券价格的关系:

$$V(B(r,t),t) = U(r,t).$$

证明 $V(B,t)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma_B^2}{2}B^2\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} + rB\frac{\partial V}{\partial B} - rV = 0,$$

其中债券回报的波动率 σ_B 为

$$\sigma_B(r,t) = -\frac{\rho(r,t)}{B(r,t)}\frac{\partial B}{\partial r}(r,t).$$

假设这个未定权益在到期日 T 的收益为 $f(B_T)$, 应用 Feynman-Kac 定理证明 $V(B,t)$ 满足以下表达式:

$$V(B,t) = E_Q\left[e^{-\int_t^T r(u)du} f(B_T) \middle| B_t = B\right],$$

其中测度 Q 的定义由下式确定:

$$\frac{dB(r,t)}{B(r,t)} = r(t)dt + \sigma_B(r,t)dZ(t).$$

7.8 假设一个含票息债券 B 的**久期** (duration) D 在 t 时刻的价格定义为

$$D(B,t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t)e^{-R(t_i-t)} + (t_n - t)Fe^{-R(t_n-t)} \Big/ B,$$

其中 $c_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为债券在 t_i 支付的第 i 个票息, F 为面值, 而 R 为债券收益率, 由以下方程的解确定:

$$B = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-R(t_i-t)} + Fe^{-R(t_n-t)}.$$

证明

$$D(B,t) = -\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial R},$$

并给出久期的金融解释.

7.9　回忆一下,

$$B(r,t) = \exp\left(-\int_t^T F(t,u)\,du\right) = E_Q^t\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)\ du\right)\right],$$

证明远期利率可以表示为

$$F(t,T) = \frac{E_Q^t[r(T)d(t,T)]}{E_Q^t[d(t,T)]},$$

其中随机贴现因子定义为

$$d(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(u)\,du\right).$$

7.10　假设远期利率作为时间 t 的函数满足下面的随机微分方程:

$$dF(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma\ dZ_t,$$

其中 $\mu(t,T)$ 为一个关于时间 t 和 T 的确定性函数. 证明远期利率服从正态分布, 其中

$$F(t,T) = F(0,T) + \int_0^t \mu(u,T)du + \sigma Z_t.$$

解释为什么 $F(t,T) - F(t,S)$ 是确定性的函数, 并推出不同到期日的远期利率是完全相关的结论.

7.11　考虑线性随机微分方程

$$dr(t) = [a(t)r(t) + b(t)]\,dt + \rho(t)\,dZ(t),$$

证明均值 $E[r(t)]$ 满足以下确定性的线性微分方程:

$$\frac{d}{dt}E[r(t)] = a(t)E[r(t)] + b(t),$$

同时方差 $\mathrm{var}(r(t))$ 满足

$$\frac{d}{dt}\mathrm{var}(r(t)) = 2a(t)\mathrm{var}(r(t)) + \rho(t)^2.$$

将以上结果应用于 CIR 利率模型

$$dr(t) = \alpha[\gamma - r(t)]\,dt + \rho\sqrt{r(t)}\,dZ(t),$$

证明 $E[r(T)|r(t)]$ 和 $\text{var}(r(T)|r(t))$ 可以由方程 (7.2.30a), (7.2.30b) 确定.

7.12　考虑 Vasicek 模型的收益率曲线 (见方程 (7.2.26)), 证明当 $r(t) \leqslant R_\infty - \frac{\rho^2}{4\alpha^2}$ 时, 收益率是单调递增的; 而当 $r(t) \geqslant R_\infty + \frac{\rho^2}{2\alpha^2}$ 时, 收益率是单调递减的; 当 $R_\infty - \frac{\rho^2}{4\alpha^2} < r(t) < R_\infty + \frac{\rho^2}{2\alpha^2}$ 时, 收益率是一个振荡曲线. 进一步, 如果定义如下的期限结构的**流动保证金** (liquidity premium):

$$\pi(\tau) = F(t, t+\tau) - E_Q^t[r(t+\tau)], \quad \tau \geqslant 0,$$

其中 $F(t,t+\tau)$ 为远期利率, E_Q^t 为 Q 下关于滤波 $\mathcal{F}_t$ 的条件数学期望, 证明 Vasicek 模型的流动保证金为 (Vasicek, 1977)

$$\pi(\tau) = \left(R_\infty - \gamma + \frac{\rho^2}{2\alpha^2} e^{-\alpha\tau}\right)(1 - e^{-\alpha\tau}), \quad \tau \geqslant 0.$$

7.13　考虑以下离散形式的 Vasicek 模型, 短期利率 $r(t)$ 服从离散的均值回归两值随机游走:

$$r(t+1) = \rho r(t) + \alpha \pm \sigma.$$

令 $V(t)$ 为关于利率的未定权益在当前 t 时刻的价格, $V_u(t+1)$ 和 $V_d(t+1)$ 分别表示利率在 $t+1$ 时刻上下波动时相应的未定权益的价格. 设 $B(t,T)$ 是 T 时刻支付一美元的零息票债券的价格, 并观察到 $B(t,t+1) = e^{-r(t)}$. 利用一个与 Cox-Ross-Rubinstein 二叉树定价模型相似的方法, 证明有关 $V(t), V_u(t+1)$ 和 $V_d(t+1)$ 的二叉树公式 (Heston, 1995)

$$V(t) = \frac{pV_u(t+1) + (1-p)V_d(t+1)}{e^{r(t)}},$$

其中

$$p = \frac{e^{r(t)} - d}{u - d}, \quad u = \frac{e^{-[\alpha + \rho r(t) + \sigma]}}{B(t, t+2)}, \quad d = \frac{e^{-[\alpha + \rho r(t) - \sigma]}}{B(t, t+2)}.$$

7.14　考虑一份标的为零息票债券的期货合约的定价, 这里假设短期利率 r_t 服从方程 (7.2.20) 给出的 Vasicek 过程. 在期货的到期日 T_F, 可以得到到期日为 T_B 的单位面值债券. 令 $B(r,t;T_B)$ 和 $V(r,t;T_F,T_B)$ 分别表示当前时刻 t 的债券价格和期货的价格, 证明期货的定价方程为以下形式:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + [\alpha(\gamma - r) - \lambda\rho]\frac{\partial V}{\partial r} = 0, \quad t < T_F,$$

并且满足终值条件 $V(r,T_F;T_F,T_B) = B(r,T_F;T_B)$. 如果假设期货价格有以下形式的解:

$$V(r,t;T_F,T_B) = e^{-rX(t) - Y(t)},$$

证明 (Chen, 1992)

$$X(t)=E(t,T_B)-E(t,T_F),$$
$$Y(t)=D[T_B-T_F-X(t)]-\frac{\rho^2}{2\alpha^2}\left[X(t)-\frac{\alpha}{2}X(t)^2-E(T_F,T_B)\right],$$

其中

$$D=\gamma-\frac{\rho\lambda}{\alpha}-\frac{\rho^2}{2\alpha^2},\quad E(t,T)=\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}.$$

7.15 证明 Cox-Ingersoll-Ross 模型中的短期利率在 T 时刻的稳态密度函数为 (Cox et al., 1985) 如下形式:

$$\lim_{T\to\infty}g(r(T);r(t))=\frac{\omega^\nu}{\Gamma(\nu)}r^{\nu-1}e^{-\omega r},$$

其中 $\omega=2\alpha/\rho^2$, $\nu=2\alpha\gamma/\rho^2$, 证明 $r(T)$ 相应的稳态均值和方差分别为 γ 和 $\frac{\gamma\rho^2}{2\alpha}$.

7.16 证明由 Cox-Ingersoll-Ross 模型 (见方程 (7.2.32a), (7.2.32b)) 确定的债券价格函数关于短期利率是递减的凸函数, 关于离到期日的时间的递减函数. 进一步, 证明债券价格关于平均短期利率水平 γ 是递减凸函数, 如果 $r(t)>\gamma$, 则它就是调节速率 α 的递增凹函数. 当短期利率的方差 ρ^2 和市场风险价格 λ 增加时, 债券价格会产生什么影响呢?

7.17 考虑 Cox-Ingersoll-Ross 模型的收益率函数 $R(t,T)$, 证明 (见方程 (7.2.32a), (7.2.32b))

$$\lim_{T\to\infty}R(t,T)=\frac{2\alpha\gamma}{\theta+\psi}.$$

解释为什么对于任何期限, 当前短期利率的增长都会导致收益率的增长, 而对于更短的期限, 这种影响会更有意义. 然而, 当稳态均值 γ 增长时, 所有收益都增长, 但是期限越长, 影响越有意义. 当短期利率的方差 ρ^2 和市场风险价格增加时, 对于收益率会产生什么样的影响?

7.18 考虑扩展 CIR 模型, 其中短期利率 $r_t\geqslant 0$, 服从过程

$$dr_t=[\alpha(t)-\beta(t)r_t]dt+\sigma(t)\sqrt{r_t}\,dZ_t,$$

其中 $\alpha(t),\beta(t)$ 和 $\sigma(t)>0$ 为一些光滑的确定性函数, Z_t 为风险中性测度下的布朗过程. 证明债券价格由下式给出 (Jamshidian, 1995):

$$B(t,T)=\exp\left(-\int_t^T A_T(u)\alpha(u)\,du-A_T(t)r_t\right),\quad t<T,$$

其中 $A_T(t)$ 满足 Riccatti 方程

$$A'_T(t) = \beta(t)A_T(t) + \frac{\sigma^2(t)}{2}A_T^2(t) - 1, \quad A_T(T) = 0,$$

并证明到期日为 T 的即时远期利率 $f(t,T)$ 满足下式:

$$f(t,T) = \int_t^T a_T(u)\,du + a_T(t)r_t, \quad f(T,T) = r,$$

其中

$$a'_T(t) = [\beta(t) + \sigma^2(t)A_T(t)]a_T(t), \quad a_T(T) = 1.$$

7.19 考虑连续时间 Hull-White 模型的退化情况 ——Ho-Lee 模型, 其中风险中性测度 Q 下短期利率 r_t 满足的微分方程为

$$dr_t = \theta(t)\,dt + \sigma\,dZ_t.$$

证明参数 $\theta(t)$ 与初始远期利率有下列关系:

$$\theta(t) = \frac{\partial F}{\partial T}(0,T)\bigg|_{T=t} + \sigma^2 t,$$

并且债券价格可以表示为仿射结构, 即

$$B(t,T) = e^{a(t,T)-b(t,T)r},$$

其中

$$\begin{aligned} b(t,T) &= T - t, \\ a(t,T) &= \ln\frac{B(0,T)}{B(0,t)} + (T-t)F(0,t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2. \end{aligned}$$

7.20 考虑 Hull-White 模型, 短期利率服从

$$dr_t = [\phi(t) - \alpha r_t]\,dt + \sigma\,dZ_t,$$

其中 Z_t 为风险中性测度 Q 下的布朗运动. 利用关系式

$$d[r(t)e^{\alpha t}] = \phi(t)e^{\alpha t}\,dt + \sigma e^{\alpha t}\,dZ(t)$$

证明

$$\begin{aligned} \int_t^T r(u)\,du = r(t)\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} &+ \int_t^T\int_t^u \phi(u)e^{-\alpha(u-s)}ds\,du \\ &+ \int_t^T\int_t^u \sigma e^{-\alpha(u-s)}dZ(s)\,du \end{aligned}$$

$$= r(t)\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + \int_t^T \phi(u)\frac{1-e^{-\alpha(T-u)}}{\alpha}\,du + \int_t^T \frac{\sigma}{\alpha}[1-e^{-\alpha(T-s)}]\,dZ(s).$$

由此可得 $\int_t^T r(u)\,du$ 的均值和方差分别为

$$E_Q^t\left[\int_t^T r(u)\,du\right] = r(t)\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + \int_t^T \phi(u)\frac{1-e^{-\alpha(T-u)}}{\alpha}\,du,$$

$$\text{var}\left(\int_t^T r(u)\,du\right) = \int_t^T \frac{\sigma^2}{\alpha^2}[1-e^{-\alpha(T-u)}]^2\,du.$$

请计算债券价格 $B(r,t;T)$.

7.21　由方程 (7.2.38b) 推导出的 $a(t,T)$ 的表达式包含 $\phi(t)$. 希望只用债券所有期限的初始价格 $B(0,T)$ 形式来表示 $a(t,T)$, 证明 (Hull and White, 1994)

$$a(t,T) = \ln\frac{B(0,T)}{B(0,t)} - b(t,T)\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(e^{-\alpha T}-e^{-\alpha t})^2(e^{2\alpha t}-1).$$

7.22　考虑 Hull-White 模型, 短期利率定义如下:

$$dr(t) = [\phi(t) - \alpha r(t)]\,dt + \sigma\,dZ(t).$$

如果定义一个新的变量 $x(t)$,

$$dx(t) = -\alpha x(t)\,dt + \sigma\,dZ(t),$$

同时令 $\psi(t) = r(t) - x(t)$, 证明 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 有下列关系:

$$\psi'(t) + \alpha\psi(t) = \phi(t), \quad \psi(0) = r(0).$$

令 $Y(t) = R(0,t)$, 其中 $R(t,T)$ 为收益率, 证明

$$\psi(t) = \frac{d}{dt}[tY(t)] + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1-e^{-\alpha t})^2, \quad t \geqslant 0,$$

并且债券价格 $B(t,T)$ 可以表示成 (Kijima and Nagayama, 1994)

$$\ln B(t,T) = \ln\frac{B(0,T)}{B(0,t)} + \frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha(T-t)} - 1\right][r(t) - \psi(t)] + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}\{1 - [2-e^{-\alpha(T-t)}]^2 + (2-e^{-\alpha T})^2 - (2-e^{-\alpha t})^2\}.$$

7.23 一个扩展的 Vasicek 模型有以下形式 (Hull and White, 1990):

$$dr_t = [\theta(t) + \alpha(t)(d - r_t)]\,dt + \sigma(t)\,dZ_t.$$

令 $\lambda(t)$ 表示依赖于时间的市场风险价格, 证明债券价格满足下列偏微分方程:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + [\phi(t) - \alpha(t)r]\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sigma(t)^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - rB = 0,$$

其中

$$\phi(t) = \alpha(t)d + \theta(t) - \lambda(t)\sigma(t).$$

如果将债券价格 $B(r, t; T)$ 写成以下形式:

$$B(r, t; T) = e^{a(t,T) - b(t,T)r},$$

证明 $a(t, T)$ 和 $b(t, T)$ 满足如下关系:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial t} - \phi(t)b + \frac{\sigma(t)^2}{2}b^2 = 0, \\ &\frac{\partial b}{\partial t} - \alpha(t)b + 1 = 0 \end{aligned}$$

以及终值条件

$$a(T, T) = 1, \quad b(T.T) = 0.$$

将 $a(t, T)$ 和 $b(t, T)$ 的解写成 $\alpha(t), \phi(t)$ 和 $\sigma(t)$ 的形式, 希望将 $a(t, T)$ 和 $b(t, T)$ 写成 $a(0, t)$ 和 $b(0, t)$ 的形式, 而不是 $\alpha(t)$ 和 $\phi(t)$ 的形式. 证明 $a(t, T)$ 和 $b(t, T)$ 满足新的独立于 $\alpha(t)$ 和 $\phi(t)$ 的如下方程:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial b}{\partial t}\frac{\partial b}{\partial T} - b\frac{\partial^2 b}{\partial t \partial T} + \frac{\partial b}{\partial T} = 0, \\ &ab\frac{\partial^2 a}{\partial t \partial T} - b\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial t} - a\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial b}{\partial T} + \frac{\sigma(t)^2}{2}a^2 b^2 \frac{\partial b}{\partial T} = 0, \end{aligned}$$

辅助条件是已知 $a(0, T)$ 和 $b(0, T)$ 的值以及 $a(T, T) = 1, b(t, T) = 0$. 最后证明 $b(t, T)$ 和 $a(t, T)$ 的解具有如下形式:

$$\begin{aligned} b(t, T) &= \frac{b(0, T) - b(0, t)}{\left.\dfrac{\partial b}{\partial T}(0, T)\right|_{T=t}}, \\ a(t, T) &= \frac{a(0, T)}{a(0, t)} - b(t, T)\frac{\partial}{\partial T}[a(0, T)]\Big|_{T=t} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left[b(t, T)\frac{\partial b}{\partial T}(0, T)\Big|_{T=t}\right]^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma(u)}{\left.\dfrac{\partial b}{\partial T}(0, T)\right|_{T=u}}\right]^2 du. \end{aligned}$$

7.24　Hull 和 White (1994) 提出以下两因子短期利率模型, 它在无风险中性测度下满足如下随机微分方程:

$$dr(t) = [\phi(t) + u(t) - ar(t)]\,dt + \sigma_1\,dZ_1(t),$$

其中 u 为一个初始值为零, 并且服从如下随机微分方程的过程:

$$du(t) = -bu(t)\,dt + \sigma_2\,dZ_2(t),$$

参数 a, b, σ_1 和 σ_2 都为常数, $dZ_1\,dZ_2 = \rho\,dt$, 这里 ρ 为即时相关系数. 证明零息票债券价格 $B(t,T)$ 有如下形式的解:

$$B(t,T) = \alpha(t,T)\exp(-\beta(t,T)r - \gamma(t,T)u),$$

写出 $\alpha(t,T), \beta(t,T)$ 和 $\gamma(t,T)$ 满足的方程.

提示: 容易得出 $\beta(t,T)$ 和 $\gamma(t,T)$ 分别为

$$\beta(t,T) = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(T-t)}\right],$$
$$\gamma(t,T) = \frac{1}{a(a-b)}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{b(a-b)}e^{-b(T-t)} + \frac{1}{ab}.$$

7.25　假设短期利率 $r(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$dr(t) = k_r[\theta(t) - r(t)]\,dt + \sigma_r\,dZ_r(t),$$
$$d\theta(t) = k_\theta[\overline{\theta} - \theta(t)]\,dt + \sigma_\theta\,dZ_\theta(t),$$

其中短期利率的均值回归于漂移率 $\theta(t)$, 而漂移率本身回归于一个确定的平均利率 $\overline{\theta}$, $dZ_r\,dZ_\theta = \rho\,dt$, 所有其他参数都为常数 ($k_r$ 和 k_θ 都为正数). 证明 $r(t)$ 的期望值为 (Beaglehole and Tenney, 1991)

$$E[r(t)] = r(0)e^{-k_r t} + \theta(0)\frac{k_r}{k_r - k_\theta}(e^{-k_\theta t} - e^{-k_r t}) + \frac{k_r k_\theta}{k_r - k_\theta}\overline{\theta}\left(\frac{1 - e^{-k_\theta t}}{k_\theta} - \frac{1 - e^{-k_r t}}{k_r}\right).$$

7.26　假设风险中性测度下短期利率满足

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) + \phi(t), \quad r(0) = r_0,$$

其中

$$dx_1 = -\alpha_1 x_1(t)\,dt + \sigma_1\,dZ_1(t), \quad x_1(0) = 0,$$

$$dx_2 = -\alpha_2 x_2(t)\,dt + \sigma_2\,dZ_2(t), \quad x_2(0) = 0,$$

$dZ_1(t)\,dZ_2(t) = \rho\,dt$, 证明单位面值零息票债券 t 时刻的价格为

$$B(r,t) = \exp\left(-\int_t^T \phi(u)\,du - \frac{1-e^{-\alpha_1(T-t)}}{\alpha_1}x_1(t) - \frac{1-e^{-\alpha_2(T-t)}}{\alpha_2}x_2(t) + \frac{V(t,T)}{2}\right),$$

其中

$$\begin{aligned} V(t,T) = &\frac{\sigma_1^2}{\alpha_1^2}\left[T - t + \frac{2}{\alpha_1}e^{-\alpha_1(T-t)} - \frac{e^{-2\alpha_1(T-t)}}{2\alpha_1} - \frac{3}{2\alpha_1}\right] \\ &+ \frac{\sigma_2^2}{\alpha_2^2}\left[T - t + \frac{2}{\alpha_2}e^{-\alpha_2(T-t)} - \frac{e^{-\alpha_2(T-t)}}{2\alpha_2} - \frac{3}{2\alpha_2}\right] \\ &+ \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\alpha_1\alpha_2}\left[T - t + \frac{e^{-\alpha_1(T-t)} - 1}{\alpha_1} + \frac{e^{-\alpha_2(T-t)} - 1}{\alpha_2} - \frac{e^{-(\alpha_1+\alpha_2)(T-t)} - 1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]. \end{aligned}$$

令 $f_m(0,T)$ 表示由市场债券价格推出的期日为 T 在 0 时刻的远期利率期限结构, 证明参数函数 $\phi(t)$ 可以通过以下关系校正:

$$\begin{aligned} \phi(T) = &f_m(0,T) + \frac{\sigma_1^2}{2\alpha_1^2}(1 - e^{-\alpha_1 T})^2 + \frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2^2}(1 - e^{-\alpha_2 T})^2 \\ &+ \frac{\rho\sigma_2\sigma_2}{\alpha_1\alpha_2}(1 - e^{-\alpha_1 T})(1 - e^{-\alpha_2 T}). \end{aligned}$$

7.27 实证数据表明, 长期利率和价差利率 (短期利率减去长期利率) 是几乎不相关的. 假设在两个因子的利率模型中选择随机变量 s 和 ℓ 分别作为价差利率和长期利率,

$$ds = \beta_s(s,\ell,t)\,dt + \eta_s(s,\ell,t)\,dZ_s, \quad s = r - \ell,$$

$$d\ell = \beta_\ell(s,\ell,t)\,dt + \eta_\ell(s,\ell,t)\,dZ_\ell,$$

其中 r 为短期利率. 假设上述两个过程不相关, 证明没有违约风险的债券价格 $B(s,\ell,\tau)$ 有以下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \tau} = &\frac{\eta_s^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial s^2} + \frac{\eta_\ell^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial \ell^2} + (\beta_s - \lambda_s\eta_s)\frac{\partial B}{\partial s} \\ &+ \left(\frac{\eta_\ell^2}{\ell} - s\ell\right)\frac{\partial B}{\partial \ell} - (s + \ell)B, \end{aligned}$$

其中 λ_s 为价差利率的市场风险价格, 长期利率的市场风险价格由方程 (7.3.14) 给出. Schaefer 和 Schwartz (1984) 提出了以下关于 s 和 ℓ 的随机过程:

$$\begin{aligned} ds &= m(\mu - s)\,dt + \gamma\,dZ_s, \\ d\ell &= \beta_\ell(s,\ell,t)\,dt + \sigma\sqrt{\ell}\,dZ_\ell. \end{aligned}$$

证明上述债券价格方程变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \tau} = &\frac{\gamma^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial s^2} + \frac{\sigma^2\ell}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial \ell^2} + (m\mu - \lambda\gamma - ms)\frac{\partial B}{\partial s} \\ &+(\sigma^2 - \ell s)\frac{\partial B}{\partial \ell} - (s+\ell)B, \end{aligned}$$

到期日的收益函数为 $B(s,\ell,0) = 1$. 为了求出上述方程的近似解析解, 把 $\dfrac{\partial B}{\partial \ell}$ 系数中的 s 看成是常数 $\widehat{s}$, 而将债券价格写成两个函数的积, 即

$$B(s,\ell,\tau) = X(s,\tau)Y(\ell,\tau).$$

证明债券价格方程可以分裂成以下两个方程:

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\gamma^2}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + (m\mu - \lambda\gamma - ms)\frac{\partial X}{\partial s} - sX, \quad X(s,0) = 1$$

和

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2\ell}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial \ell^2} + (\sigma^2 - \ell\widehat{s})\frac{\partial Y}{\partial \ell} - \ell Y, \quad Y(\ell,0) = 1.$$

假设上面所有的参数都是常数, 求出上述两个方程中的 $X(s,\tau)$ 和 $Y(\ell,\tau)$.

7.28　考虑多因子广义 CIR 模型, 短期利率 $r(t)$ 定义为

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t),$$

其中 $X_i(t)(i = 1,\cdots,n)$ 为如下定义的互不相关的单因子 CIR 过程:

$$dX_i(t) = \alpha_i[\gamma_i - X_i(t)]dt + \rho_i\sqrt{X_i(t)}dZ_i(t).$$

证明在风险中性测度下, 债券价格函数 $B(t,T)$ 由下式给出:

$$B(t,T) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(T-t) - \sum_{i=1}^{n} b_i(T-t)X_i(t)\right),$$

其中 $\tau = T - t$,

$$a_i(\tau) = \frac{2\alpha_i\gamma_i}{\rho_i^2}\ln\left(\frac{2\theta_i e^{(\theta_i+\alpha_i)\tau/2}}{(\theta_i+\alpha_i)(e^{\theta_i\tau}-1)+2\theta_i}\right),$$

$$b_i(\tau) = \frac{2(e^{\theta_i\tau}-1)}{(\theta_i+\alpha_i)(e^{\theta_i\tau}-1)+2\theta_i},$$

$$\theta_i = \sqrt{\alpha_i^2+2\rho_i^2}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

7.29 在 Longstaff 和 Schwartz (1992) 提出的两因子的 CIR 模型中, 短期利率 $r(t)$ 定义为

$$r = \alpha x + \beta y,$$

其中 α 和 β 都为正常数, $\alpha \neq \beta$. 在风险中性测度下, 风险因子 x 和 y 由下式给出:

$$dx = (\gamma - \delta x)dt + \sqrt{x}dZ_1,$$

$$dy = (\eta - \xi y)dt + \sqrt{y}dZ_2,$$

其中 Z_1 和 Z_2 为不相关的标准布朗过程. 令 V 表示即时短期利率的方差,

(a) 证明

$$V = \alpha^2 x + \beta^2 y;$$

(b) 利用 Itô 引理, 证明 r 和 V 满足如下随机微分方程:

$$dr = \left(\alpha\gamma + \beta\eta - \frac{\beta\delta - \alpha\xi}{\beta-\alpha}r - \frac{\xi-\delta}{\beta-\alpha}V\right)dt + \alpha\sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta-\alpha)}}dZ_1 + \beta\sqrt{\frac{V-\alpha r}{\beta(\beta-\alpha)}}dZ_2,$$

$$dV = \left(\alpha^2\gamma + \beta^2\eta - \frac{\alpha\beta(\delta-\xi)}{\beta-\alpha}r - \frac{\beta\xi - \alpha\delta}{\beta-\alpha}V\right)dt + \alpha^2\sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta-\alpha)}}dZ_1 + \beta^2\sqrt{\frac{V-\alpha\gamma}{\beta(\beta-\alpha)}}dZ_2,$$

注意到 r 和 V 一起组成一个联合 Markov 过程;

(c) 证明 r 有一个长时间稳态的分布, 其中均值为

$$E[r] = \frac{\alpha\gamma}{\delta} + \frac{\beta\eta}{\xi},$$

方差为

$$\mathrm{var}(r) = \frac{\alpha^2\gamma}{2\delta^2} + \frac{\beta^2\eta}{2\xi^2};$$

类似地, 证明 V 也有一个稳态分布, 其中均值为

$$E[V] = \frac{\alpha^2\gamma}{\delta} + \frac{\beta^2\eta}{\xi},$$

方差为

$$\mathrm{var}(V) = \frac{\alpha^4\gamma}{2\delta^2} + \frac{\beta^4\eta}{2\xi^2};$$

(d) 令 $B(r,V,\tau)$ 表示单位面值期限为 τ 的零息票债券的价格函数, 证明下式成立:

$$B(r,V,\tau) = A^{2\gamma}(\tau)B^{2\eta}(\tau)\exp(\kappa\tau + C(\tau)r + D(\tau)V),$$

其中

$$\begin{aligned}
A(\tau) &= \frac{2\phi}{(\delta+\phi)(\exp(\phi\tau)-1)+2\phi},\\
B(\tau) &= \frac{2\psi}{(v+\psi)(\exp(\psi\tau)-1)+2\psi},\\
C(\tau) &= \frac{\alpha\phi(\exp(\psi\tau)-1)B(\tau) - \beta\psi(\exp(\phi\tau)-1)A(\tau)}{\phi\psi(\beta-\alpha)},\\
D(\tau) &= \frac{\psi(\exp(\phi\tau)-1)A(\tau) - \phi(\exp(\psi\tau)-1)B(\tau)}{\phi\psi(\beta-\alpha)}
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&v = \xi + \lambda, \quad \phi = \sqrt{2\alpha + \delta^2},\\
&\psi = \sqrt{2\beta + v^2}, \quad \kappa = \gamma(\delta+\phi) + \eta(v+\psi);
\end{aligned}$$

(e) 假设 $\alpha < \beta$, 证明 $V(t)$ 任意时刻 t 的价格都在区间 $(\alpha r(t), \beta r(t))$ 内.

7.30 考虑三个因子的随机波动率模型 (见方程 (7.3.17)), 假设市场风险价格 $\lambda_r, \lambda_{\overline{r}}$ 和 λ_v 都为常数. 证明债券价格函数 $B(t,T)$ 满足以下偏微分方程:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial \tau} = &\frac{\xi^2 v}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial v^2} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial \overline{r}^2} + \frac{v}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \rho\xi v\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial v}\\
&+[\alpha(\overline{r}-r) - \lambda_r\sqrt{v}]\frac{\partial B}{\partial r} + [\beta(\theta-\overline{r}) - \lambda_{\overline{r}}\eta]\frac{\partial B}{\partial \overline{r}}\\
&+[\gamma(\overline{v}-v) - \lambda_v\xi\sqrt{v}]\frac{\partial B}{\partial v} - rB, \quad \tau = T-t.
\end{aligned}$$

如果零息票债券价格函数服从以下指数仿射结构:

$$B(t,T) = a(\tau)\exp(-b(\tau)r - c(\tau)\overline{r} - d(\tau)v)$$

证明

$$b(\tau)=\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha},\quad c(\tau)=\frac{1-e^{-\alpha\tau}+\frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta\tau}(1-e^{-\beta\tau})}{\beta-\alpha},$$

$$a'(\tau)=\frac{\eta^2}{2}c(\tau)^2-\gamma\bar{v}a(\tau)^2 d(\tau)-\beta\theta\tau a(\tau)c(\tau)+\lambda_{\bar{r}}a(\tau)c(\tau),$$

$$d'(\tau)+\frac{\xi^2}{2}d(\tau)^2+\rho\xi b(\tau)d(\tau)+\gamma d(\tau)+\frac{b(\tau)^2}{2}+\lambda_r b(\tau)+\lambda_v d(\tau)=0.$$

7.31　考虑带有常数参数的广义多因子 Vasicek 模型 (Babbs and Nowman, 1999), 短期利率写成

$$r(t)=\mu-\sum_{i=1}^{I}X_i(t),$$

其中 $X_i(t)$ 为随机状态变量, 它在风险中性测度下的随机微分方程可以表示为

$$dX_i(t)=-\xi_i X_i(t)dt+c_i dW_i,$$

$dW_i dW_j=\rho_{ij}dt$, 参数 μ,ξ_i,c_i,ρ_{ij} 都为常数. 将 $dX_i(t)$ 的随机微分方程重新写成

$$dX_i(t)=-\xi_i X_i(t)\ dt+\sum_{j=1}^{J}\sigma_{ij}\ dZ_j(t),$$

其中 $Z_1,\cdots,Z_J$ 为相互独立的标准布朗过程.

(a) 证明

$$\sum_{j=1}^{J}\sigma_{ij}\sigma_{kj}=\rho_{ik}c_i c_k;$$

(b) 证明零息票债券价格 $B(t,T)$ 可以表示如下式:

$$B(t,T)=\exp\left(-\tau\left[R(\infty)-w(\tau)-\sum_{i=1}^{I}H(\xi_i\tau)X_i(t)\right]\right),$$

其中 $\tau=T-t$, $H(x)=(1-e^{-x})/x$, 并且

$$R(\infty)=\mu-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{\sigma_{ij}}{\xi_i}\right)^2,$$

$$w(\tau)=-\sum_{i=1}^{I}H(\xi_i\tau)\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{I}\frac{\sigma_{ij}\sigma_{kj}}{\xi_i\xi_k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{I}\sum_{i=1}^{I}H((\xi_i+\xi_k)\tau)\sum_{j=1}^{J}\frac{\sigma_{ij}\sigma_{kj}}{\xi_i\xi_k}.$$

7.32 考虑以下一般形式的二次期限结构模型 (Jamshidian, 1996), 短期利率定义为

$$r(t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}(t)^{\mathrm{T}}Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) + f(t),$$

其中 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为一个 m 维向量, $Q(t)$ 为一个对称矩阵, $\mathbf{g}(t)$ 为一个向量函数, 而 $f(t)$ 为一个标量函数, 所有的参数 $Q(t), \mathbf{g}(t)$ 和 $f(t)$ 都是光滑的、关于时间的确定性函数. 在风险中性测度下, 随机状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 服从如下的高斯过程:

$$d\mathbf{x} = [\boldsymbol{\alpha}(t) - \beta(t)\mathbf{x}]dt + \sigma(t)\ d\mathbf{Z},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 为光滑的确定性向量函数, $\beta(t)$ 和 $\sigma(t)$ 为光滑矩阵函数.

(a) 证明未定权益 $C(\mathbf{x}, t)$ 的价格满足如下偏微分方程:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\alpha - \beta x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x}^2}\sigma\right) - rC = 0;$$

(b) 证明期限为 T 的零息票债券的价格服从以下指数仿射结构:

$$B(T,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}(t)^{\mathrm{T}}B_T(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}_T^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{x}(t) - c_T(t)\right),$$

其中矩阵 $B_T(t)$, 向量 $\mathbf{b}_T(t)$ 和标量 $c_T(t)$ 由以下耦合常微分方程组确定:

$$\begin{aligned}
&\frac{dB_T}{dt} = \beta^{\mathrm{T}}B_T + B_T^{\mathrm{T}}\beta + B_T^{\mathrm{T}}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}B_T - Q, \quad B_T(T) = 0,\\
&\frac{d\mathbf{b}_T}{dt} - (\beta + \sigma\sigma^{\mathrm{T}}B_T)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_T + B_T^{\mathrm{T}}\alpha + \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_T(T) = \mathbf{0},\\
&\frac{dc_T}{dt} + \alpha^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_T + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma^{\mathrm{T}}B_T\sigma) - \frac{1}{2}\mathbf{b}_T^{\mathrm{T}}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_T + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_T(T) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

7.33 假设远期利率 $\widehat{F}(t,\tau)$ 定义为当前时间 t 和距到期日的时间 τ 的函数形式 (代替到期日 T), 即

$$\widehat{F}(t,\tau) = F(t, t+\tau).$$

在单因子 HJM 框架结构下有 $\sigma_{\widehat{F}}(t,\tau) = \sigma_F(t, t+\tau)$, 证明 $\widehat{F}(t,\tau)$ 在风险中性测度 Q 下的过程由下式给出 (Brace and Musiela, 1994):

$$\begin{aligned}
d\widehat{F}(t,\tau) = &\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\widehat{F}(t,\tau) + \sigma_{\widehat{F}}(t,\tau)\int_0^{\tau}\sigma_{\widehat{F}}(t,u)du\right]dt\\
&+\sigma_{\widehat{F}}(t,\tau)dZ(t).
\end{aligned}$$

7.34　在单因子 HJM 框架结构下, 证明

$$E_Q^t[r(T)] = F(t,T) + E_Q^t\left[\int_t^T \left(\sigma_F(u,T)\int_u^T \sigma_F(u,s)ds\right)du\right],$$

其中 E_Q^t 表示关于滤波 $\mathcal{F}_t$ 的风险中性测度 Q 下的条件数学期望. 解释为什么远期利率 $F(t,T)$ 是 $r(T)$ 在 Q 下的有偏估计.

7.35　继续 n 个因子的 HJM 框架结构, 证明在风险中性测度下, $r(t)$ 可以表示为 (见方程 (7.4.8b))

$$dr(t) = \frac{\partial}{\partial T}F(t,T)\bigg|_{T=t} + \sum_{i=1}^n \sigma_F^i(t,T)dZ_i(t),$$

其中 $F(t,T)$ 由方程 (7.4.7) 定义. 能给出这个结果的金融解释吗?

7.36　继续 n 个因子的 HJM 框架结构, 设远期利率 $F(t,T)$ 满足以下方程:

$$F(t,T) = F(0,T) + \int_0^t \alpha(u,T)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(u,T)\ dZ_i(u),$$

证明 $F(t,T_1)$ 与 $F(t,T_2)$ 增量的协方差为

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i(t,T_1)\sigma_i(t,T_2).$$

在 $n=1$ 的单因子模型下, 证明 $F(t,T_1)$ 和 $F(t,T_2)$ 的增量变化是完全相关的.

7.37　用方程 (7.4.7) 中 $F(t,T)$ 的解析形式, 证明零息票债券价格可以表示为

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left(-\sum_{i=1}^n\left[\int_t^T\int_0^t \alpha_F^i(u,s)\,duds + \int_t^T\int_0^t \sigma_F^i(u,s)dZ_i(u)\ ds\right]\right).$$

7.38　考虑一个由 Ho-Lee 和 Vasicek 模型组合的两因子高斯模型. 令 HJM 框架结构中的波动率如下式:

$$\sigma_F^1(t,T) = \sigma_2, \quad \sigma_F^2(t,T) = \sigma_2 e^{-k(T-t)}.$$

证明债券价格 $B(t,T)$ 满足下式 (Heath et al., 1992):

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left(-M_1(t,T) - M_2(t,T)\right)$$

$$-\sigma_1(T-t)Z_1(t)-\frac{\sigma_2}{k}[1-e^{-k(T-t)}]X_2(t)\Big),$$

其中

$$\begin{aligned}X_2(t)&=\int_0^t e^{-k(t-u)}\,dZ_2(u),\\M_1(t,T)&=\frac{\sigma_1^2}{2}tT(T-t),\\M_2(t,T)&=\frac{\sigma_2^2}{4k^3}\Big\{[1-e^{-k(T-t)}]^2(1-e^{-2kt})\\&\quad+2[1-e^{-k(T-t)}](1-e^{-kt})^2\Big\},\end{aligned}$$

并且证明到期收益率 $R(t,T)$ 是正态分布的, 其中均值 $\mu_R(t,T)$ 和方差 $\sigma_R(t,T)^2$ 分别为

$$\begin{aligned}\mu_R(t,T)&=-\frac{\ln\dfrac{B(0,T)}{B(0,t)}}{T-t}+\frac{M_1(t,T)}{T-t}+\frac{M_2(t,T)}{T-t},\\\sigma_R(t,T)^2&=\sigma_1^2t+\frac{\sigma_2^2}{2k^3}\left[\frac{1-e^{-k(T-t)}}{T-t}\right]^2(1-e^{-2kt}).\end{aligned}$$

7.39　令 $\sigma_B(t,T)$ 表示零息票债券回报波动率. 高斯期限结构模型被描述为

(i) 确定性的 $\sigma_B(t,T)$;

(ii) Markov 短期利率过程. 证明单因子 HJM 模型的具有高斯分布的充分必要条件为 (Hull and White, 1993)

$$\sigma_B(t,T)=\alpha(t)\beta(t,T),$$

其中

$$\beta(t,T)=\frac{y(T)-y(t)}{y'(t)}.$$

7.40　在单因子 Inui-Kijima 模型下 (见方程 (7.4.23)), 希望以 $r(t),\phi(t),F(0,t)$ 和其他参数函数的形式解出 $B(t,T)$. 定义

$$\beta(t,T)=\int_t^T e^{-\int_t^u k(s)ds}\,du,\quad t\leqslant T,$$

证明

$$B(t,T)=\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left(-\frac{\beta(t,T)^2}{2}\phi(t)+\beta(t,T)[F(0,t)-r(t)]\right),$$
$$0\leqslant t\leqslant T.$$

7.41　对于单因子 Inui-Kijima 模型, 假设短期利率波动率依赖于它的水平, 并且

$$k(t)F(0,t)+\frac{\partial}{\partial t}F(0,t)>0,$$

证明远期利率以概率 1 取正号.

7.42　考虑单因子扩展的 Inui-Kijima 模型. 设 $\sigma_F^i(t,T)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial T}\sigma_F^i(t,T)=-k_i(T)\sigma_F^i(t,T),$$

对于一些确定性函数 $k_i(T)$ 和初始条件

$$\sigma_F^i(t,t)=\sigma_i(r(t),t),$$

定义

$$\phi_i(r(t),t)=\int_0^t \sigma_F^i(u,t)^2\,du,$$
$$\psi_i(r(t),t))=\int_0^t \alpha_F^i(u,t)\,du+\int_0^t \sigma_F^i(u,t)\;dZ_i(u),$$

其中

$$\alpha_F^i(t,T)=\sigma_F^i(t,T)\int_t^T \sigma_F^i(t,u)\;du,$$

证明

$$\begin{aligned}dr(t)=&\left\{\frac{\partial F}{\partial t}(0,t)+\sum_{i=1}^n\left[\phi_i(t)-k_i(t)\psi_i(t)\right]\right\}dt\\&+\sum_{i=1}^n\psi_i(r(t),t)\,dZ_i(t),\\d\phi_i(t)=&\left[\sigma_F^i(t,t)^2-2k_i(t)\phi_i(t)\right]dt,\\d\psi_i(t)=&\left[\phi_i(t)-k_i(t)\psi_i(t)\right]dt+\sigma_F^i(t,t)\,dZ_i(t).\end{aligned}$$

进一步证明

(i) 能用 $r(t)$ 及 $\psi_i(t)$ 的形式表示某一个 $\psi_i(t)$, 即以下过程:

$$\{r(t),\phi_i(t),\psi_i(t),i=1,2,\cdots,n\}$$

形成一个 $2n$ 维的 Markov 系统;

(ii) $r(t)$ 是均值回归的.

7.43　设 $L(t,T)$ 表示 t 时刻在区间 $(T,T+\delta]$ 上的 LIBOR 过程 $L_t(T,T+\delta]$, $\sigma_L^i(t,T)$ 是它的波动率函数的第 i 个分量 (见方程 (7.4.26)). 由下面的关系式:

$$\sigma_B^i(t, T+\delta) - \sigma_B^i(t, T) = \frac{\delta L(t, T)}{1+\delta L(t, T)} \sigma_L^i(t, T)$$

以及性质

$$\sigma_B^i(t, t) = \sigma_L^i(t, t) = 0,$$

可以得到

$$\sigma_B^i(t, t+\delta) = 0.$$

如果加上条件

$$\sigma_B^i(t, T) = 0, \quad T \in (t, t+\delta),$$

证明

$$\sigma_B^i(t, T) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta L(t, T-k\delta)}{1+\delta L(t, T-k\delta)} \sigma_L^i(t, T-k\delta),$$

其中 k 为小于或等于 $(T-t)/\delta$ 的最大整数.

第 8 章　利率衍生产品：债券期权、LIBOR 及互换产品

本章介绍一些交易频繁的利率衍生产品的定价模型，如债券期权、区间型债券、利率上限、互换和互换期权等. 在过去的几十年里，市场上出现了许多新型利率衍生产品，以满足机构和散户投资者的特定需求. 对这些新型衍生产品的交易者而言，他们一直在寻求更有效和更强健的定价及对冲过程. 与股票和汇率衍生产品相比，利率衍生产品的定价和对冲更具有挑战性，这是因为大多数利率衍生产品的收益函数都依赖于多个时间点的利率值，于是有必要建立一个动态模型，以刻画整个收益率曲线的随机演化. 另外，短期利率的波动率与长期利率的波动率很有可能会有所不同. 关于如何利用利率衍生产品的市场价格来有效地校正动态模型中的参数这一工作，目前仍属于活跃的研究课题.

在随机利率条件下对股票衍生产品定价时，需要给出标的资产价格和利率的联立动态模型. 在这些定价模型中，利率只是用来贴现现金流，运用远期测度，可以从资产价格与利率的联立演化中消除贴现的效果. 风险中性测度使用市场货币账户作为计价单位，而远期测度使用债券价格作为计价单位是与之等价的鞅测度. 8.1 节将说明在随机利率下，如何运用远期测度对股票期权定价，也分析了短期利率和 LIBOR 过程在远期测度下的期望及其背后的金融意义.

8.2 节将对债券期权和区间型债券这两类最受欢迎的、对利率敏感的衍生产品进行定价分析. 一个 T 时刻到期的债券期权，标的资产为 T' 时刻到期的债券，其中 $T' > T$. 对于区间型债券，购买者的获利与参考利率落在预设区间内的时间长短成比例. 当标的利率服从高斯 HJM 模型或者仿射期限结构模型时，以上两种产品的定价模型呈现出非常好的解析性. 还阐明了怎样运用各种计价单位转换技巧对这些新型利率产品进行有效定价.

利率上限元是一个 LIBOR 的看涨期权，它是场外交易中最受欢迎的 LIBOR 衍生产品之一. 利率上限对持有者提供了保护，避免了 LIBOR 在一系列预设时间点上高于某个预设的利率水平 —— 上限利率而给投资者带来损失. 因此，一个利率上限可以看成是利率上限元的一个投资组合. 8.3 节说明在高斯 HJM 模型下怎么推导上限元的定价公式，此模型假设对所有预设时间点上的远期利率都运用同一个风险中性测度. 不幸的是，利率上限价格的解析形式非常繁冗，这使得用市场隐含波动率去校正高斯 HJM 模型中的波动率的工作非常麻烦. 利率上限元定价的市场

惯例是假设远期 LIBOR 过程服从一个对数正态分布. 在此假设下, 对远期 LIBOR 运用 Black 公式可以得到上限元的定价. 这样, 市场隐含波动率与上限元 Black 价格公式中的波动率就直接联系起来了. HJM 模型是基于即时远期利率 (不能直接观察得到) 的, 而在 8.3 节中介绍的市场 LIBOR 模型是基于市场利率 (LIBOR) 的. 对于每个远期 LIBOR 过程, 对数正态 LIBOR 模型都为其指定了一个相应的由远期利率的到期日确定的远期测度. 在对数正态 LIBOR 模型框架下, 可以严格地推导上限元定价的 Black 公式.

最后一节是关于互换、互换期权和交叉货币互换产品. 因为互换的付款可以看成是一个贴现债券的投资组合, 所以互换利率和贴现利率是紧密相关的. 可以证明, 远期互换的价值与现行互换利率和固定互换利率之间的差额是成比例的, 比例因子就是一个贴现债券投资组合 (俗称为年金计价单位) 的价值. 使用年金作为计价单位可以定义互换测度. 建立了对数正态互换利率模型, 它假设远期互换利率过程在互换测度下是一个对数正态鞅. 在此模型下, 运用 Black 公式可以得到互换期权的定价, 运用冻结权数近似法可以将远期互换利率的波动率同债券价格波动率联系起来. 还说明了如何在对数正态 LIBOR 模型下找到互换期权价格的近似解析解. 最后, 讨论交叉货币互换产品的定价与对冲. 将对数正态市场模型扩展到两种货币的情形. 赋予本国和外国利率市场对数鞅性质, 那么某一特定到期日的远期汇率必然具有对数正态分布性质. 或者, 可以指定某一种货币世界内的市场利率为对数鞅, 并且假设在相应的远期测度下, 不同到期日的汇率均服从对数正态分布. 说明了如何运用两种货币市场模型求得 (交叉货币) 差分互换的定价. 差分互换具有汇率、利率以及两者相关性的风险. 最后还讨论了如何建立交叉货币互换产品的对冲策略.

8.1　远期测度及远期价格

在随机利率的假设下, 即标的资产价格与随机利率过程有关, 下面来考察欧式衍生产品的价格. 如果选择适当定价鞅测度, 则可以很方便地求出随机利率下 T 时刻到期的衍生产品的价格公式. 这个新的定价测度通常被叫做 T 远期测度, 它使用债券价格 $B(t,T)$ 作为计价单位, 是一个等价的鞅测度. 在 T 远期测度 Q_T 下, 远期合约的远期价格是其价值在到期日 T 的期望值, 即远期价格是 Q_T 鞅. 另外, 用来描述即时和离散远期利率动态过程的随机微分方程在 Q_T 下也有很好的解析性. 推导实现测度变换 —— 从风险中性测度 Q 到这个 T 远期测度 Q_T 的 Radon-Nikodym 导数, 得到了在随机利率的高斯 HJM 模型下欧式期权的闭合解. 有趣的是, 注意到场内交易的期货都是逐日盯市的, 从而期货的价格也是 Q 鞅. 在相同的标的资产和相同的随机利率过程下考虑远期和期货的价格差, 得到远期和期货价格

相同的条件. 最后, 找到了一个适当的远期测度, 在这个测度下, 远期 LIBOR 过程是一个鞅.

8.1.1 远期测度

首先, 假设存在一个风险中性测度 Q, 在此测度下, 贴现价格为 Q 鞅, 即无套利机会. 记 $f(X_T)$ 为 T 时刻衍生产品的收益函数, 其中随机变量 X_t 为标的资产价格过程. 根据风险中性定价原理, 欧式衍生产品在 $t(t < T)$ 时刻的价值由下式给出:

$$V_t = E_Q^t[e^{-\int_t^T r_u\,du} f(X_T)], \tag{8.1.1}$$

其中 E_Q^t 为测度 Q 下关于滤波 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望; Q 为用货币市场账户 $M(t)$ 作为计价单位的测度. 要计算上面的期望, 只需找到 r_t 和 X_t 这两个随机变量在测度 Q 下的联合分布. 在接下来的期望计算中, 不仅需寻找非常烦琐的联合分布, 还必须计算二重积分.

在 3.2 节中, 已经解释过在风险中性定价框架下, 计价单位并不只有货币市场账户这一个选择. 此时, 使用债券价格 $B(t,T)$ 作为计价单位更为方便. 由此得到的等价测度记作 Q_T, 在此测度下, 所有的证券价格用 $B(t,T)$ 正规化后是 Q_T 鞅. 注意到 $B(T,T) = 1$, 运用风险中性定价原理, t 时刻的价格 X_t 同 T 时刻的价格 X_T 有如下关系:

$$\frac{X_t}{B(t,T)} = E_{Q_T}^t[X_T], \quad t < T, \tag{8.1.2a}$$

其中 $E_{Q_T}^t$ 为测度 Q_T 下关于滤波 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望. 利用 $B(T,T) = 1$ 的性质可以消除贴现过程的相关性, 从而不需要贴现过程和资产价格过程的联合分布. 回忆一下, $X_t/B(t,T)$ 是到期日为 T 的 X_T 的远期合约在 t 时刻的远期价格, 所以 Q_T 被称为 ***T* 远期测度** (T-forward measure). 这个术语也正体现了远期价格是 X_T 在此测度下的期望. 令 F_t 是它在 t 时刻的远期价格, 注意到 $F_T = X_T$, 因此,

$$F_t = E_{Q_T}^t[F_T], \tag{8.1.2b}$$

也就是说, 远期价格在 Q_T 下是一个鞅.

1. 远期测度下未来短期利率的期望

期望假设要求即时远期利率 $F(t,T)$ 是未来短期利率 r_T 的无偏估计. 实际上, 这个假设在远期测度下是正确的 (但在实际的概率测度下却并非如此). 为了证明这个结果, 注意到

$$
\begin{aligned}
B(t,T)E^t_{Q_T}[r_T] &= E^t_Q\left[e^{-\int_t^T r_u\,du} r_T\right]\\
&= E^t_Q\left[-\frac{\partial}{\partial T}e^{-\int_t^T r_u\,du}\right]\\
&= -\frac{\partial}{\partial T}\left\{E^t_Q\left[e^{-\int_t^T r_u\,du}\right]\right\}\\
&= -\frac{\partial B}{\partial T}(t,T),
\end{aligned}
$$

因此,

$$
E^t_{Q_T}[r_T] = -\frac{1}{B(t,T)}\frac{\partial B}{\partial T}(t,T) = F(t,T). \tag{8.1.3}
$$

2. 从 Q 到 Q_T 的测度变换

下面来说明怎么从风险中性测度 Q 变换到 T 远期测度 Q_T. 假设在 Q 下 T 时刻到期的贴现债券价格过程为

$$
\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r(t)\,dt - \sigma_B(t,T)\,dZ(t), \tag{8.1.4}
$$

其中 $Z(t)$ 为 Q 布朗运动. 对上述方程积分. 注意到 $\frac{M(t)}{M(0)} = \exp\left(\int_0^t r(u)\,du\right)$, 于是有

$$
\frac{B(t,T)}{M(t)} = \frac{B(0,T)}{M(0)}\exp\left(-\int_0^t \sigma_B(u,T)\,dZ(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_B(u,T)^2\,du\right).
$$

在 $\mathcal{F}_T$ 条件下, Radon-Nikodym 导数 $\frac{dQ_T}{dQ}$ 为 (见式 (3.2.4))

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_T}{dQ} &= \frac{B(T,T)}{B(0,T)}\bigg/\frac{M(T)}{M(0)}\\
&= \exp\left(-\int_0^T \sigma_B(u,T)\,dZ(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_B(u,T)^2\,du\right).
\end{aligned} \tag{8.1.5}
$$

对固定的 T, 定义

$$
\xi_t^T = E_Q\left[\frac{dQ_T}{dQ}\bigg|\mathcal{F}_t\right], \tag{8.1.6}
$$

因为 $M(0)=1$, $B(0,T)$ 在 0 时刻是已知的, 所以有

$$
\begin{aligned}
\xi_t^T &= \frac{1}{B(0,T)}E_Q\left[\frac{B(T,T)}{M(T)}\bigg|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B(t,T)}{B(0,T)M(t)}\\
&= \exp\left(-\int_0^t \sigma_B(u,T)\,dZ(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_B(u,T)^2\,du\right).
\end{aligned} \tag{8.1.7}
$$

由 Girsanov 定理和式 (8.1.7) 的结果, 可以推断

$$Z^T(t) = Z(t) + \int_0^t \sigma_B(u, T)\, du \tag{8.1.8}$$

是 Q_T 布朗运动.

作为例子, 考虑 Vasicek 模型, 短期利率由以下方程决定:

$$dr(t) = \alpha[\gamma - r(t)]\, dt + \rho\, dZ(t),$$

其中 $Z(t)$ 为 Q 布朗运动. 对应的贴现债券的波动率为

$$\sigma_B(t, T) = \frac{\rho}{\alpha}[1 - e^{-\alpha(T-t)}].$$

在 T 远期测度 Q_T 下, $r(t)$ 服从

$$dr(t) = \alpha\left\{\gamma - \frac{\rho^2}{\alpha^2}[1 - e^{-\alpha(T-t)}] - r(t)\right\} dt + \rho\, dZ^T(t), \tag{8.1.9}$$

其中 $Z^T(t)$ 如式 (8.1.8) 定义, 为 Q_T 布朗运动. 对式 (8.1.9) 积分得到

$$\begin{aligned} r(t) = & r(s)e^{-\alpha(t-s)} + \left(\gamma - \frac{\rho^2}{\alpha^2}\right)[1 - e^{-\alpha(t-s)}] \\ & + \frac{\rho^2}{2\alpha^2}\left[e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T+t-2s)}\right] + \rho\int_s^t e^{-\alpha(t-u)}\, dZ^T(u). \end{aligned} \tag{8.1.10}$$

在测度 Q_T 下, $r(t)$ 关于条件 $\mathcal{F}_s$ 是正态分布, 均值和方差分别为

$$\begin{aligned} E_{Q_T}\left[r(t)\middle|\mathcal{F}_s\right] = & r(s)e^{-\alpha(t-s)} + \left(\gamma - \frac{\rho^2}{\alpha^2}\right)\left[1 - e^{-\alpha(t-s)}\right] \\ & + \frac{\rho^2}{2\alpha^2}\left[e^{-\alpha(T-t)} - e^{-\alpha(T+t-2s)}\right], \end{aligned} \tag{8.1.11a}$$

$$\operatorname{var}_{Q_T}\left(r(t)\middle|\mathcal{F}_s\right) = \frac{\rho^2}{2\alpha}[1 - e^{2\alpha(t-s)}], \quad s \leqslant t \leqslant T. \tag{8.1.11b}$$

8.1.2 随机利率下股票期权的定价

下面来寻找随机利率环境下到期日为 T 的欧式看涨期权的价格公式. 记 S_t 是资产价格过程, $F_t = S_t/B(t,T)$ 是它的远期价格. 设 S_t 和 $B(t,T)$ 在风险中性测度 Q 下适合

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t\, dt + \sum_{i=1}^m \sigma_S^i(t)\, dZ_i(t), \tag{8.1.12a}$$

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t\, dt - \sum_{i=1}^m \sigma_B^i(t,T)\, dZ_i(t), \tag{8.1.12b}$$

其中 $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \cdots, Z_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为一个 m 维的标准 Q 布朗运动, 波动率 $\sigma_S^i(t)$ 和 $\sigma_B^i(t,T)$ $(i = 1, \cdots, m)$ 已知. 当资产价格和债券价格过程适合以上高斯框架时, 处理起来比较方便. 利用 Itô 引理, 在 Q 下, F_t 的动态过程可如下计算:

$$
\begin{aligned}
dF_t &= \frac{dS_t}{B(t,T)} - \frac{S_t}{B(t,T)^2}\,dB(t,T) - \frac{dS_t\,dB(t,T)}{B(t,T)^2} + \frac{S_t}{B(t,T)^3}(dB(t,T))^2 \\
&= \frac{S_t}{B(t,T)}\left\{\left[r_t\,dt + \sum_{i=1}^m \sigma_S^i(t)\,dZ_i(t)\right]\left[r_t\,dt - \sum_{i=1}^m \sigma_B^i(t,T)\,dZ_i(t)\right]\right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^m \sigma_S^i(t)\sigma_B^i(t,T)\,dt + \sum_{i=1}^m \sigma_B^i(t,T)^2\,dt\right\} \\
&= F_t\left\{\sum_{i=1}^m \left[\sigma_S^i(t) + \sigma_B^i(t,T)\right]\left[dZ_i(t) + \sigma_B^i(t,T)\,dt\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

其次, 定义

$$
Z_i^T(t) = Z_i(t) + \int_0^t \sigma_B^i(u,T)\,du, \quad i = 1, \cdots, m,
$$

其中 $\mathbf{Z}(t) = (Z_1^T(t), \cdots, Z_m^T(t))^{\mathrm{T}}$ 为 T 远期测度 Q_T 下的 m 维布朗过程. 则 F_t 的动态过程可以表示为

$$
\frac{dF_t}{F_t} = \sum_{i=1}^m \left[\sigma_S^i(t) + \sigma_B^i(t,T)\right]\,dZ_i^T(t), \tag{8.1.13}
$$

这保证了 F_t 是一个 Q_T 鞅.

总之, 在 F_t 条件下, 远期价格 F_T 的概率密度服从测度 Q 下的对数正态分布, 其均值为

$$
\overline{\mu}_F = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sum_{i=1}^m \sigma_B^i(u,T)\left[\sigma_S^i(u) + \sigma_B^i(u,T)\right]\,du, \tag{8.1.14a}
$$

波动率 $\overline{\sigma}_F$ 满足

$$
\overline{\sigma}_F^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sum_{i=1}^m \left[\sigma_S^i(u) + \sigma_B^i(u,T)\right]^2\,du. \tag{8.1.14b}
$$

当概率测度从 Q 变换到 Q_T 时, F_T 的对数正态分布均值为零, 波动率如上.

在远期测度 Q_T 下, 注意到 $F_T = S_T$, 由此可得欧式看涨期权在 t 时刻的价值为

$$
c(S,t) = B(t,T)E_{Q_T}[\max(F_T - X, 0)|S_t = S], \tag{8.1.15}
$$

其中 X 为敲定价格. 令 $F_t = F$, 其中 $F = S/B(t,T)$, F_T 为时间段 $(t,T]$ 内波动率为 $\overline{\sigma}_F$ 的对数正态分布, 则有

$$c(S,t) = B(t,T)[FN(d_1) - XN(d_2)], \tag{8.1.16}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\dfrac{F}{X} + \dfrac{\overline{\sigma}_F^2}{2}(T-t)}{\overline{\sigma}_F\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \overline{\sigma}_F\sqrt{T-t}.$$

以上看涨的价值表达式依赖于远期价格, 这个解析式通常叫做 **Black 公式** (Black formula). 若使用远期价格作为标的变量, 则可以更快地求得价格的解析解. 在看涨期权价格公式中, 对随机利率的依赖体现在贴现因子 $B(t,T)$ 和远期价格的波动率 $\overline{\sigma}_F$ 两个方面.

8.1.3 期货和期货–远期价差

考虑一份到期日为 T 且标的资产价格为 S_t 的期货合约. 记 f_t 为期货的价格, 结算日为 t_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 其中当前时刻 t 为 t_0, 到期日 T 为 t_n. 每个结算日的现金流贴现后的总和为

$$\sum_{i=1}^{n} e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u)\,du}(f_{t_i} - f_{t_{i-1}}).$$

期货在 t 时刻的价值就是以上现金流在风险中性测度 Q 下的期望值. 注意到期货在 t 时刻的价值为零, 所以有

$$E_Q^t\left[\sum_{i=1}^{n} e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u)\,du}(f_{t_i} - f_{t_{i-1}})\right] = 0, \tag{8.1.17}$$

其中 E_Q^t 表示在测度 Q 下关于滤波 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望. 令 $\max\limits_i(t_i - t_{i-1})$ 趋于 0, 考察式 (8.1.17) 的连续极限. 定义贴现因子 D_s 为

$$D_s = e^{-\int_0^s r(u)\,du},$$

式 (8.1.17) 的连续极限变为

$$E_Q^t\left[\int_t^T D_s\,df_s\right] = 0.$$

由于 $r(t)$ 为正且有界, 所以有

$$\lim_{\delta t\to 0} E_Q^t\left[\int_t^{t+\delta t} D_s\,df_s\right] = D_t E_Q^t[df_t] = 0.$$

因此, 随机微分 df_t 的漂移为 0. 由此推断 f_t 是一个 Q 鞅. 又因为 $f_T = S_T$, 所以期货的价格为

$$f_t = E_Q^t[f_T] = E_Q^t[S_T]. \tag{8.1.18}$$

在 7.1.4 小节中, 已经证明了当利率为常数时, 期货价格同远期价格是相等的. 但是, 在随机利率环境下, 期货–远期价差可以表示为

$$\begin{aligned} f_t - F_t &= E_Q^t[S_T] - \frac{S_t}{B(t,T)} \\ &= \frac{E_Q^t[S_T]E_Q^t\left[e^{-\int_t^T r(u)\,du}\right] - E_Q^t\left[e^{-\int_t^T r(u)\,du}S_T\right]}{B(t,T)} \\ &= -\frac{\mathrm{cov}_Q^t\left[e^{-\int_t^T r(u)\,du}, S_T\right]}{B(t,T)}. \end{aligned} \tag{8.1.19}$$

因此, 当贴现过程同价格过程不相关时, 价差为 0.

假设在 Q 下, S_t 和 $B(t,T)$ 服从式 (8.1.12a), (8.1.12b), 因为期货和远期在到期日 T 时的价格相等, 所以由式 (8.1.18) 有

$$f_t = E_Q^t[F_T] = F_t e^{\overline{\mu}_F(T-t)}, \tag{8.1.20}$$

其中 $\overline{\mu}_F$ 由式 (8.1.14a) 给出.

远期 LIBOR

定义 t 时刻未来时间段 $(T, T+\delta]$ 内的远期 LIBOR $L_t[T, T+\delta]$ 为

$$L_t[T, T+\delta] = \frac{1}{\alpha}\frac{B(t,T) - B(t,T+\delta)}{B(t,T+\delta)}, \quad t \leqslant T, \tag{8.1.21}$$

其中 α 为时间段 $(T, T+\delta]$ 内的换算因子. 考察 $\frac{1}{\alpha}[B(t,T) - B(t,T+\delta)]$, 这可以看成是两个债券的价差组合, 从而可视为一个可交易的资产. 如果用 $T+\delta$ 到期的债券作为计价单位, 就用 $B(t,T+\delta)$ 将这个可交易的资产正规化. 正规化后的资产就是 $L(t,T)$, 并且在 $T+\delta$ 测度 $Q_{T+\delta}$ 下它是一个鞅.

考虑标准的 LIBOR 付款过程, 在 T 时刻观察 LIBOR, 在终点 $T+\delta$ 时刻付款为 αL_T. 运用 $Q_{T+\delta}$ 鞅的性质, LIBOR 付款在 t 时刻的价值为

$$V_L(t) = B(t,T+\delta)E_{Q_{T+\delta}}^t[\alpha L_T] = B(t,T) - B(t,T+\delta). \tag{8.1.22}$$

令 $\mathbf{Z}^{T+\delta}(t) = \left(Z_1^{T+\delta}(t), \cdots, Z_m^{T+\delta}(t)\right)^{\mathrm{T}}$ 为 $Q_{T+\delta}$ 下的 m 维布朗过程. 因为 $L_t[T, T+\delta]$ 在 $Q_{T+\delta}$ 下是一个鞅, 所以在 $Q_{T+\delta}$ 下, L_t 的动态过程服从

$$dL_t = L_t\sum_{i=1}^m \sigma_L^i(t)\,dZ_i^{T+\delta}(t), \tag{8.1.23}$$

其中 $\sigma_L^i(t)$ 为远期 LIBOR 过程的第 i 个波动率. 作从 $Q_{T+\delta}$ 到 Q 的测度变换, 这相当于推导在 Q 下 L_t 的动态过程. 如下定义 $Z_i(t)$:

$$Z_i^{T+\delta}(t) = Z_i(t) + \int_0^t \sigma_B^i(u, T+\delta)\, du, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

则 $(Z_1(t), \cdots, Z_m(t))^{\mathrm{T}}$ 在风险中性测度 Q 下是一个 m 维的布朗过程 (见式 (8.1.13)). 在 Q 下, L_t 服从

$$dL_t = L_t \left[\sum_{i=1}^m \sigma_B^i(u, T+\delta)\sigma_L^i(t) \right] dt + L_t \sum_{i=1}^m \sigma_L^i(t)\, dZ_i(t), \tag{8.1.24}$$

这与 7.4.3 小节中得到的结果是相符的 (见式 (7.4.26)).

8.2 债券期权及区间型债券

本节将举例说明“计价单位转换”技巧在债券期权及区间型债券定价中的广泛用途. 在 8.2.1 小节中, 考虑一个到期日为 T 且标的为 T' 到期债券的欧式期权的定价, 其中 $T' > T$. 标的债券可以为零息债券或者附息债券. 在债券期权定价初期, 人们假设债券价格服从对数正态分布, 运用 Black-Scholes 定价框架为债券期权定价. 然而, 债券价格随到期期限越短价格变化越小的性质表明, 债券的瞬时回报率在越接近债券到期日时波动越小, 这一特性与股票价格的变化过程是不同的. 由于债券价格依赖于利率的变化, 所以更为合理的定价方法应该是将债券价格的变化与利率期限结构的变化联系起来.

区间型债券是结构化产品, 适合那些认为利率会落在一个特定区间的投资者. 这类债券在预设时间期末会向持有者支付利息, 利息总额等于预设的参考利率 (通常是 LIBOR) 乘以参考利率落在区间内的天数. 例如, 一份浮动区间型债券的息票率范围可以是 3 月期 LIBOR 加或减 200 个基点. 如果利率落在一定的范围内, 则这类区间型产品为投资者提供了一个放弃波动率以获得高收益的机会. 它们用来反映投资者与远期利率曲线有异的看法, 因此, 如果投资者认为实际利率与预估的远期利率曲线不同, 那么他们拥有套利机会. 将在 8.2.2 小节中介绍多因子高斯 HJM 模型下区间型债券的定价.

8.2.1 贴现债券期权及附息债券期权

当标的债券不付息时, 假设利率适合高斯 Heath-Jarrow-Morton (HJM) 模型或者仿射期限结构模型, 很容易得到欧式债券期权的价格公式. 当债券在 T 和 T' 之间离散地付息时, 假设短期利率是马尔可夫过程, 利用一种分解技巧来推导期权的价格公式. 然而在一般的多因子期限结构模型下, 这种分解技巧就不适用了, 但仍可以得到欧式附息债券期权价格的近似解析解.

1. 高斯 HJM 模型下的贴现债券期权

由于高斯 HJM 模型的良好解析性, 所以很容易求得到期日为 T 且标的为 $T'(T' > T)$ 到期的贴现债券的欧式看涨期权的定价公式. 利用高斯 HJM 公式, 在风险中性测度 Q 下, 远期利率 $F(t,T)$ 的随机过程为

$$dF(t,T') = \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_F^i(t,T') \int_t^{T'} \sigma_F^i(t,u)\,du\right) dt + \sum_{i=1}^{m} \sigma_F^i(t,T')\,dZ_i(t), \tag{8.2.1}$$

其中向量波动率 $\sigma_F(t,T') = (\sigma_F^1(t,T'),\cdots,\sigma_F^m(t,T'))^T$ 为确定的向量值函数, $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t),\cdots,Z_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为 m 维 Q 布朗过程. 债券价格 $B(t,T')$ 在 Q 下服从 (见 7.4.1 小节)

$$\frac{dB(t,T')}{B(t,T')} = r(t)\,dt - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_t^{T'} \sigma_B^i(t,u)\,du\right) dZ_i(t), \tag{8.2.2}$$

其中 $\sigma_F^i(t,T) = \dfrac{\partial \sigma_B^i}{\partial T}(t,T)$. 定义 $F^B(t;T,T') = B(t,T')/B(t,T)$, 它是到期日为 T 的远期关于 T' 到期债券的价格. 用 $B(t,T)$ 作为计价单位来定义 T 远期测度, $B(t,T)$ 的随机过程类似于式 (8.1.12b) 的定义. 利用式 (8.1.13), 在 T 远期测度 Q_T 下的 $F^B(t)$ 随机过程可以表示为

$$\begin{aligned}\frac{dF^B(t)}{F^B(t)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_t^{T} \sigma_B^i(t,u)\,du - \int_t^{T'} \sigma_B^i(t,u)\,du\right) dZ_i^T(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(-\int_T^{T'} \sigma_B^i(t,u)\,du\right) dZ_i^T(t),\end{aligned} \tag{8.2.3}$$

其中 $\mathbf{Z}^T(t) = (Z_1^T(t),\cdots,Z_m^T(t))^{\mathrm{T}}$ 为一个 m 维的 Q_T 布朗过程, 并且

$$dZ_i^T(t) = dZ_i(t) + \int_t^T \sigma_B^i(t,u)\,du, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

在 Q_T 下, F_t^B 服从漂移为 0 的对数正态分布, 并且

$$\begin{aligned}B(T,T') =& F^B(T;T,T') \\ =& F^B(t;\ T,T') \exp\left(-\int_t^T \int_T^{T'} \sum_{i=1}^{m} \sigma_B^i(s,u)\,du\,dZ_i^T(s)\right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\int_t^T \int_T^{T'} \sum_{i=1}^{m} \sigma_B^i(s,u)^2\,du\,ds\right).\end{aligned} \tag{8.2.4}$$

时间段 (t,T) 内的方差为

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}^2(t,T)(T-t) &= \mathrm{var}_T(\ln B(T,T')|\mathcal{F}_t)\\ &= \int_t^T \int_T^{T'} \sum_{i=1}^m \sigma_B^i(s,u)^2\,du\,ds.\end{aligned} \tag{8.2.5}$$

欧式看涨债券期权的价值为

$$\begin{aligned}c(t;T,T') &= B(t,T)E_{Q_T}^t[\max(F^B(T;T,T')-X,0)]\\ &= B(t,T)[F^B(t,T,T')N(d_1)-XN(d_2)]\\ &= B(t,T')N(d_1)-B(t,T)XN(d_2),\end{aligned} \tag{8.2.6}$$

其中 X 为敲定价格,

$$d_1 = \frac{\ln \dfrac{B(t,T)}{B(t,T')X} + \dfrac{1}{2}\overline{\sigma}^2(t,T)(T-t)}{\overline{\sigma}(t,T)\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \overline{\sigma}(t,T)\sqrt{T-t}.$$

2. 仿射期限结构模型下的债券期权

类似地, 假设利率服从仿射期限结构模型, 也可以推导欧式贴现债券期权的价格公式. 债券期权价格可以用 T 远期测度 Q_T 和 T' 远期测度 $Q_{T'}$ 下的期权到期日在 T 时债券价格的条件分布来表示. 假设在仿射期限结构模型下, T' 到期的债券价格为

$$B(t,T') = \exp(a(\tau')+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\tau')\mathbf{Y}(t)), \quad \tau' = T'-t, \tag{8.2.7}$$

其中 $\mathbf{Y}(t)$ 为 m 维随机向量, $a(\tau')$ 和 $\mathbf{b}(\tau')$ 为参数 (见式 (7.3.19)). X 为看涨债券期权的敲定价格. 记 $Q_T[B(T,T')>X]$ 是 T 远期测度下事件 $\{B(T,T')>X\}$ 的条件概率, 类似地, 在 T' 远期测度下定义 $Q_{T'}[B(T,T')>X]$. 欧式看涨债券期权的价值可以表示为

$$\begin{aligned}&c(t;T,T')\\ &= E_Q^t\left[e^{-\int_t^T r(u)\,du}\max(B(T,T')-X,0)\right]\\ &= B(t,T)\left\{E_{Q_T}^t\left[B(T,T')\mathbf{1}_{\{B(T,T')>X\}}\right] - XE_{Q_T}\left[\mathbf{1}_{\{B(T,T')>X\}}\right]\right\}\\ &= B(t,T')Q_{T'}[B(T,T')>X] - XB(t,T)Q_T[B(T,T')>X].\end{aligned} \tag{8.2.8}$$

因为 $\{B(T,T')>X\}$ 等价于

$$\{a(\tau')+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\tau')\mathbf{Y}(t) > \ln X\},$$

所以若给定仿射扩散过程在两个远期测度下的条件分布, 则以上的远期概率就可以计算出来. 例如, 以上公式可以用来推导欧式看涨债券期权定价在一般的 CIR 模型下的价格公式 (Maghsoodi, 1996).

3. 附息债券期权

考虑一个 T 时刻到期的债券期权, 其标的为在时刻 $T_i(i=1,2,\cdots,n)$ 支付现金 A_i 的附息债券, 其中 $T\leqslant T_1\leqslant\cdots\leqslant T_n=T'$. 现金流包括 $T_1,\cdots,T_{n-1}$ 时刻支付的票息以及 T' 时刻支付的最后一个票息及票面价值的总和. 假设贴现债券价格是一个服从马尔可夫过程的短期利率的函数, Jamshidian (1989) 证明了一个附息债券期权可以分解成债券期权的一个投资组合.

给定 $r(t)=r$, 附息债券 B_c 在时刻 t 的价值为

$$B_c(r,t;T')=\sum_{i=1}^{n}A_iB(r,t;T_i), \tag{8.2.9}$$

其中 $B(r,t;T_i)$ 为单位面值 T_i 到期的贴现债券的价值. 考虑一个敲定价为 X 的欧式看涨债券期权, 因为所有贴现债券的价值都是 r 的递减函数, 所以当期权到期日 T 时的短期利率小于某个临界值 r^* 时, 应当实施看涨期权, 其中 r^* 满足

$$\sum_{i=1}^{n}A_iB(r^*,T;T_i)=X. \tag{8.2.10}$$

为方便起见, 令

$$X_i=B(r^*,T;T_i),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

可以看出, 当 $r<r^*$ 时有

$$\sum_{i=1}^{n}A_iB(r,T;T_i)>X,\quad B(r,T;T_i)>X_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

当 $r>r^*$ 时, 以上不等式全部取反向, 从而有

$$\max\left(\sum_{i=1}^{n}A_iB(r,T;T_i)-X,0\right)=\sum_{i=1}^{n}A_i\max(B(r,T;T_i)-X_i,0).$$

于是看涨债券期权的价格为

$$\begin{aligned}c(t;T,T')&=E_Q^t\left[e^{-\int_t^T r(u)\,du}\max\left(\sum_{i=1}^{n}A_iB(r,t;T_i)-X,0\right)\right]\\&=A_i\sum_{i=1}^{n}E_Q^t\left[e^{-\int_t^T r(u)\,du}\max(B(r,t;T_i)-X_i,0)\right].\end{aligned} \tag{8.2.11}$$

因为式 (8.2.11) 中的第 i 项可以看成是标的为 T_i 到期的贴现债券, 敲定价为 X_i 的看涨期权, 所以附息债券的看涨期权可以分解成一个看涨贴现债券期权的投资组合. 每一个成员期权都有相同的到期日 T, 对应的敲定价格可以通过合理分配原始的敲定价格 X 得到,

$$X = \sum_{i=1}^{n} A_i X_i.$$

只有当所有的贴现债券价格都只依赖于同一个随机变量 —— 马尔可夫短期利率时，才可以进行上面的分解. 如果债券价格不仅依赖于 $r(t)$, 而且还依赖于利率的路径，那么就无法求解 r^*. 对非马尔可夫短期利率的附息债券期权的定价问题，Barber (2005) 提出了一种近似方法来.

当利率期限结构中的随机变量不止一个时, Jamshidian 分解技巧就不适用. 考虑用两种解析近似方法来解决多因子模型下的附息债券期权的定价问题，它们是随机久期方法 (Wei, 1997; Munk, 1999) 以及仿射近似方法 (Singleton and Umantsev, 2002)

4. 随机久期方法

久期一般用来度量债券价格的百分比变化对收益率变化的敏感程度，定义式为 $-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial R}$, 其中 R 为债券的收益率. 只有当收益率曲线平坦且同向移动时，这种久期度量才有效果. 当利率随机时，更好的风险度量定义为 $-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial r}$. 前面提到一个附息债券可以看成是一个价值为 $B_c(r,t) = \sum_{i=1}^{n} A_i B(r,t;T_i)$ 的债券组合. 定义组合权重为 $w_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,

$$w_i(r,t) = \frac{A_i B(r,t;T_i)}{\sum_{i=1}^{n} A_i B(r,t;T_i)},$$

它们依赖于 r 和 t, 从而

$$\begin{aligned} -\frac{1}{B_c}\frac{\partial B_c}{\partial r} &= -\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial B}{\partial r}(r,t;T_i)}{\sum_{i=1}^{n} A_i B(r,t;T_i)} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} w_i(r,t)\left[\frac{1}{B(r,t;T_i)}\frac{\partial B}{\partial r}(r,t;T_i)\right]. \end{aligned} \tag{8.2.12}$$

随机久期 D 使用一个到期期限为 D 的替代贴现债券来定义. 替代债券的风险度量由 $-\frac{1}{B(r,t;t+D)}\frac{\partial B}{\partial r}(r,t;t+D)$ 给出，这就与式 (8.2.12) 中的附息债券的风险度量定义一致.

作为一个实例，用一类单因子仿射期限结构模型来说明如何计算随机久期 D. 仿射期限模型下债券的贴现价格应具有以下形式:

$$B(r,t;T)=\exp(a(\tau)+b(\tau)r),\quad \tau=T-t. \tag{8.2.13}$$

将其代入风险度量的表达式, 得到确定 D 的代数方程如下:

$$b(D)=\sum_{i=1}^{n}w_i(r,t)b(T_i-t). \tag{8.2.14}$$

例如, 考虑 Vasicek 模型, 其中 $b(\tau)$ 为

$$b(\tau)=-\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\tau},$$

可以求得 D 的表达式为

$$D=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}w_i(r,t;T_i)e^{-\alpha(T_i-t)}\right). \tag{8.2.15}$$

随机久期近似方法就是用具有同样风险度量的替代贴现债券的看涨期权来近似附息债券的看涨期权. 换句话说, 替代债券的到期期限等于附息债券的久期. 因为替代贴现债券和附息债券在时刻 t 应该有相同的价值, 所以替代贴现债券的票面价值应等于

$$P=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_iB(r,t;T_i)}{B(r,t;t+D)}.$$

令 $c(t;T,T',X)$ 和 $\widehat{c}(t;T,T',X)$ 分别表示附息债券和替代贴现债券的欧式看涨期权价值, 其中 T 为期权到期日, T' 为债券到期日, $T'>T$, X 为敲定价格. 随机久期近似方法就可以表示为

$$c(t;T,T',X)\approx P\widehat{c}(t;T,t+D,X/P). \tag{8.2.16}$$

$\widehat{c}(t;T,t+D,X/P)$ 的解析式既可以用式 (8.2.6)(在高斯 HJM 模型下) 计算得到, 也可以用式 (8.2.8)(在仿射结构模型下) 计算.

以上近似方法的误差是多少呢? 令 $T^*=t+D$, 记 $B_c(t)$ 为附息债券的价格, $E^t_{Q_{T^*}}$ 为 T^* 远期测度下滤波 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望. 久期近似方法的误差为 (Munk, 1999)

$$\begin{aligned}
&c(t;T,T',X)-\frac{B_c(t)}{B(t,T^*)}\widehat{c}\left(t;T,T^*,\frac{B(t,T^*)}{B_c(t)}X\right)\\
=&B(t,T^*)E^t_{Q_{T^*}}\left[\frac{\max(B_c(T)-X,0)}{B(T,T^*)}\right]\\
&-\frac{B_c(t)}{B(t,T^*)}B(t,T^*)E^t_{Q_{T^*}}\left[\frac{\max\left(B(T,T^*)-\dfrac{B(t,T^*)}{B_c(t)}X,0\right)}{B(T,T^*)}\right]
\end{aligned}$$

$$= B(t,T^*)E_{Q_{T^*}}^t \left[\max\left(\frac{B_c(T)}{B(T,T^*)} - \frac{X}{B(T,T^*)}, 0\right) - \max\left(\frac{B_c(t)}{B(t,T^*)} - \frac{X}{B(T,T^*)}, 0\right)\right].$$

当 $B_c(t) \gg X$, 看涨债券期权处于深度实值时, 期权实施的概率接近于 1. 此时, 以上近似方法的误差约为 0, 因为

$$\begin{aligned} & c(t;T,T',X) - \frac{B_c(t)}{B(t,T^*)}\widehat{c}\left(t;T,T^*,\frac{B(t,T^*)}{B_c(t)}X\right) \\ \approx & B(t,T^*)\left\{E_{Q_{T^*}}^t\left[\frac{B_c(T)}{B(T,T^*)}\right] - \frac{B_c(t)}{B(t,T^*)}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{8.2.17}$$

当债券期权处于平值时, Munk (1999) 用数值计算证明了这种近似方法的误差是非常大的.

5. *仿射近似方法*

当标的是一个可视为贴现债券的投资组合的附息债券时, 欧式看涨债券期权的价值为

$$\begin{aligned} c(t;T) &= \sum_{i=1}^n A_i E_Q^t[B(t,T_i)\mathbf{1}_{\{B_c(T)>X\}}] - XE_Q^t[\mathbf{1}_{\{B_c(T)>X\}}] \\ &= \sum_{i=1}^n \{A_i B(t,T_i) Q_{T_i}[B_c(T)>X] \\ &\quad - XB(t,T)Q_T[B_c(T)>X]\}, \end{aligned} \tag{8.2.18}$$

其中 $Q_{T_i}[A]$ 表示事件 A 在远期测度 Q_{T_i} 下发生的概率. 注意到

$$\begin{aligned} & Q_{T_i}[B_c(T)>X] \\ = & Q_{T_i}\left[\sum_{i=1}^n A_i B(T;T_i) > X\right] \\ = & Q_{T_i}\left[\sum_{i=1}^n A_i e^{a(T_i-T)} e^{\mathbf{b}^\top(T_i-T)\mathbf{Y}(T_i-T)} > X\right], \end{aligned}$$

在 m 维 $(Y_1,\cdots,Y_m)$ 超平面中, 实施集合 $\{B_c(T)>X\}$ 的边界一般是凹的. Singleton 和 Umantsev (2002) 提出的仿射近似方法指出, 这个凹的实施边界可以用超平面 $\beta_1 Y_1 + \cdots + \beta_n Y_n = \alpha$ 来逼近. 这样计算式 (8.2.18) 中的远期概率就简化为计算 $Q_{T_i}[\beta_1 Y_1(T_i-T) + \cdots + \beta_n Y_n(T_i-T) > \alpha]$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 在这种仿射近似下, 附息债券看涨期权的定价过程与贴现债券期权定价过程完全相同.

8.2.2 区间型债券

首先讨论区间型债券的产品特性，引进相关的数学符号. 记 t 为区间型债券的估值日，T_0 为上一个付息日，$T_0 \leqslant t$，未来的 N 个付息日为 T_j $(j = 1, \cdots, n)$. 依据按日计算的惯例，记 T_j 与 T_{j+1} 之间的时间间隔为 n_j 天或 δ_j 年. 记 $(T_j, T_{j+1}]$ 为第 $j+1$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ 个复利计息期. 特别地，对当前的计息期，记 n_0^- 和 n_0^+ 分别为 T_0 与 t 和 t 与 T_1 之间的间隔天数 (图 8.1).

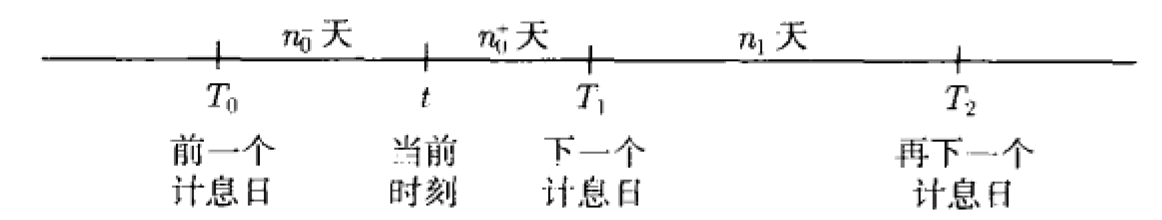


图 8.1 付息日及付息日之间的计数日

给定计息期 δ，在 t 时刻的**点** (spot) LIBOR $L(t, t+\delta)$ 如下定义：

$$L(t, t+\delta) = \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{B(t, t+\delta)} - 1\right], \tag{8.2.19}$$

其中 $B(t, t+\delta)$ 是到期日为 $t+\delta$ 的贴现债券在 t 时刻的价格.

注意到利息是逐日累积的. 设 $T_{j,i}$ 表示 T_j 后的第 i 天，$\delta_{j,i}$ 表示从 $T_{j,i}$ 这一天开始的计息期长度 (以年计). 另外，设第 $j+1$ 个计息期内第 i 天的预设利率区间为 $[R_\ell(T_{j,i}), R_u(T_{j,i})]$，只要

$$R_\ell(T_{j,i}) \leqslant L(T_{j,i}, T_{j,i} + \delta_{j,i}) \leqslant R_u(T_{j,i}),$$

则在 T_j 这一天获得利息. 设 s_j 表示浮动区间型债券在第 $j+1$ 个计息期内的利率与参考 LIBOR 的差值，D_j 表示第 $j+1$ 个计息期的实际计息天数. 设 $\mathcal{D}(T_j, T_{j+1})$ 表示在第 $j+1$ 个计息期内参考 LIBOR 落在预设区间里的天数，即

$$\mathcal{D}(T_j, T_{j+1}) = \sum_{i=1}^{n_j} \mathbf{1}_{\{R_\ell(T_{j,i}) \leqslant L(T_{j,i}, T_{j,i}+\delta_{j,i}) \leqslant R_u(T_{j,i})\}}. \tag{8.2.20}$$

现在第 $j+1$ 个息票在 T_{j+1} 时刻的价值为

$$c_{j+1}(T_{j+1}) = \frac{L(T_j, T_j + \delta_j) + s_j}{D_j}\mathcal{D}(T_j, T_{j+1}). \tag{8.2.21}$$

令 $c_{j+1}(t)$ 表示第 $j+1$ 个息票在 t 时刻的价值，则浮动区间型债券的价值为

$$V_f(t) = B(t, T_N) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}(t), \tag{8.2.22}$$

其中 $B(t,T_n)$ 是到期日为 T_n 的单位票面债券在 t 时刻的价值. 假设纯贴现债券的价格过程服从式 (8.1.12b) 定义的多因子高斯 HJM 模型, 下面为浮动区间型债券定价.

1. 缓息区间型数字期权

从式 (8.2.20), (8.2.21) 可以看出, 票息可以分解成一个缓息区间型数字期权的投资组合. 如果在观测时刻 $T(T \leqslant T_p)$ 时, 标的点 LIBOR $L(T,T+\delta)$ 落在预设区间 (R_ℓ, R_u) 内, 则一个缓息区间型数字期权在到期时刻 T_p 向持有人支付 1 的现金. 令 $V_r(t;T,T_p,\delta)$ 表示此数字期权在 t 时刻的价值, 那么它在 T_p 时刻的到期收益为

$$V_r(T_p) = \mathbf{1}_{\{R_\ell \leqslant L(T,T+\delta) \leqslant R_u\}}, \tag{8.2.23}$$

于是 $V_r(t)$ 为

$$\begin{aligned}
&V_r(t;T,T_p,\delta)\\
&=B(t,T_p)E^t_{Q_{T_p}}\left[\mathbf{1}_{\{R_\ell \leqslant L(T,T+\delta) \leqslant R_u\}}\right]\\
&=B(t,T_p)Q_{T_p}\left[\ln\frac{1}{1+\delta R_u} \leqslant \ln B(T,T+\delta) \leqslant \ln\frac{1}{1+\delta R_\ell}\right],
\end{aligned}$$

其中 $Q_{T_p}[A]$ 表示事件 A 在 T_p 远期测度下发生的概率. 假设债券价格 $B(t,T)$ 服从式 (8.1.12b), 可以证明在测度 Q_{T_p} 下, $B(T,T+\delta)$ 有如下表达式:

$$\begin{aligned}
\ln B(T,T+\delta) = &\ln\left(\frac{B(t,T+\delta)}{B(t,T)}\right) - \frac{1}{2}g(t,T,T+\delta) + \ell(t,T,T+\delta,T_p)\\
&+\sum_{i=1}^m \int_t^T \left[\sigma_B^i(u,T) - \sigma_B^i(u,T+\delta)\right] dZ_i^{T_p}(u)\, du,
\end{aligned} \tag{8.2.24}$$

其中 $\mathbf{Z}^{T_p}(t) = (Z_1^{T_p}(t),\cdots,Z_m^{T_p}(t))^{\mathrm{T}}$ 为一个 Q_{T_p} 下的 m 维布朗过程, 并且

$$g(t,T,T+\delta) = \sum_{i=1}^m \int_t^T \left[\sigma_B^i(u,T) - \sigma_B^i(u,T+\delta)\right]^2 du,$$

$$\begin{aligned}
\ell(t,T,T+\delta,T_p) = &\sum_{i=1}^m \int_t^T \left[\sigma_B^i(u,T) - \sigma_B^i(u,T+\delta)\right]\\
&\times\left[\sigma_B^i(u,T) - \sigma_B^i(u,T_p)\right] du.
\end{aligned}$$

因此, $\ln B(T,T+\delta)$ 是一个单变量的正态分布, 并且有

$$\begin{aligned}
&\text{均值} = \ln\left(\frac{B(t,T+\delta)}{B(t,T)}\right) - \frac{1}{2}g(t,T,T+\delta) + \ell(t,T,T+\delta,T_p),\\
&\text{标准差} = \sqrt{g(t,T,T+\delta)},
\end{aligned}$$

从而 (Nunes, 2004)

$$V_r(t;T,T_p,\delta)=B(t,T_p)\left[N(h(R_\ell))-N(h(R_u))\right], \tag{8.2.25}$$

其中

$$h(r)=\frac{\ln\dfrac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)(1+\delta r)}+\dfrac{1}{2}g(t,T,T+\delta)-\ell(t,T,T+\delta,T_p)}{\sqrt{g(t,T,T+\delta)}}.$$

2. **息票在 t 时刻的估值**

第一份息票 $c_1(t)$ 在 t 时刻的价值很容易得到, 因为 $L(T_0,T_0+\delta)$ 在 t 时刻是已知的. 由于 $L(T_0,T_0+\delta)$ 和 $L(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})$ $(i=1,\cdots,n_0^-)$ 都是 $\mathcal{F}_t$ 可测的, 所以

$$\begin{aligned}c_1(t)=&\frac{L(T_0,T_0+\delta_0)+s_0}{D_0}B(t,T_1)E^t_{Q_{T_1}}\left[\mathcal{D}(T_0,T_1)\right]\\=&\frac{L(T_0,T_0+\delta_0)+s_0}{D_0}\Big\{B(t,T_1)E^t_{Q_{T_1}}\left[\mathcal{D}(T_0,t)\right]\\&+\sum_{i=n_0^++1}^{n_0}B(t,T_1)E^t_{Q_{T_1}}\left[\mathbf{1}_{\{R_\ell(T_{0,i})\leqslant L(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})\leqslant R_u(T_{0,i})\}}\right]\Big\}\\=&\frac{L(T_0,T_0+\delta_0)+s_0}{D_0}\left[B(t,T_1)\mathcal{D}(T_0,t)+\sum_{i=n_0^++1}^{n_0}V_r(t;T_{0,i},T_1,\delta_{0,i})\right].\end{aligned} \tag{8.2.26}$$

接下来其他息票在 t 时刻的估值要复杂得多. 考虑

$$\begin{aligned}&c_{j+1}(t)\\=&B(t,T_{j+1})E^t_{Q_{j+1}}\left[\frac{L(T_j,T_j+\delta_j)+s_j}{D_j}\mathcal{D}(T_j,T_{j+1})\right]\\=&\left(\frac{s_j}{D_j}-\frac{1}{\delta_jD_j}\right)B(t,T_{j+1})\sum_{i=1}^{n_j}E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[\mathbf{1}_{\{R_\ell(T_{j,i})\leqslant L(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i})\leqslant R_u(T_{j,i})\}}\right]\\&+\frac{B(t,T_{j+1})}{\delta_jD_j}\\&\times\sum_{i=1}^{n_j}E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[\frac{1}{B(T_j,T_{j+1})}\mathbf{1}_{\{R_\ell(T_{j,i})\leqslant L(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i})\leqslant R_u(T_{j,i})\}}\right].\end{aligned} \tag{8.2.27}$$

与式 (8.2.26) 类似, 第一项可以看成是一个缓息区间型数字期权的投资组合. 然而, 第二项的估值需要知道 $\dfrac{1}{B(T_j,T_{j+1})}$ 和 $\mathbf{1}\{R_\ell(T_{j,i})\leqslant L(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i})\leqslant R_u(T_{j,i})\}$

的联合概率分布. 关于这个烦琐的联合分布期望值的详细计算过程可参见文献 (Nunes, 2004). Eberlein 和 Kluge (2006) 提出使用修正的远期测度 $Q_{T_j,T_{j+1}}$ 可以避免计算联合分布. 这种方法的提示见习题 8.23.

8.3 上限和 LIBOR 市场模型

金融市场中两种最简单的利率衍生产品是利率上限元和利率下限元. 一张利率上限元保证一笔浮动利率贷款在任何时刻的付息利率是现行浮动利率 (如 LIBOR) 和预设上限利率的最小值. 如果利率超过上限利率, 则持有者会收到来自发行者的现金, 用以抵消超过上限利率而产生的附加利息; 否则, 没有现金流产生. 利率上限元可以看成一张标的为浮动 LIBOR, 敲定价为上限利率的看涨期权.

另一方面, 一张利率下限元保证持有者对一笔浮动利率存款的获息利率取现行浮动利率和预设的下限利率的最大值. 对于一笔浮动利率存款而言, 利率下限元的持有者保证有最低的收益水平. 利率下限元可以看成是一张以浮动 LIBOR 为标的、以利率下限为敲定价格的看跌期权.

一份双限协议为浮动利率贷款设置了上限利率和下限利率. 当利率落在上、下限之间时, 用现行的浮动利率作为支付利率; 否则, 当浮动利率高 (低) 于上 (下) 限利率时, 用上 (下) 限利率作为支付利率. 因此, 一份双限协议可以看成是持有一个利率上限元和卖空一个利率下限元的组合. 选择比例, 使得利率上限元的价格和利率下限元的价格刚好抵消, 从而双限协议的初始价值为 0.

在时间段 $(T_{i-1}, T_i]$ 上的利率上限元拥有与标的为 T_i 到期的贴现债券, 到期日为 T_{i-1} 的欧式看跌期权类似的期权性质, 因为交割日为 T_i, 需要在 T_{i-1} 考虑是否提前实施. 一份上限可以看成是一个欧式看跌债券期权的投资组合. 利用 8.2.1 小节中的定价技巧, 可以得到高斯 HJM 模型下的上限价格的解析解.

8.3.1 高斯 HJM 框架下的上限定价

假设一个公司有一笔浮动 LIBOR 的贷款债务, 需要在时间点 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 上付息. $L_{i-1}(t)$ 表示在 t 时刻约定的在时间段 $(T_{i-1}, T_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 内的远期 LIBOR, 其中 $t < T_{i-1}$. 这些 LIBOR $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$ 分别在时间点 $T_0, T_1, \cdots, T_{n-1}$ 上重置, 时间段 $(T_{i-1}, T_i]$ 上的换算因子记作 α_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 为了避免利率上涨的风险, 这个公司希望将 LIBOR 锁定在一个预设的上限利率 L_c 内. 因此, 他们可以签署一份利率上限协议. 上限是一系列的利率上限元的组合, 上限的持有者在每个付息日 T_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的收益为 $\mathcal{N}\alpha_i \max(L_{i-1} - L_c, 0)$, 其中 $\mathcal{N}$ 为上限的名义本金, L_c 为利率上限. 类似地, 一张下限是一系列的利率下限元, 其中下限的持有者在时间点 T_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 上的收益为 $\mathcal{N}\alpha_i \max(L_f - L_{i-1}, 0)$, 其中 L_f 为

预设的下限利率. 在下面的讨论中, 假设名义本金 $\mathcal{N}$ 为 1.

将上限看成是一个债券期权的投资组合

考虑一个上限利率为 L_c 的利率上限元的定价模型. 注意到上限的持有者在时刻 T_i 得到一笔价值为 $\alpha_i \max(L_{i-1}(T_{i-1}) - L_c, 0)$ 的现金. 这笔现金在时刻 T_{i-1} 的现值为

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i L_{i-1}(T_{i-1})}\max(L_{i-1}(T_{i-1})-L_c,0)\\&=\max\left(1-\frac{1+\alpha_i L_c}{1+\alpha_i L_{i-1}(T_{i-1})},0\right).\end{aligned} \tag{8.3.1}$$

此外, 在 T_{i-1} 时刻, T_i 到期的贴现债券在 t 时刻的价格 $B(t;T_i)$ 和远期 LIBOR $L_{i-1}(t)$ 有如下关系:

$$\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)} = 1+\alpha_i L_{i-1}(T_{i-1}).$$

式 $\dfrac{1+\alpha_i L_c}{1+\alpha_i L_{i-1}(T_{i-1})}$ 可以看成是在 T_i 时刻收益为 $1+\alpha_i L_c$ 的贴现债券在 T_{i-1} 时刻的价值. 因此, 式 (8.3.1) 中的收益与一张到期日为 T_{i-1} 且标的为 T_i 到期的贴现债券的看跌期权的收益相同. 债券的面值为 $1+\alpha_i L_c$, 看跌期权的敲定价格为 1. 因此, 一张利率上限可以看成一个以贴现债券为标的的欧式看跌期权的投资组合.

在 T_i 时刻获现 $\alpha_i \max(L_{i-1}(T_{i-1}) - L_c, 0)$ 的利率上限元在 t 时刻的价值可以表示为

$$\mathcal{C}_i(t;T_{i-1},T_i) = B(t,T_i)E^t_{Q_{T_i}}[\alpha_i \max(L_{i-1}(T_{i-1})-L_c,0)].$$

因为 $L_{i-1}(T_{i-1})$ 是 $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$ 可测的, 所以上式可以写成

$$\mathcal{C}_i(t;T_{i-1},T_i) = B(t,T_{i-1})E^t_{Q_{T_{i-1}}}[B(T_{i-1},T_i)\alpha_i \max(L_{i-1}(T_{i-1})-L_c,0)].$$

利用式 (8.3.1), 可以将之简化为

$$\mathcal{C}_i(t;T_{i-1},T_i) = B(t,T_{i-1})E^t_{Q_{T_{i-1}}}[\max(1-(1+\alpha_i L_c)B(T_{i-1},T_i),0)].$$

假设债券价格 $B(t,T)$ 在风险中性测度 Q 下服从式 (8.1.12b) 定义的高斯 HJM 模型, 则利率上限元在 t 时刻的价值为

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}_i(t;T_{i-1},T_i)\\&=B(t,T_{i-1})N(-d_2^{(i)})-(1+\alpha_i L_c)B(t,T_i)N(-d_1^{(i)}),\quad t<T_{i-1},\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

其中

$$d_2^{(i)} = \frac{\ln \dfrac{(1+\alpha_i L_c)B(t,T_i)}{B(t,T_{i-1})} - \dfrac{1}{2}\overline{\sigma}_i^2(t)(T_{i-1}-t)}{\overline{\sigma}_i(t)\sqrt{T_{i-1}-t}}, \quad d_1^{(i)} = d_2^{(i)} + \overline{\sigma}_i(t)\sqrt{T_{i-1}-t},$$

$$\overline{\sigma}_i^2(t) = \frac{1}{T_{i-1}-t}\int_t^{T_{i-1}}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\sum_{j=1}^m \sigma_F^j(s,u)\,du\,ds.$$

因为利率上限由一系列的利率上限元组成, 所以上限在 t 时刻的价值为

$$\mathcal{C}(t;T_0,T_1,\cdots,T_n) = \sum_{i=1}^n \mathcal{C}_i(t;T_{i-1},T_i), \quad t < T_0. \tag{8.3.3}$$

8.3.2 Black 公式和 LIBOR 市场模型

上限的价格公式 (8.3.3) 的解析形式非常烦琐. 这并不奇怪, 因为基于 (不可观测的) 即时远期利率来为离散 LIBOR 衍生产品定价. 复杂的解析解使得运用上限的市场数据来校正波动率的工作非常复杂, 这刺激了所谓的市场利率模型的发展, 该模型使用可观测的市场利率作为标的. 下面阐述 Black 公式的方便之处以及上限元定价中的隐含 Black 波动率, 这些都为构建对数正态 LIBOR 市场模型作了铺垫.

1. Black 公式

假设在某个"市场概率" Q_m 下标的远期 LIBOR 过程服从漂移为 0 的对数正态分布, 在此前提下, 固定收益的市场采用 Black 公式 (见式 (8.1.16)) 为利率上限元/上限定价. 简单地说, 假设常数 σ_{i-1}^L 是远期 LIBOR $L_{i-1}(t)$ 的 Black 波动率, 那么

$$dL_{i-1}(t) = L_{i-1}(t)\sigma_{i-1}^L\,dZ_t^m, \tag{8.3.4}$$

其中 Z_t^m 在 Q_m 下为一个布朗过程. 在 T_i 时刻获现 $\alpha_i\max(L_{i-1}(T_{i-1})-L_c,0)$ 的利率上限元在 t 时刻的 Black 定价公式为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_i^B(t;T_{i-1},T_i) &= \alpha_i B(t,T_i)E_{Q_m}^t[\max(L_{i-1}(T_{i-1})-L_c,0)] \\ &= \alpha_i B(t,T_i)[L_{i-1}(t)N(d_1^{i-1}) - L_c N(d_2^{i-1})],\end{aligned} \tag{8.3.5}$$

其中

$$d_1^{i-1} = \frac{\ln\dfrac{L_{i-1}(t)}{L_c} + \dfrac{\left(\sigma_{i-1}^L\right)^2}{2}(T_{i-1}-t)}{\sigma_{i-1}^L\sqrt{T_{i-1}-t}}, \quad d_2^{i-1} = \frac{\ln\dfrac{L_{i-1}(t)}{L_c} - \dfrac{\left(\sigma_{i-1}^L\right)^2}{2}(T_{i-1}-t)}{\sigma_{i-1}^L\sqrt{T_{i-1}-t}}.$$

对于上限, 因其由一系列利率上限元组成, 所以它在 t 时刻的价值为

$$\mathcal{C}^B(t;T_0,T_1,\cdots,T_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{C}_i^B(t;T_{i-1},T_i),\quad t<T_0. \tag{8.3.6}$$

“市场经验”假设任何到期日的远期 LIBOR 都服从对数正态分布.

2. 隐含 Black 波动率

在金融市场中, 上限的价格是根据隐含上限波动率来报价的, 与股票期权价格用隐含股票波动率来报价类似. 注意：实际交易的是上限, 而非上限元. 可以定义两种隐含 Black 波动率, 一种是对上限直接定义, 一种是利用上限的价格以及“倒靴方法”定义.

令期限结构的固定日期为 $T_0,T_1,\cdots,T_n$, 并且 $t\leqslant T_0$. 对每个 $i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 可以得到具有期限 $\{T_0,T_1,\cdots,T_i\}$ 的上限的市场价格 $\mathcal{C}^{mkt}(t;T_0,\cdots,T_i)$. 通过式 (8.3.3), “衍生”出 $(T_{i-1},T_i]$ 内的上限元的市场价格为

$$\mathcal{C}_i^{mkt}(t;T_{i-1},T_i)=\mathcal{C}^{mkt}(t;T_0,\cdots,T_i)-\mathcal{C}^{mkt}(t;T_0,\cdots,T_{i-1}). \tag{8.3.7}$$

隐含 Black 上限平坦波动率就是上限的市场价格蕴涵的波动率. 考虑具有期限 $\{T_0,\cdots,T_i\}$ 的上限, 用以下等式的解来定义平坦波动率 $\sigma_i^f\ (i=1,2,\cdots,n)$:

$$\mathcal{C}_i^{mkt}(t;T_0,\cdots,T_i)=\sum_{k=1}^{i}\mathcal{C}_i^B(t;T_{k-1},T_k,\sigma_i^f), \tag{8.3.8}$$

其中上限元 Black 公式 (见式 (8.3.5)) 中的波动率用 σ_i^f 表示. 另外, 用“衍生”的上限元价格定义隐含的点波动率 $\sigma_1^s,\cdots,\sigma_n^s$. 它们可由以下等式的解得到:

$$\mathcal{C}_i^{mkt}(t;T_{i-1},T_i)=\mathcal{C}_i^B(t;T_{i-1},T_i,\sigma_i^s),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{8.3.9}$$

3. 对数正态 LIBOR 市场模型

希望构建一个 LIBOR 过程的无套利模型, 然后以符合逻辑的方式推导利率上限元的 Black 公式. Miltersen 等 (1997), Brace 等 (1997) 以及 Jamshidian (1997) 讨论了各种形式的模型.

可以看到, 远期 LIBOR $L_i(t)$ 在远期测度 $Q_{T_{i+1}}$ 下是一个鞅. 在此测度下, 贴现债券价格 $B(t,T_{i+1})$ 是计价单位. 假设已经给定初始利率期限结构, 具体为一系列贴现债券价格 $B(0,T_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$, 并且 $B(0,T_i)>B(0,T_{i+1})$ (即利率为正). 令 $\sigma_i^L(t)=(\sigma_{i,1}^L(t),\cdots,\sigma_{i,m}^L(t))\ (i=1,2,\cdots,m)$ 是有界适定的 m 维过程, 它表示相应的远期 LIBOR $L_i(t)$ 的波动率. 令 $\mathbf{Z}^i(t)=(Z_1^i(t),\cdots,Z_m^i(t))^{\mathrm{T}}$ 为相应的远期测度 $Q_{T_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 下一簇 m 维布朗过程. 对数正态 LIBOR 市场 (LLM) 模型假设 $L_i(t)$ 在 T_{i+1} 远期测度 $Q_{T_{i+1}}$ 下满足以下随机微分方程 (见式 (8.1.23)):

$$dL_i(t) = L_i(t)\sum_{j=1}^{m}\sigma_{i,j}^{L}(t)\,dZ_j^{i+1}(t), \tag{8.3.10}$$

其中初值为

$$L_i(0) = \frac{B(0,T_i) - B(0,T_{i+1})}{\alpha_{i+1}B(0,T_{i+1})}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

4. 上限元再定价

在 LLM 模型下, 考虑第 i 个利率上限元的定价, 它在 T_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时刻支付 $\alpha_i \max(L_{i-1}(T_{i-1}) - L_c, 0)$. 第 i 个利率上限元的价格由下式给出:

$$\mathcal{C}_i^{\mathrm{LLM}}(t; T_{i-1}, T_i) = \alpha_i B(t, T_i) E_{Q_{T_i}}^t[\max(L_{i-1}(T_{i-1}) - L_c, 0)]. \tag{8.3.11}$$

假设 $L_{i-1}(t)$ 服从式 (8.3.10), $L_{i-1}(t)$ 在 Q_{T_i} 下服从对数正态分布, 其中

$$L_{i-1}(T_{i-1}) = L_{i-1}(t)\exp\left(\int_t^{T_{i-1}}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{i-1,j}^{L}(u)\,dZ_j^{i}(u) - \frac{1}{2}\int_t^{T_{i-1}}\sum_{j=1}^{m}\left[\sigma_{i-1,j}^{L}(u)\right]^2 du\right). \tag{8.3.12}$$

可以得到

$$\mathcal{C}_i^{\mathrm{LLM}}(t; T_{i-1}, T_i) = \alpha_i B(t, T_i)[L_{i-1}(t)N(d_1^i) - L_c N(d_2^i)], \tag{8.3.13}$$

其中

$$d_1^i = \frac{\ln\dfrac{L_{i-1}(t)}{L_c} + \dfrac{v_{i-1}^2(t)}{2}}{v_{i-1}(t)}, \quad d_2^i = d_1^i - v_{i-1}(t),$$

$$v_{i-1}^2(t) = \int_t^{T_{i-1}}\left[\sum_{j=1}^{m}\sigma_{i-1,j}^{L}(u)\right]^2 du.$$

为了得到利率上限元 Black 形式的定价公式, 必须假设每个 LIBOR 在适当的远期测度下服从对数正态分布. 如果取 $L_{i-1}(t)$ 的波动率为常数, 则可以再一次得到上限元的 Black 定价公式 (见式 (8.3.5)).

5. 缓期 LIBOR

在标准的 LIBOR 衍生产品中, 时间段 $(T_{i-1}, T_i]$ 上的 LIBOR L_{i-1} 在区间末 T_i 付款. 但是在 LIBOR 缓期付款中, 时间段 $(T_i, T_{i+1}]$ 上的 LIBOR L_i 在时刻 T_i 付款, 即区间的初始时刻. 想要运用 LLM 模型找出这个 LIBOR 缓期付款在当前时

刻 $t(t < T_i)$ 的价格 $\widetilde{V}_L(t)$. 因为是在 T_i 付款, 自然地, 使用 $B(t,T_i)$ 作为计价单位, 则有

$$\widetilde{V}_L(t) = B(t,T_i)E^t_{Q_{T_i}}[\alpha_{i+1}L_i(T_i)]. \tag{8.3.14a}$$

但是, 因为 $L_i(T_i)$ 是一个 $Q_{T_{i+1}}$ 鞅, 所以最好使用远期测度 $Q_{T_{i+1}}$. 运用测度变换得到

$$\widetilde{V}_L(t) = \alpha_{i+1}B(t,T_i)E^t_{Q_{T_{i+1}}}\left[L_i(T_i)\frac{dQ_{T_i}}{dQ_{T_{i+1}}}\right], \tag{8.3.14b}$$

其中 $\dfrac{dQ_{T_i}}{dQ_{T_{i+1}}}$ 为 Radon-Nikodym 导数, 可以使测度从 Q_{T_i} 变换到 $Q_{T_{i+1}}$. 注意到 $\dfrac{dQ_{T_i}}{dQ_{T_{i+1}}}$ 由计价单位的比例给定,

$$\frac{dQ_{T_i}}{dQ_{T_{i+1}}} = \frac{B(T_i,T_i)}{B(T_i,T_{i+1})}\frac{B(t,T_{i+1})}{B(t,T_i)} = \frac{1+\alpha_{i+1}L_i(T_i)}{1+\alpha_{i+1}L_i(t)}.$$

结合以上结果得到

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_L(t) &= \alpha_{i+1}B(t,T_i)E^t_{Q_{T_{i+1}}}\left[\frac{L_i(T_i)+\alpha_{i+1}L_i^2(T_i)}{1+\alpha_{i+1}L_i(t)}\right]\\ &= \alpha_{i+1}B(t,T_i)L_i(t)\left\{1+\frac{\alpha_{i+1}}{L_i(t)}\frac{\mathrm{var}_{Q_{T_{i+1}}}[L_i(T_i)]}{1+\alpha_{i+1}L_i(t)}\right\}.\end{aligned} \tag{8.3.15}$$

最后一个因子 $1+\dfrac{\alpha_{i+1}}{L_i(t)}\dfrac{\mathrm{var}_{Q_{T_{i+1}}}[L_i(T_i)]}{1+\alpha_{i+1}L_i(t)}$ 被称为**凸修正因子** (convexity correction factor). 凸性调整源于付款日期和“合适的”远期 LIBOR 的日期有细微偏差. 基于 LLM 模型下 LIBOR 过程服从对数正态分布的假设 (见式 (8.3.12)) 有

$$\widetilde{V}_L(t) = \alpha_{i+1}B(t,T_i)L_i(t)\left\{1+\frac{\alpha_{i+1}L_i(T_i)}{1+\alpha_{i+1}L_i(t)}\left[e^{v_i^2(t)}-1\right]\right\}, \tag{8.3.16}$$

其中

$$v_i^2(t) = \int_t^{T_i}\left[\sum_{j=1}^m \sigma^L_{i,j}(u)\right]^2 du.$$

6. *末期测度*

如果一个 LIBOR 衍生产品的收益依赖于不同的 LIBOR 值, 则当为它定价时, 对每个 LIBOR 使用同一个测度会比对每个 LIBOR 使用相应的远期测度要方便很多. 自然地, 选择末期测度 Q_{T_n}, 它使用到期日最长的债券作为计价单位. 令 $\mathbf{Z}^n(t)=(Z_1^n(t),\cdots,Z_m^n(t))^{\mathrm{T}}$ 是一个 m 维的 Q_{T_n} 布朗过程, $\sigma^L_{n-1}(t)=(\sigma^L_{n-1,1}(t),\cdots,$

$\sigma_{n-1,m}^L(t))^{\mathrm{T}}$ 是一个 m 维的向量波动率. 在末期测度下, 末期 LIBOR $L_{n-1}(t)$ 是一个鞅. 对数正态 LIBOR 市场模型假定

$$\frac{dL_{n-1}(t)}{L_{n-1}(t)} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{n-1,j}^L(t)\, dZ_j^n(t). \tag{8.3.17}$$

从 Q_{T_n} 布朗向量过程 $\mathbf{Z}^n(t)$ 开始, 说明如何运用 Girsanov 定理来寻找对应于 $Q_{T_{n-1}}, Q_{T_{n-2}}, \cdots, Q_{T_1}$ 的连续布朗向量过程.

不失一般性, 考虑可以将测度 Q_{T_i} 变换到测度 $Q_{T_{i+1}}$ 的 Radon-Nikodym 导数 $\zeta_i^{i+1}(t)$. 如前所述

$$\begin{aligned}\zeta_i^{i+1}(t) = \left.\frac{dQ_{T_i}}{dQ_{T_{i+1}}}\right|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{B(t,T_i)/B(0,T_i)}{B(t,T_{i+1})/B(0,T_{i+1})} \\ &= \frac{B(0,T_{i+1})}{B(0,T_i)}[1+\alpha_{i+1}L_i(t)],\end{aligned}$$

从而可以推出

$$d\zeta_i^{i+1}(t) = \frac{B(0,T_{i+1})}{B(0,T_i)}\alpha_{i+1}\, dL_i(t). \tag{8.3.18}$$

假设 $L_i(t)$ 过程服从

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{i,j}^L(t)\, dZ_j^{i+1}(t),$$

其中 $\mathbf{Z}^{i+1}(t) = (Z_1^{i+1}(t), \cdots, Z_m^{i+1}(t))^{\mathrm{T}}$ 是一个 m 维 $Q_{T_{i+1}}$ 布朗过程, 则有

$$d\zeta_i^{i+1}(t) = \zeta_i^{i+1}(t) \sum_{j=1}^{m} \gamma_{i,j}(t)\, dZ_j^{i+1}(t), \tag{8.3.19}$$

其中

$$\gamma_{i,j}(t) = \frac{\alpha_{i+1}L_i(t)}{1+\alpha_{i+1}L_i(t)}\sigma_{i,j}^L(t), \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

式 (8.3.19) 的解为

$$\zeta_i^{i+1}(t) = \exp\left(\int_0^t \sum_{j=1}^{m} \gamma_{i,j}(u)\, dZ_j^{i+1}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j=1}^{m} \gamma_{i,j}(u)^2\, du\right), \quad 0 < t < T_i. \tag{8.3.20}$$

利用 Girsanov 定理, 可以定义 m 维 Q_{T_i} 布朗过程 $\mathbf{Z}^i(t) = (Z_1^i(t), \cdots, Z_m^i(t))^{\mathrm{T}}$, 它由 m 维 $Q_{T_{i+1}}$ 布朗过程 $\mathbf{Z}^{i+1}(t)$ 通过下式给出:

$$dZ_j^i(t) = dZ_j^{i+1}(t) - \gamma_{i,j}(t)\, dt, \quad t \in [0, T_i],\ j = 1, 2, \cdots, m. \tag{8.3.21}$$

给定了末期测度 Q_{T_n} 下的布朗向量过程 $\mathbf{Z}^n(t)$, 则在末期测度 Q_{T_n} 下, $L_{n-2}(t)$ 适合

$$\frac{dL_{n-2}(t)}{L_{n-2}(t)} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{n-2,j}^L(t) \left(dZ_j^n(t) - \frac{\alpha_{n-1} L_{n-2}(t) \sigma_{n-2,j}^L}{1 + \alpha_{n-1} L_{n-2}(t)} \, dt \right).$$

当 $L_{n-2}(t)$ 在远期测度 $Q_{T_{n-1}}$ 下是一个鞅时, 它在测度 Q_{T_n} 下就不会是鞅. 归纳得到 $L_i(t)$ $(i = n-2, n-3, \cdots, 0)$ 服从以下过程:

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \sum_{j=1}^{m} \left[- \sum_{k=i+1}^{n} \frac{\alpha_{k+1} L_k(t)}{1 + \alpha_{k+1} L_k(t)} \sigma_{k,j}^L(t) \, dt + \sigma_{k,j}^L(t) \, dZ_j^n(t) \right]. \tag{8.3.22}$$

7. 推广

除了末期测度 Q_{T_n}, 可以在任何远期测度 $Q_{T_k} (k \neq i)$ 下建立 $L_i(t)$ 的 LIBOR 模型. 为简单起见, 取 $m = 1$, 此时, 随机过程 $L_i(t)$ 是一个标量布朗过程. 类似地, 在 Q_{T_k} 下的随机过程 $L_i(t)$ 可以表示为

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \sigma_i^L(t) \, dZ^k(t) + \sigma_i^L(t) \gamma_{ik}(t) \, dt, \tag{8.3.23}$$

其中 $Z^k(t)$ 为 Q_{T_k} 布朗过程, 并且

$$\gamma_{ik}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=k}^{i} \frac{\alpha_{j+1} L_j(t)}{1 + \alpha_{j+1} L_j(t)} \sigma_j^L(t), & k < i, \\ 0, & k = i, \\ \displaystyle -\sum_{j=k+1}^{n} \frac{\alpha_{j+1} L_j(t)}{1 + \alpha_{j+1} L_j(t)} \sigma_j^L(t), & k > i. \end{cases}$$

以上结果的具体计算过程见习题 8.36.

因为随机微分方程 (8.3.23) 的漂移项包含了 $L_i(t)$ 的非线性函数, 所以通常不可能求得 $L_i(t)$ 的闭合解. 采用一些巧妙的近似方法, 可以得到远期 LIBOR 的各种对数近似解析解 (Daniluk and Gatarek, 2005, 见习题 8.33).

8.4 互换和互换期权

互换协议涉及协议双方通过某些特定的计算规则来交换现金流. 例如, 在交叉货币互换中, 双方的付款依赖于两种不同货币世界中的浮动利率. 为了满足用户的特殊需求, 设计了许多新的具有各种各样期权性质的互换产品. 远期互换和互换期权就分别是远期合约和期权合约, 它们的标的都是互换. 一张互换期权的持有者在将来的某一时刻有权签订一张指定利率的互换协议, 而远期互换的持有者却必须签

订一张互换协议. 首先说明远期互换利率同贴现债券价格的投资组合的关系. 与对数正态 LIBOR 市场模型相似, 构造对数正态互换利率模型来为互换期权定价. 以年金 (一个贴现债券价格的投资组合) 作为计价单位定义互换测度, 在此测度下, 远期互换利率是一个鞅. 因此, 互换期权有 Black 形式的定价公式. 互换利率模型和 LIBOR 模型是不相容的, 所以在对数正态 LIBOR 市场模型下互换期权价格的形式会非常复杂. 下面将阐述在对数正态 LIBOR 市场模型下如何得到期权互换价格的近似解析解. 最后, 还考虑了一种特殊的交叉货币互换, 叫做差分互换. 这种互换协议双方的付款都是以本国货币记账的, 且至少有一方的浮动利率是参考外币现行的浮动利率. 会详细讨论差分交换的定价和对冲.

8.4.1 远期互换利率和互换测度

下面利用远期测度和 t 时刻的远期互换价值来推导远期互换利率, 接着利用债券的投资组合作为计价单位可以定义远期互换测度. 利用所谓的对数正态互换利率模型可以得到互换测度下的互换期权的 Black 公式.

1. 远期互换

为找到单位本金的固定对浮动利率的互换远期的价值, 考虑一个期限结构 $T_0 < T_1 < \cdots < T_n$, 其中 $\{T_0, \cdots, T_{n-1}\}$ 为相应的 LIBOR $\{L_0, \cdots, L_{n-1}\}$ 的重置日. 付款日为 $\{T_1, \cdots, T_n\}$, 浮动利率方在 T_i 支付 $\alpha_i[L_{i-1}(T_{i-1}) - K]$, 其中 α_i 为时间段 $(T_{i-1}, T_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 上的换算因子, K 为预设的固定利率 (典型利率互换的现金流如图 7.4 所示). 这份远期互换在 $t(t < T_0)$ 时刻的价值为

$$\begin{aligned} s_{0,n}(t) &= E_Q^t\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-\int_t^{T_i} r_u\, du}[L_{i-1}(T_{i-1}) - K]\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(t, T_i) E_{Q_{T_i}}^t\left[L_{i-1}(T_{i-1}) - K\right], \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

其中 Q 为风险中性测度, Q_{T_i} 为以 $B(t, T_i)$ 为计价单位的 T_i 远期测度. 因为

$$E_{Q_{T_i}}^t[L_{i-1}(T_{i-1})] = L_{i-1}(t) = \frac{B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)}{\alpha_i B(t, T_i)},$$

所以

$$s_{0,n}(t) = \sum_{i=1}^{n}[B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)] - K\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(t, T_i). \tag{8.4.2}$$

同样地, 远期互换利率在 t 时刻的值 $K_t[T_0, T_n]$ 定义为使得 $s_{0,n}(t)$ 为 0 的固定互换利率 K, 从而

$$K_t[T_0, T_n] = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(t, T_i)}. \tag{8.4.3}$$

这个结果与认为利率互换是一个远期利率协议 (见式 (7.1.4)) 所得到的结果是相同的. 将 $K_t[T_0, T_1]$ 代入式 (8.4.2) 得到

$$\begin{aligned} s_{0,n}(t) &= \{K_t[T_0, T_n] - K\} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(t, T_i) \\ &= \{K_t[T_0, T_n] - K\} \widehat{B}(t; T_0, T_n). \end{aligned} \tag{8.4.4}$$

$\widehat{B}(t; T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(t, T_i)$ 在金融市场中通常被称为基点的现值 (简称为 PVBP 或 PV01). 注意到远期互换的现值与现行互换利率和固定互换利率的差值成比例, 比例因子就是 PVBP.

远期互换利率是用贴现债券的价格来表示的. 因为在金融市场中利率互换比贴现债券的交易更加频繁, 所有远期互换利率的报价更容易得到. 反过来, 可以用互换利率的市场报价来推导贴现债券的市场价格. 这种反推变换可以通过如下**倒靴方法** (bootstrap method) 得到. 给定贴现债券价格 $B(t, T_0)$ 和所有的远期互换利率 $K_t[T_0, T_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 利用关系

$$K_t[T_0, T_1] = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_1)}{\alpha_1 B(t, T_1)}$$

可以得到

$$B(t, T_1) = \frac{B(t, T_0)}{1 + \alpha_1 K_t[T_0, T_1]}.$$

一旦得到了 $B(t, T_1)$, 就可以如下归纳得到其他贴现债券的价格:

$$B(t, T_i) = \frac{B(t, T_0) - K_t[T_0, T_i] \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j B(t, T_j)}{1 + \alpha_i K_t[T_0, T_i]}, \quad i = 2, 3, \cdots, n. \tag{8.4.5}$$

2. 互换测度及互换期权的 Black 公式

类似于利率上限元, 定义适当的互换测度, 可以得到互换期权的 Black 公式. 考虑 T_0 到期的互换期权, 敲定互换利率为 X, 该互换期权的持有者可以, 但非必须在时刻 T_0 签署一份固定利率为 X 的互换协议. 也就是说, 在 T_i 时刻的支出净额是 $L_{i-1}(T_{i-1}) - X$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 互换期权只有当 $K_{T_0}[T_0, T_n] > X$ 时才会被实施, 所以互换期权持有人的到期收益为

$$\max(K_{T_0}[T_0,T_n]-X,0)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i B(T_0,T_i)$$
$$=\widehat{B}(T_0;T_0,T_n)\max(K_{T_0}[T_0,T_n]-X,0). \tag{8.4.6}$$

为了定义互换测度, 使用 $\widehat{B}(t;T_0,T_n)$ 作为计价单位. 现在, 在与**年金计价单位** (annuity numeraire) $\widehat{B}(t;T_0,T_n)$ 有关的互换测度 $Q_{s_{0,n}}$ 下, 所有的衍生产品价格用 $\widehat{B}(t;T_0,T_n)$ 正规化后在 $Q_{s_{0,n}}$ 下都是鞅. 令 $V(t;T_0,T_n,X)$ 是上述敲定互换利率为 X 的互换期权的价值, 那么可以得到

$$\frac{V(t;T_0,T_n,X)}{\widehat{B}(t;T_0,T_n)}=E_{Q_{s_{0,n}}}[\max(K_{T_0}[T_0,T_n]-X,0)]. \tag{8.4.7}$$

互换利率模型假设远期互换利率 $K_t[T_0,T_n]$ 在 $Q_{s_{0,n}}$ 下是一个对数正态鞅, 即

$$\frac{dK_t[T_0,T_n]}{K_t[T_0,T_n]}=\sigma_{0,n}^K(t)\,dZ_t^{0,n}, \tag{8.4.8}$$

其中 $Z_t^{0,n}$ 为 $Q_{s_{0,n}}$ 布朗过程. 计算式 (8.4.7) 中的期望值, 可以得到互换期权的 Black 公式

$$V(t;T_0,T_n,X)=\widehat{B}(t;T_0,T_n)\{K_t[T_0,T_n]N(d_1)-XN(d_2)\}, \tag{8.4.9}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{K_t[T_0,T_n]}{X}+\dfrac{\widehat{\sigma}_{0,n}^K(t,T_0)^2}{2}(T_0-t)}{\widehat{\sigma}_{0,n}^K(t,T_0)\sqrt{T_0-t}},\quad d_2=d_1-\widehat{\sigma}_{0,n}^K(t,T_0)\sqrt{T_0-t},$$

$$\widehat{\sigma}_{0,n}^K(t,T_0)^2=\frac{1}{T_0-t}\int_t^{T_0}\sigma_{0,n}^K(u)^2\,du.$$

3. 远期互换利率的波动率

可以将远期互换利率 $K_t[T_0,T_n]$ 的波动率 $\sigma_{0,n}^K$ 同债券价格的波动率联系起来. 记 $\sigma_B^i(t,T_i)$ 是贴现债券过程 $B(t,T_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的波动率, 定义权函数 w_j 为

$$w_j(t)=\frac{\alpha_j B(t,T_j)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k B(t,T_k)},\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{8.4.10}$$

因为在 $Q_{s_{0,n}}$ 下, $B(t,T_i)/\widehat{B}(t;T_0,T_n)$ 是一个鞅, 注意到 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$, 于是有

$$\frac{d\left(\dfrac{B(t,T_i)}{\widehat{B}(t;T_0,T_n)}\right)}{\dfrac{B(t,T_i)}{\widehat{B}(t;T_0,T_n)}}=\left[\sigma_B^i(t,T_i)-\sum_{j=1}^{n}w_j(t)\sigma_B^j(t,T_j)\right]\,dZ_t^{0,n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} w_j(t)\left[\sigma_B^i(t,T_i)-\sigma_B^j(t,T_j)\right]\, dZ_t^{0,n}.$$

在上式中, 取 $i=0$ 和 $i=n$, 并将两式相减得到

$$\begin{aligned}dK_t[T_0,T_n]=&\left\{\frac{B(t,T_0)}{\widehat{B}(t;T_0,T_n)}\sum_{j=1}^{n} w_j(t)[\sigma_B^0(t,T_0)-\sigma_B^j(t,T_j)]\right.\\&\left.-\frac{B(t,T_n)}{\widehat{B}(t;T_0,T_n)}\sum_{j=1}^{n} w_j(t)[\sigma_B^n(t,T_0)-\sigma_B^j(t,T_j)]\right\} dZ_t^{0,n}\\=&K_t[T_0,T_n]\left\{\sum_{j=1}^{n} w_j(t)[\sigma_B^0(t,T_0)-\sigma_B^j(t,T_j)]\right.\\&\left.+\frac{B(t,T_n)}{B(t,T_0)-B(t,T_n)}[\sigma_B^0(t,T_0)-\sigma_B^n(t,T_n)]\right\} dZ_t^{0,n}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\sigma_{0,n}^K(t)=&\sum_{j=1}^{n} w_j(t)[\sigma_B^0(t,T_0)-\sigma_B^j(t,T_j)]\\&+\frac{B(t,T_n)}{B(t,T_0)-B(t,T_n)}[\sigma_B^0(t,T_0)-\sigma_B^n(t,T_n)].\end{aligned} \tag{8.4.11}$$

式 (8.4.11) 将远期互换利率的波动率 $\sigma_{0,n}^K(t)$ 同高斯 HJM 框架下的贴现债券价格的波动率联系起来了. 同样也可以将 $\sigma_{0,n}^K(t)$ 同对数正态 LIBOR 市场模型下的波动率联系起来.

首先, 通过 LIBOR 的加权求和形式来表示 $K_t[T_0,T_n]$, 将远期互换利率改写成

$$K_t[T_0,T_n]=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i B(t,T_i)\left[\frac{B(t,T_{i-1})-B(t,T_i)}{\alpha_i B(t,T_i)}\right]}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i B(t,T_i)},$$

从而

$$K_t[T_0,T_n]=\sum_{i=1}^{n} w_i(t)L_{i-1}(t), \tag{8.4.12}$$

其中 $w_i(t)$ 如式 (8.4.10) 定义. 将权函数的值“冻结”在当前时刻 t_0, 通过如下近似方法可以得到:

$$K_t[T_0,T_n]\approx\sum_{i=1}^{n} w_i(t_0)L_{i-1}(t),\quad t_0<t<T_0. \tag{8.4.13a}$$

这样就可以得到 $K_t[T_0,T_n]$ 微分的一个比较简单的解析表示, 其中

$$dK_t[T_0,T_n] \approx \sum_{i=1}^{n} w_i(t_0)\, dL_{i-1}(t), \quad t_0 < t < T_0. \tag{8.4.13b}$$

假设远期 LIBOR 过程 $L_{i-1}(t)$ 服从以下对数正态过程:

$$\frac{dL_{i-1}(t)}{L_{i-1}(t)} = \sigma_i^L(t)\, dZ^i(t),$$

其中 $Z^i(t)$ 为 Q_{T_i} $(i=1,2,\cdots,n)$ 布朗过程. 进一步, 假设 $dZ^i(t)\,dZ^j(t) = \rho_{ij}\,dt$, 其中 ρ_{ij} 为布朗过程 $Z^i(t)$ 和 $Z^j(t)$ 的相关系数. $K_t[T_0,T_n]$ 的二次变分的百分比近似为

$$\left(\frac{dK_t[T_0,T_n]}{K_t[T_0,T_n)}\right)\left(\frac{dK_t[T_0,T_n]}{K_t[T_0,T_n]}\right) \approx \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i(t_0)w_j(t_0)L_{i-1}(t)L_{j-1}(t)\rho_{ij}\sigma_i^L(t)\sigma_j^L(t)\,dt}{K_t[T_0,T_n]^2}. \tag{8.4.14}$$

可以将以上近似方差代入互换期权的定价公式 (8.4.9). 这样可以得到给定 LIBOR 及其波动率时的互换期权的近似定价.

这种"冻结"权函数得到的近似解的精度已经有理论上和数值试验上的研究 (Brigo and Liinev, 2005). Hull 和 White (2000) 提出了一个稍微有点复杂的方法, 在第一步计算 $K_t[T_0,T_n]$ 的微分时不将权函数冻结, 由此得到一个类似的近似. 与直接的蒙特卡罗模拟方法相比, 这两种近似方法都有足够高的精度. 这并不意外, 因为对数正态 LIBOR 市场模型和对数正态互换市场模型在分布上是"相近的". 更多关于互换利率模型的理论和校准的近期工作参见文献 (Galluccio and Ly, 2007).

8.4.2 对数正态 LIBOR 市场模型下互换期权的近似定价

若使用年金 $\widehat{B}(t;T_0,T_n)$ 作为计价单位, 那么在对数正态互换市场模型下, 互换期权具有 Black 型的定价公式. 因为互换市场模型和 LIBOR 市场模型并不相容, 所以在 LIBOR 市场模型下, 远期互换的波动率并不服从对数正态分布. 这给利率上限和互换期权市场下波动率的校准工作带来了很大的困难. 虽然在同一个测度下, 远期互换利率和远期 LIBOR 的波动率不能同时服从对数正态分布, 但两者之间的差距很小. 在此, 将在对数正态 LIBOR 市场模型下求得远期互换利率的对数正态近似, 然后利用这个近似再在 LIBOR 模型下给互换期权定价.

首先, 设 A 表示互换期权在 T_0 实施这一事件, $\mathbf{1}_A$ 表示相应的示性随机变量. 注意到事件 A 发生当且仅当

$$
\begin{aligned}
K_{T_0}[T_0, T_n] = \frac{B(T_0,T_0) - B(T_0,T_n)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(T_0,T_i)} > X \\
\Leftrightarrow 1 > (1+\alpha_n X)B(T_0,T_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X B(T_0,T_i) \\
= B_{fix}(T_0; T_0, T_n, X),
\end{aligned}
\tag{8.4.15}
$$

其中 $B_{fix}(t; T_0, T_n, X)$ 是固定利率为 X 且付息日期为 $T_1, \cdots, T_n$ 的单位面值的固定附息债券在 t 时刻的价值. 更准确地说, T_i 时刻固定附息债券的现金流 c_i 为

$$
c_i = \begin{cases} \alpha_i X, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ 1 + \alpha_n X, & i = n. \end{cases}
$$

互换期权在到期日 T_0 的收益为 (见式 (8.4.6))

$$
\begin{aligned}
&\max(K_{T_0}[T_0, T_n] - X, 0) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(T_0, T_i) \\
= &\left[1 - \sum_{i=1}^{n} c_i B(t, T_i)\right] \mathbf{1}_A \\
= &\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [L_{i-1}(T_0) - X] B(T_0, T_i) \mathbf{1}_A.
\end{aligned}
\tag{8.4.16}
$$

在时刻 $t < T_0$ 互换期权的价值为

$$
V(t; T_0, T_n, X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(t, T_i) E_{Q_{T_i}}[(L_{i-1}(T_0) - X)\mathbf{1}_A]. \tag{8.4.17}
$$

剩下的工作就是在对数正态 LIBOR 市场模型下计算

$$
E_{Q_{T_i}}[(L_{i-1}(T_0) - X)\mathbf{1}_A], \quad i = 1, 2, \cdots, n.
$$

如前所述,

$$
\mathbf{1}_A = 1 \Leftrightarrow B_{fix}(T_0; T_0, T_n, X) < 1,
$$

因为

$$
\begin{aligned}
B_{fix}(T_0; T_0, T_n, X) &= \sum_{i=1}^{n} c_i B(T_0, T_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{1 + \alpha_j L_{j-1}(T_0)},
\end{aligned}
\tag{8.4.18}
$$

所以计算期望值的困难来源于 $B_{fix}(T_0; T_0, T_n, X)$ 与所有的 LIBOR 相关. 在对数正态 LIBOR 市场模型中, 假设 $L_{i-1}(t)$ 在 Q_{T_i} 下的动态过程服从

$$\frac{dL_{i-1}(t)}{L_{i-1}(t)} = \sigma_i^L(t)\,dZ^i(t), \quad t < T_0,$$

其中 $Z^i(t)$ 为 Q_{T_i} 布朗过程. 通过积分有

$$L_{i-1}(T_0) = L_{i-1}(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^{T_0}\sigma_i^L(u)^2\,du + \int_t^{T_0}\sigma_i^L(u)\,dZ^i(u)\right). \tag{8.4.19}$$

记

$$\eta_i = \int_t^{T_0}\sigma_i^L(u)\,dZ^i(u),$$

利用测度变换公式,

$$dZ^i(u) = dZ^j(u) + \sum_{k=1}^{i}\frac{\alpha_k L_{k-1}(u)}{1+\alpha_k L_{k-1}(u)}\sigma_k^L(u)\sigma_i^L(u)\,du - \sum_{k=1}^{j}\frac{\alpha_k L_{k-1}(u)}{1+\alpha_k L_{k-1}(u)}\sigma_k^L(u)\sigma_j^L(u)\,du,$$

为得到 Q_{T_j} 下 η_i 的适当分布, Brace 等 (1997) 提出了“冻结系数”的近似方法, 取

$$L_{k-1}(u) \approx L_{k-1}(t), \quad t \leqslant u \leqslant T_0.$$

这样得到

$$\int_t^{T_0}\frac{\alpha_k L_{k-1}(u)}{1+\alpha_k L_{k-1}(u)}\sigma_k^L(u)\sigma_i^L(u)\,du \approx \frac{\alpha_k L_{k-1}(t)}{1+\alpha_k L_{k-1}(t)}\Delta_{ki}, \tag{8.4.20}$$

其中

$$\Delta_{ki} = \int_t^{T_0}\sigma_k^L(u)\sigma_i^L(u)\,du.$$

定义 ξ_i^j $(i,j=1,2,\cdots,n, j\neq i)$ 为

$$\xi_i^j = \int_t^{T_0}\sigma_i^L(u)\,dZ^j(u) + \mu_i^j, \tag{8.4.21}$$

其中

$$\mu_i^j = \sum_{k=1}^{i}\frac{\alpha_k L_{k-1}(t)}{1+\alpha_k L_{k-1}(t)}\Delta_{ki} - \sum_{k=1}^{j}\frac{\alpha_k L_{k-1}(t)}{1+\alpha_k L_{k-1}(t)}\Delta_{kj},$$

$\eta_1,\cdots,\eta_n$ 在远期测度 $Q_{T_j}(j=1,2,\cdots,n)$ 下关于滤波 $\mathcal{F}_t$ 的条件分布可以用 $\xi_1^j,\cdots,\xi_n^j$ 的分布来近似, 后者可以看成是与高斯随机变量 $N(\mu^j,\Delta)$ 相关的向量, 均值向量为 $\mu^j=(\mu_1^j,\cdots,\mu_n^j)$, 相关矩阵为 Δ, 它的第 (k,i) 个元素为 $\Delta_{ki}k$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

Brace 等 (1997) 提出进一步逼近矩阵 Δ 的方法, 他们假设 Δ 的第一个特征值远远大于第二个特征值. 因此, Δ 可以用秩为 1 的矩阵来近似, 这个矩阵的元素可以表示为

$$\Delta_{ki} = \gamma_k \gamma_i, \quad k, i = 1, 2, \cdots, n, \tag{8.4.22}$$

其中 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 为一些正常数. 定义

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{\alpha_k L_{k-1}(t)}{1 + \alpha_k L_{k-1}(t)} \gamma_k, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则 μ_i^j 可以近似为

$$\mu_i^j = \gamma_i (\delta_i - \delta_j), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{8.4.23}$$

在远期测度 Q_{T_j} 下, $B_{fix}(T_0; T_0, T_n, X)$ 可以近似为

$$\begin{aligned} & B_{fix}(T_0; T_0, T_n, X) \\ \approx & \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{k=1}^{i} \frac{1}{1 + \alpha_k L_{k-1}(t) \exp(\gamma_k (\widetilde{x}_k^j + \delta_k - \delta_j) - \gamma_k^2/2)}, \end{aligned} \tag{8.4.24}$$

其中 $\widetilde{x}_k^j$ $(k = 1, \cdots, n)$ 都是服从标准正态分布的随机变量. 因为相关矩阵 Δ 是近似秩 1 的, 所以 $\widetilde{x}_k^j$ 是零相关的.

定义函数列

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{k=1}^{j} \frac{1}{1 + \alpha_k L_{k-1}(t) \exp(\gamma_k (x + \delta_k - \delta_j) - \gamma_k^2/2)}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

设 $\widetilde{x}$ 为一个单变量的标准正态分布随机变量, 在 $Q_{T_j} (j = 1, 2, \cdots, n)$ 下, 近似地

$$f_j(\widetilde{x}) \approx B_{fix}(T_0; T_0, T_n, X). \tag{8.4.25}$$

因此, 在 Q_{T_j} 下, 事件 $\{\mathbf{1}_A = 1\}$ 近似等价于 $f_j(\widetilde{x}) < 1$. 可以证明, 函数 $f_j(x)$ 关于 x 单调递减, 并且 $f(-\infty) < 1 < f(\infty)$. 因此, 存在唯一解 x_j^*, 使得 $f_j(x_j^*) = 1$. 很容易得到

$$\begin{aligned} & E_{Q_{T_j}} [(L_{j-1}(T_0) - X) \mathbf{1}_A] \\ \approx & L_{j-1}(t) N(\gamma_j - x_j^*) - X N(-x_j^*), \quad j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{8.4.26}$$

最后, 对数正态 LIBOR 市场模型下互换期权在 t 时刻的价值可以近似表示为

$$\begin{aligned} & V(t; T_0, T_n, X) \\ \approx & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(t, T_i) [L_{i-1}(t) N(\gamma_i - x_i^*) - X N(-x_i^*)], \quad t < T_0. \end{aligned} \tag{8.4.27}$$

8.4.3 交叉货币互换

交叉货币互换的特点就是交换的现金流依赖于多种货币的浮动利率. 互换双方既有利率风险, 又有汇率风险. 在本小节中, 将考虑差分互换的产品性质、用途、定价以及对冲. 作为定价的一部分, 还会介绍对数正态 LIBOR 市场模型下交叉货币的各种定价公式.

1. *差分互换*

差分互换是基于本国和外国浮动 LIBOR 的现金流交换, 并且现金流以本国货币计价. 它的特点在于对本国资金, 利用外国 LIBOR 来决定差分互换双方的付款方式. 例如, 一张 5 年期差分互换, 一方每半年支付的利息依赖于本国 6 个月期 LIBOR, 而收到的利息依赖于 6 个月期欧元 LIBOR 减去差额. 这里对同样的本国货币使用两种利率, 利息是用本国货币来计价的. 注意到所有的付款都使用本国货币, 协议双方就此避免了汇率风险吗?

考虑一位资产管理员, 他正在想法提高一笔以美元为计价的低收益投资的利润. 他签订了一份差分互换协议, 使他有权得到 6 个月期的欧元 LIBOR 减去差额, 支付 6 个月期美元 LIBOR (图 8.2). 从投资中得到的美元 LIBOR 现金流正好抵消了差分互换的美元 LIBOR 付款. 从本质上, 投资者所得到的利润就是欧元 LIBOR 减去差额. 如果 6 个月期欧元 LIBOR 减去差额大于 6 个月期美元 LIBOR, 则投资者将从中受益. 差分互换使得投资者可以不用考虑汇率风险而对两国货币的利率差额进行投机.

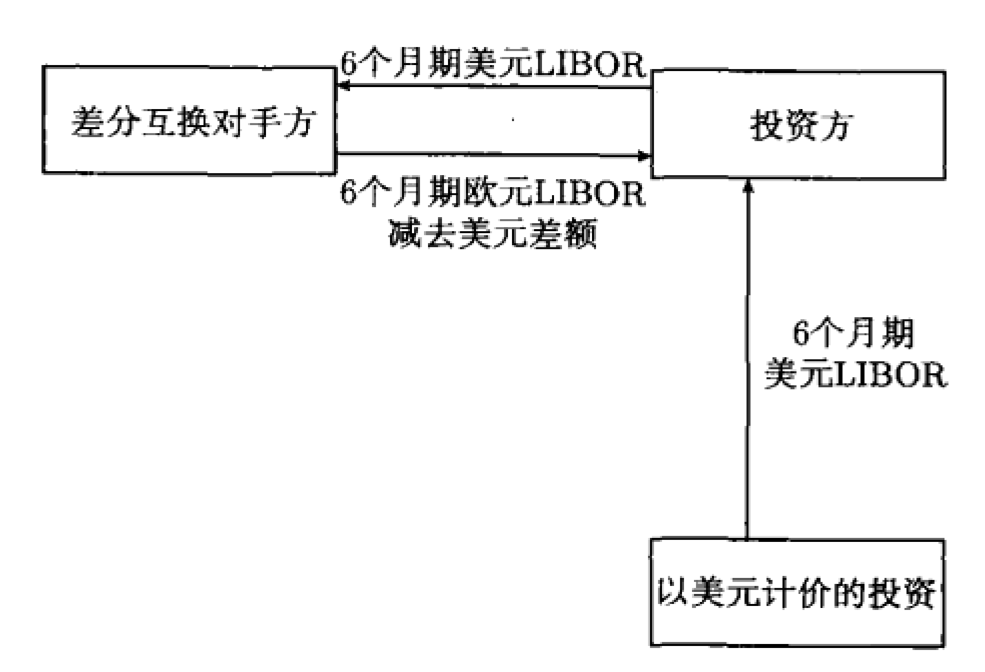


图 8.2 一个资产管理者用差分互换来提高一笔以美元计价的低收益投资的利润

2. *动态对冲策略*

设期限结构是 $\{T_0, T_1, \cdots, T_n\}$, 差分互换在 T_0 时签订, 付息日为 T_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 在最后一个付息日 T_n 后终止. 时间段 $(T_{i-1}, T_i]$ 上的本国和外国的 LI-

BOR 在 $T_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$ 重置. 在 T_i 时刻, 持有者支付的利息等于以本国货币计价的本金乘以本国 LIBOR L_{i-1}, 再乘以时间段 $(T_{i-1},T_i]$ 上的换算因子 α_i. 作为回报, 持有者收到的利息等于以本国货币计价的本金乘以外国 LIBOR $\widetilde{L}_{i-1}$, 再乘以 α_i. 所有的现金流都是以本国货币计价的. 令 $B(t,T)$ 和 $\widetilde{B}(t,T)$ 分别表示本国和外国到期日为 T 的单位面值债券在 t 时刻的价格. 为方便起见, 假设本金为 1, 如前所述,

$$L_{i-1}(T_{i-1})=\frac{1}{\alpha_i}\left[\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}-1\right] \quad 和 \quad \widetilde{L}_{i-1}(T_{i-1})=\frac{1}{\alpha_i}\left[\frac{1}{\widetilde{B}(T_{i-1},T_i)}-1\right],$$

持有者在时刻 T_i 以本国货币计价的净现金流为

$$\frac{1}{\widetilde{B}(T_{i-1},T_i)}-\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}.$$

为了建立差分互换, 需要在 T_0 时刻决定一项非零的“预付成本”(可能为正, 也可能为负). 或者, 这项成本也可以作为差分互换的差额延续互换的整个存续期.

Jamshidian (1994) 提出利用本国和外币滚动债券 (roll bonds) 的投资组合来进行以下的动态对冲: 在 $(T_{i-1},T_i]$ 内定义一个本国滚动债券, 它在到期日 T_i 支付 $\dfrac{1}{B(T_{i-1},T_i)}$ 元 (本国货币). 相应地, 一张外币滚动债券会在到期日 T_i 支付 $\dfrac{1}{\widetilde{B}(T_{i-1},T_i)}$ 元 (本国货币). 可以看出, 一张差分互换的持有者就相当于卖出一个 $(T_{i-1},T_i]$ 内的本国滚动债券投资组合, 再买进一个 $(T_{i-1},T_i]$ 内的双币种滚动债券投资组合, 将 $i=1,2,\cdots,n$ 累加. 在付息日 T_i 之后, 第 i 张本国和外币滚动债券就从投资组合中剔出.

假设当前时刻 t 落在时间段 $[T_{K-1},T_K)$ 内. 因为 $T_{K-1}\leqslant t<T_K$, 所以 $B(T_{K-1},T_K)$ 和 $\widetilde{B}(T_{K-1},T_K)$ 都是已知的, 于是 t 时刻本国和外国滚动债券的价值分别为 (以本国货币计价)

$$\frac{B(t,T_K)}{B(T_{K-1},T_K)} \quad 和 \quad \frac{B(t,T_K)}{\widetilde{B}(T_{K-1},T_K)}.$$

因此, 时刻 T_K 支付的净利息在 t 时刻的价值为

$$B(t,T_K)\left[\frac{1}{\widetilde{B}(T_{K-1},T_K)}-\frac{1}{B(T_{K-1},T_K)}\right], \quad T_{K-1}\leqslant t<T_K.$$

T_K 时刻的对冲策略就是买进一个单位的本国滚动债券, 同时卖出一个单位的外国滚动债券. 然而, 对时刻 $T_{K+1},T_{K+2},\cdots,T_n$ 的对冲就显得比较麻烦. 在时刻

$T_i(i=K+1,\cdots,n)$ 的净支付就是本国滚动债券支出 $\dfrac{1}{B(T_{i-1},T_i)}$ 减去外币滚动债券支出 $\dfrac{1}{\widetilde{B}(T_{i-1},T_i)}$. 为了复制本国滚动债券在 T_i 的支付, 只需持有 $\dfrac{1}{B(T_{i-1},T_i)}$ 个单位的 T_i 到期的单位面值的债券. 它在 T_{i-1} 时刻的价值刚好等于 1, 因此, 它在 t 时刻的现值为 $B(t,T_{i-1})t<T_{i-1}$. 外币滚动债券在时刻 T_i 的支付会面临外国利率风险, 所以必须在复制组合中持有不同到期日的外国贴现债券. 在时刻 T_{i-1} 之前持续调整这些外国债券, 使得它们的净现值保持为 0. 另外, 持有 T_i 到期的本国债券, 用以复制外币债券在 T_i 时刻的支付 (以本国货币计价). 在重置日 T_{i-1}, 外国债券都已到期清算, 而 T_i 到期的本国债券将继续持有到 T_i. 这样得到的投资组合就已经将汇率风险对冲掉了, 这是因为外国债券的净现值为 0.

设 $V_i(t)$ 表示投资组合在当前时刻 t 的价值, 该投资组合用来复制外币滚动债券 $\dfrac{1}{\widetilde{B}(T_{i-1},T_i)}$ 在时刻 $T_i(t\leqslant T_{i-1})$ 的支付. 有必要加上终值条件

$$V_i(T_{i-1})=\frac{B(T_{i-1},T_i)}{\widetilde{B}(T_{i-1},T_i)}. \tag{8.4.28}$$

令 $n_i^d(t)$ 表示在 t 时刻投资组合内 T_i 到期的本国贴现债券的持有份额. 类似地, 令 $n_i^{f,e}(t)$ 和 $n_i^{f,\ell}(t)$ 分别表示投资组合内 T_{i-1} 到期的外国贴现债券的持有份额和 T_i 到期的外国贴现债券的卖空份额, $X(t)$ 表示 t 时刻的汇率. 动态对冲就是选择

$$\begin{aligned}
n_i^d(t)&=\frac{V_i(t)}{B(t,T_i)},\\
n_i^{f,e}(t)&=\frac{V_i(t)}{\widetilde{B}(t,T_{i-1})X(t)},\\
n_i^{f,\ell}(t)&=\frac{V_i(t)}{\widetilde{B}(t,T_i)X(t)},
\end{aligned} \tag{8.4.29}$$

使得

$$V_i(t)=n_i^d(t)B(t,T_i)+X(t)\left[n_i^{f,e}(t)\widetilde{B}(t,T_{i-1})-n_i^{f,\ell}(t)\widetilde{B}(t,T_i)\right]. \tag{8.4.30}$$

剩下的工作就是寻找 $V_i(t)$, 以决定复制组合的构成. 假设组合是自融资的, 那么投资组合在时间微元 dt 内的微变 $dV_i(t)$ 是由债券价格和汇率的微变引起的. 假设投资组合中三种债券的权函数在 dt 内是“冻结的”, 运用式 (8.4.30) 得到

$$dV_i(t)=n_i^d(t)\,dB(t,T_i)+[X(t)+dX(t)][n_i^{f,e}(t)\,d\widetilde{B}(t,T_{i-1})-n_i^{f,\ell}(t)\,d\widetilde{B}(t,T_i)].$$

将式 (8.4.29) 代入以上等式, 可以得到

$$\begin{aligned}\frac{dV_i(t)}{V_i(t)} =& \frac{dB(t,T_i)}{B(t,T_i)} + \frac{d\widetilde{B}(t,T_{i-1})}{\widetilde{B}(t,T_{i-1})} - \frac{d\widetilde{B}(t,T_i)}{\widetilde{B}(t,T_i)} \\ &+ \frac{d\widetilde{B}(t,T_{i-1})}{\widetilde{B}(t,T_{i-1})}\frac{dX(t)}{X(t)} - \frac{d\widetilde{B}(t,T_i)}{\widetilde{B}(t,T_i)}\frac{dX(t)}{X(t)} \\ =& \frac{dB(t,T_i)}{B(t,T_i)} + \frac{d\widetilde{B}(t,T_{i-1})}{\widetilde{B}(t,T_{i-1})} - \frac{d\widetilde{B}(t,T_i)}{\widetilde{B}(t,T_i)} \\ &+ \text{cov}\left(\frac{d\widetilde{B}(t,T_{i-1})}{\widetilde{B}(t,T_{i-1})} - \frac{d\widetilde{B}(t,T_i)}{\widetilde{B}(t,T_i)}, \frac{dX(t)}{X(t)}\right).\end{aligned}$$

对上面的随机微分方程积分, 应用终值条件 (8.4.28) 得到

$$\begin{aligned}V_i(t) =& \frac{B(t,T_i)\widetilde{B}(t,T_{i-1})}{\widetilde{B}(t,T_i)} \\ &\times \exp\left(\int_t^{T_{i-1}} \text{cov}\left(\frac{d\widetilde{B}(u,T_i)}{\widetilde{B}(u,T_i)} - \frac{d\widetilde{B}(u,T_{i-1})}{\widetilde{B}(u,T_{i-1})},\right.\right. \\ &\left.\left.\frac{dX(u)}{X(u)} + \frac{d\widetilde{B}(u,T_i)}{\widetilde{B}(u,T_i)} - \frac{dB(u,T_i)}{B(u,T_i)}\right)\right). \qquad (8.4.31)\end{aligned}$$

差分互换在 t 时刻的价值 $S_{\text{diff}}(t)$ 就是 $T_K, T_{K+1}, \cdots, T_n$ 时刻的净支付在 t 时刻的价值之和, 因此有

$$\begin{aligned}S_{\text{diff}}(t) =& B(t,T_K)\left[\frac{1}{\widetilde{B}(T_{K-1},T_K)} - \frac{1}{B(T_{K-1},T_K)}\right] \\ &+ \sum_{i=K+1}^{n}[V_i(t) - B(t,T_{i-1})], \quad T_{K-1} \leqslant t < T_K. \qquad (8.4.32)\end{aligned}$$

通过构造一个动态调整的复制组合, 得到了显式的对冲策略. 因此, 可以得到以上与模型无关的定价公式.

相比之下, 在高斯模型下求解差分互换的定价公式更加直接 (见习题 8.41). 那么在对数正态 LIBOR 市场模型下求解差分互换的定价公式又是怎样的情况呢? 下面将证明能够得到差分互换定价公式的闭合解, 当然要先建立交叉货币的对数正态 LIBOR 市场模型.

3. 交叉货币 LIBOR 模型

回忆一下在确定性波动率的假设下, 对数正态 LIBOR 市场模型要求在相应的累积区间末的远期测度下远期 LIBOR 是对数正态鞅. 当市场模型推广到交叉货币模型时, 必须对两种货币世界中的所有到期日的远期 LIBOR 和所有到期日的远

期汇率的瞬时对数正态性赋予无套利条件. 更准确地说, 假设两种货币世界中的所有到期日的远期 LIBOR 都服从对数正态过程, 则两种货币之间的远期汇率只需要在某一个到期日是对数正态即可, 而其他到期日的远期汇率可以通过无套利条件给出. 如果假设所有到期日的远期汇率和一国货币世界中的所有到期日的 LIBOR 服从对数正态分布, 则另一国货币世界中的所有到期日的 LIBOR 都可以通过无套利条件决定 (Schlögl, 2002).

首先要建立一个测度, 将本国和外国 LIBOR 市场联系起来. 考虑 T_i 时刻本国和外国的远期概率测度, 分别记作 Q_{T_i} 和 $\widetilde{Q}_{T_i}$. 本国远期 LIBOR 过程 $L_{i-1}(t)$ 和外国远期 LIBOR 过程 $\widetilde{L}_{i-1}(t)$ 服从

$$dL_{i-1}(t) = L_{i-1}(t)\sigma_{i-1}^L(t)\,dZ^{T_i}(t), \tag{8.4.33a}$$

$$d\widetilde{L}_{i-1}(t) = \widetilde{L}_{i-1}(t)\widetilde{\sigma}_{i-1}^L(t)\,d\widetilde{Z}^{T_i}(t), \tag{8.4.33b}$$

其中 $Z^{T_i}(t)$ 和 $\widetilde{Z}^{T_i}(t)$ 分别为 Q_{T_i} 和 $\widetilde{Q}_{T_i}$ 下的标量布朗过程, $\sigma_{i-1}^L(t)$ 和 $\widetilde{\sigma}_{i-1}^L(t)$ 为确定的波动率, $T_0 < T_1 < \cdots < T_n$, $\{T_0, T_1, \cdots, T_n\}$ 为期限结构, $L_{i-1}(t)$ 和 $\widetilde{L}_{i-1}(t)$ 在相应的测度 Q_{T_i} 和 $\widetilde{Q}_{T_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 下为对数正态鞅. 如何建立一个测度, 将 $dZ^{T_i}(t)$ 和 $d\widetilde{Z}^{T_i}(t)$ 联系起来?

注意到无论是在本国还是外国市场中, 即期汇率过程 $X(t)$ 都是不可交易的. 但是, T_i 到期的外国债券 $\widetilde{B}(t, T_i)$ 以即期汇率 $X(t)$ 转换为本国货币后就可以看成是本国资产. 定义 T_i 时刻的远期汇率过程为

$$X(t, T_i) = \frac{X(t)\widetilde{B}(t, T_i)}{B(t, T_i)}, \tag{8.4.34}$$

它表示将 T_i 到期的外国债券换算成本国货币后, 再以 T_i 到期的本国债券价格正规化, 其中 $X(t, T_i)$ 被看成是 Q_{T_i} 下的鞅. 类似地, $\dfrac{1}{X(t, T_i)}$ 在 $\widetilde{Q}_{T_i}$ 下也是一个鞅. $X(t, T_i)$ 和 $\dfrac{1}{X(t, T_i)}$ 的动态过程可以表示为

$$dX(t, T_i) = X(t, T_i)\sigma_i^X(t)\,dZ^{T_i}(t), \tag{8.4.35a}$$

$$d\left(\frac{1}{X(t, T_i)}\right) = \frac{1}{X(t, T_i)}\sigma_i^{1/X}(t)\,d\widetilde{Z}^{T_i}(t), \tag{8.4.35b}$$

其中 $\sigma_i^X(t)$ 和 $\sigma_i^{1/X}(t)$ 为相应的确定性波动率. 联系 $\widetilde{Q}_{T_i}$ 和 Q_{T_i} 的 Radon-Nikodym 导数为

$$\frac{d\widetilde{Q}_{T_i}}{dQ_{T_i}} = \frac{X(T_i)\widetilde{B}(T_i, T_i)B(0, T_i)}{X(0)\widetilde{B}(0, T_i)B(T_i, T_i)} = \frac{X(T_i, T_i)}{X(0, T_i)},$$

限制在信息流 $\mathcal{F}_t$ 上, 有

$$\left.\frac{d\widetilde{Q}_{T_i}}{dQ_{T_i}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{X(t,T_i)}{X(0,T_i)}.$$

若 $X(t,T_i)$ 如式 (8.4.35a) 定义, 则有

$$\frac{d\widetilde{Q}_{T_i}}{dQ_{T_i}} = \exp\left(\int_0^{T_i} \sigma_i^X(u)\,dZ^{T_i}(u) - \frac{1}{2}\int_0^{T_i} \sigma_i^X(u)^2\,du\right).$$

由 Girsanov 定理推出

$$d\widetilde{Z}^{T_i}(t) = dZ^{T_i}(t) - \sigma_i^X(t)\,dt. \tag{8.4.36}$$

假设某个特定到期日 T_i 的远期汇率的波动率 $\sigma_i^X(t)$ 已经给定, 则另一个到期日 T_j $(T_j \neq T_i)$ 的波动率 $\sigma_j^X(t)$ 也被确定了. 利用无套利条件, 不同到期日之间的远期测度通过远期 LIBOR 波动率可以确定. 令 $\sigma_j^L(t)$ 和 $\widetilde{\sigma}_j^L(t)$ 分别为本国远期 LIBOR $L_j(t)$ 和外国远期 LIBOR $\widetilde{L}_j(t)$ 的确定性波动率. 在 8.3.2 小节中, 已经得到

$$dZ^{T_j}(t) = dZ^{T_{j+1}}(t) - \frac{\alpha_{j+1}L_j(t)}{1+\alpha_{j+1}L_j(t)}\sigma_j^L(t)\,dt, \tag{8.4.37a}$$

$$d\widetilde{Z}^{T_j}(t) = d\widetilde{Z}^{T_{j+1}}(t) - \frac{\alpha_{j+1}\widetilde{L}_j(t)}{1+\alpha_{j+1}\widetilde{L}_j(t)}\widetilde{\sigma}_j^L(t)\,dt. \tag{8.4.37b}$$

结合方程 (8.4.36), (8.4.37a), (8.4.37b), 可以得到 $\sigma_i^X(t)$ 和 $\sigma_j^X(t)$ $(j \neq i)$ 之间的关系. 特别地, $\sigma_i^X(t)$ 和 $\sigma_{i+1}^X(t)$ 有如下关系：

$$\sigma_i^X(t) = \frac{\alpha_{i+1}\widetilde{L}_i(t)}{1+\alpha_{i+1}\widetilde{L}_i(t)}\widetilde{\sigma}_i^L(t) - \frac{\alpha_{i+1}L_i(t)}{1+\alpha_{i+1}L_i(t)}\sigma_i^L(t) + \sigma_{i+1}^X(t). \tag{8.4.38}$$

本币和外币的远期测度之间的关系详如图 8.3 所示 (Schlögl, 2002).

另外, 可以假定一种货币的远期 LIBOR 为对数正态的, 并且所有远期汇率也是对数正态的. 通过式 (8.4.36), 远期 LIBOR 可以由无套利条件确定. 下面将说明利用本国和外国远期 LIBOR 的这种特定假设可以为差分互换提供一种有效的定价方法.

差分互换的定价

假设本金为 1, 想要找出差分互换的持有者在 0 时刻的价值. 持有者根据外国 LIBOR 收到利息, 根据本国 LIBOR 支出利息, 并且所有的现金流都以本国货币计价. 将利息的价值表示为相应测度下的贴现期望后得到

$$S_{\text{diff}} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}B(0,T_{i+1})E_{Q_{T_{i+1}}}\left[\widetilde{L}_i(T_i) - L_i(T_i)\right]. \tag{8.4.39}$$

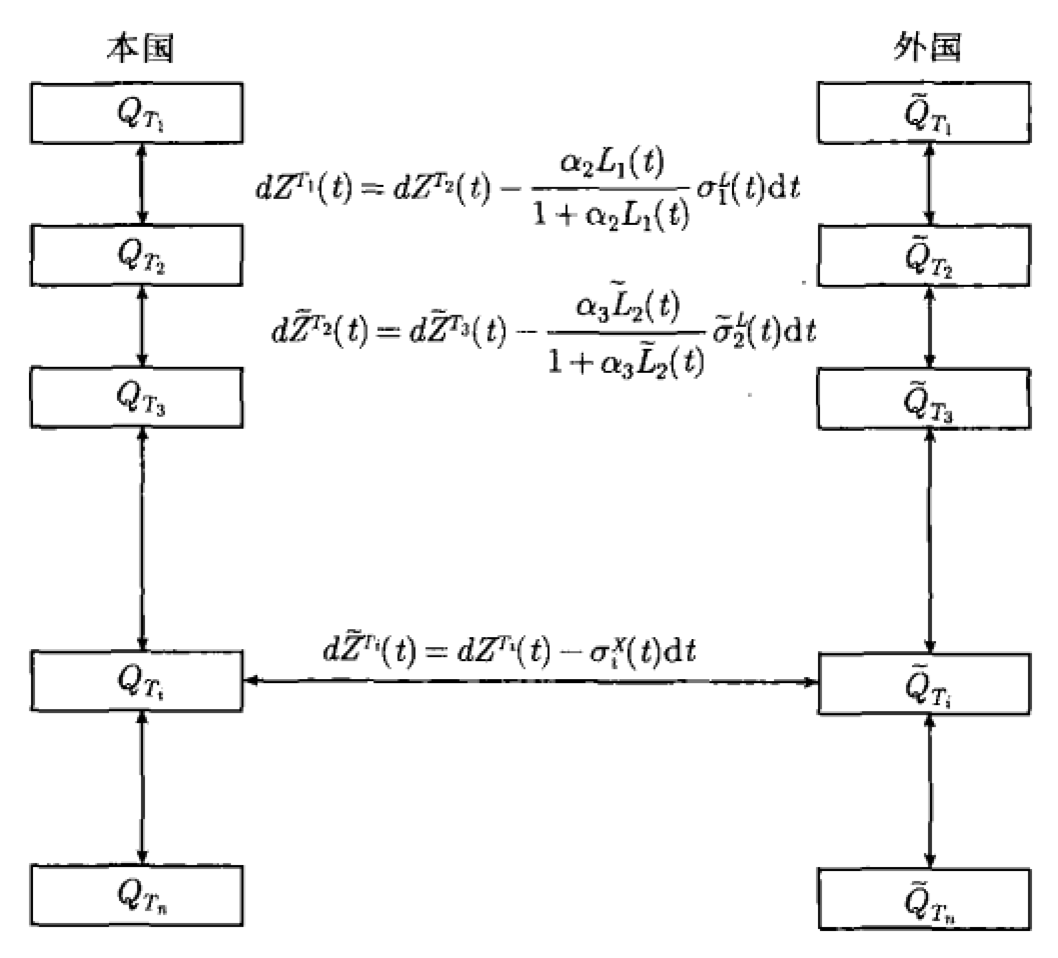


图 8.3 本币和外币的远期测度之间的关系, 假定所有本币和外币的 LIBOR 都是对数正态的, 而某一个特定到期日的远期汇率指定为服从对数正态分布

因为 $L_i(t)$ 在 $Q_{T_{i+1}}$ 下是一个对数正态鞅, 所以有

$$E_{Q_{T_{i+1}}}\left[L_i(T_i)\right]=L_i(0).$$

这样只需计算 $E_{Q_{T_{i+1}}}\left[\widetilde{L}_i(T_i)\right]$. 下面考虑两种不同的交叉货币 LIBOR 模型.

(i) 所有到期日的**外国** (foreign) 远期 LIBOR 和远期汇率都是指定的. 在这种情况下有

$$\begin{aligned} d\widetilde{L}_i(t) &= \widetilde{L}_i(t)\widetilde{\sigma}_i^L(t)\,d\widetilde{Z}^{T_{i+1}}(t) \\ &= \widetilde{L}_i(t)\widetilde{\sigma}_i^L(t)\left[dZ^{T_{i+1}}(t)-\sigma_i^X(t)\,dt\right], \end{aligned} \tag{8.4.40}$$

所以

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_i(t)=\widetilde{L}_i(0)\exp&\left(-\int_0^t\widetilde{\sigma}_i^L(u)\left[\sigma_i^X(u)+\frac{\widetilde{\sigma}_i^L(u)}{2}\right]du\right)\\ &\times\exp\left(\int_0^t\widetilde{\sigma}_i^L(u)\,dZ^{T_{i+1}}(u)\right), \end{aligned}$$

从而,

$$E_{Q_{T_{i+1}}}\left[\widetilde{L}_i(t)\right]=\widetilde{L}_i(0)\exp\left(-\int_0^{T_i}\widetilde{\sigma}_i^L(u)\sigma_i^X(u)\,du\right).$$

差分互换的价值可以表示为

$$S_{\text{diff}} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} B(0, T_{i+1}) \times \left[\widetilde{L}_i(0) \exp\left(-\int_0^{T_i} \widetilde{\sigma}_i^L(u) \sigma_i^X(u)\, du \right) - L_i(0) \right]. \tag{8.4.41}$$

(ii) 所有到期日的**本国** (domestic) 远期 LIBOR 和远期汇率都是指定的. 运用式 (8.4.38), 外国远期 LIBOR $\widetilde{L}_i(t)$ 服从

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{L}_i(t)}{\widetilde{L}_i(t)} =& \widetilde{\sigma}_i^L(t)\, d\widetilde{Z}^{T_{i+1}}(t) \\ =& \frac{1+\alpha_{i+i}\widetilde{L}_i(t)}{\alpha_{i+1}\widetilde{L}_i(t)} \left[\sigma_i^X(t) - \sigma_{i+1}^X(t) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{i+1} L_i(t)}{1+\alpha_{i+1} L_i(t)} \sigma_i^L(t) \right] d\widetilde{Z}^{T_{i+1}}(t),\end{aligned} \tag{8.4.42}$$

其中波动率 $\sigma_i^X(t), \sigma_{i+1}^X(t)$ 和 $\sigma_i^L(t)$ 是确定的. 随机微分方程 (8.4.42) 没有解析解, 但是, 如果假设 $\dfrac{\alpha_{i+1} L_i(t)}{1+\alpha_{i+1} L_i(t)}$ 在 $Q_{T_{i+1}}$ 下的方差很小, 则

$$\frac{\alpha_{i+1} L_i(t)}{1+\alpha_{i+1} L_i(t)} \approx \frac{\alpha_{i+1} L_i(0)}{1+\alpha_{i+1} L_i(0)},$$

从而

$$d\widetilde{L}_i(t) \approx \left[\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \widetilde{L}_i(t) \right] \widehat{\sigma}_i^L(t)\, d\widetilde{Z}^{T_i+1}(t), \tag{8.4.43}$$

其中 $\widehat{\sigma}_i^L(t)$ 为

$$\widehat{\sigma}_i^L(t) = \sigma_i^X(t) - \sigma_{i+1}^X(t) + \frac{\alpha_{i+1} L_i(0)}{1+\alpha_{i+1} L_i(0)} \sigma_i^L(t).$$

运用以上近似方法, $\widetilde{L}_i(t)$ 的近似解为

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_{i+1}(t) \approx& -\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \left[\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \widetilde{L}_i(0) \right] \\ & \times \exp\left(\int_0^t \widehat{\sigma}_i^L(u)\, d\widetilde{Z}^{T_{i+1}}(u) - \int_0^t \widehat{\sigma}_i^L(u) \left[\sigma_{i+1}^X(u) + \frac{\widehat{\sigma}_i^L(u)}{2} \right] du \right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}& E_{Q_{T_{i+1}}}[\widetilde{L}_i(t)] \\ \approx& \left[\frac{1}{\alpha_{i+1}} + \widetilde{L}_i(0) \right] \exp\left(-\int_0^t \widehat{\sigma}_i^L(u) \sigma_{i+1}^X(u)\, du \right) - \frac{1}{\alpha_{i+1}}.\end{aligned} \tag{8.4.44}$$

8.5 习　题

8.1 证明风险中性测度 Q 和 T- 远期测度 Q_T 相同当且仅当短期利率 r_t 是确定性的. 并且即时远期利率可以表示为

$$F(t,T) = E_Q\left[r_T \frac{e^{-\int_t^T r_u\,du}}{B(t,T)}\right],$$

其中 $B(t,T)$ 为 T 到期的贴现债券在 t 时刻的价值.

8.2 考虑一张未定权益, 它在 T' 时刻的收益 $X_{T'}$ 是已知的, 但它在以后的 T $(T>T')$ 时刻支付. 证明这个未定权益在 t 时刻的价值为

$$\begin{aligned} X_t &= E_Q^t\left[e^{-\int_t^T r_u\,du} X_{T'}\right] \\ &= E_Q^t\left[e^{-\int_t^{T'} r_u\,du} X_{T'} B(T',T)\right], \end{aligned}$$

其中 $B(T',T)$ 为 T 到期的贴现债券在 T' 时刻的价值. 解释这个结果的金融意义.

8.3 证明由式 (8.1.7) 定义的随机过程 $\xi_t^T t \geqslant 0$ 在 Q 下是一个正鞅, 并且在 Q 下, ξ_t^T 的期望等于 1, 其中 Q 为风险中性测度.

8.4 在风险中性测度 Q 下, 瞬时远期利率 $F(t,T)$ 的动态过程为

$$dF(t,T) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_B^i}{\partial T}(t,T)\sigma_B^i(t,T)\,dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma_B^i}{\partial T}(t,T)\,dZ_i(t),$$

其中 $(Z_1(t),\cdots,Z_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为 Q 下的 m 维布朗过程. 设 $(W_1(t),\cdots,W_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为 T' 远期测度 $Q_{T'}$ 下的 m 维布朗过程, 记

$$\dot{\sigma}_B(t,T) = \frac{\partial \sigma_B^i}{\partial T}(t,T).$$

证明随机过程 $F(t,T)$ 在 $Q_{T'}$ 下服从

$$dF(t,T) = \sum_{i=1}^m \dot{\sigma}_B^i(t,T)\,dW_i(t) + \sum_{i=1}^m \dot{\sigma}_B^i(t,T)\left[\sigma_B^i(t,T') - \sigma_B^i(t,T)\right]dt.$$

特别地, 当 $T'=T$ 时有

$$dF(t,T) = \sum_{i=1}^n \dot{\sigma}_B^i(t,T)\,dW_i(t).$$

8.5 令 $R(t,t+\delta)$ 表示 $t+\delta$ 到期的贴现债券在时间段 $(t,t+\delta]$ 内的到期收益率, $f(0,t,t+\delta)$ 为零时刻观察到的时间段 $(t,t+\delta]$ 上的远期利率. 令 $\sigma_B(t,T)$ 表

示贴现债券 $B(t,T)$ 的波动率, 证明 $R(t,t+\delta)$ 可以表示为 (El-Karoui and Geman, 1994)

$$R(t,t+\delta)=f(0,t,t+\delta)+\frac{1}{\delta}\int_0^t[\sigma_B(u,t+\delta)-\sigma_B(u,t)]\,dZ(u)$$
$$+\frac{1}{2\delta}\int_0^t[\sigma_B(u,t+\delta)-\sigma_B(u,t)]^2\,du,$$

其中 $Z(u)$ 为 t 远期测度 Q_t 下的布朗过程. 进一步, 当债券价格波动率是确定的时, 证明

$$E_{Q_t}[R(t,t+\delta)]=f(0,t,t+\delta)+\frac{\delta}{2}\mathrm{var}(R(t,t+\delta)).$$

8.6　在 t 时刻观察到的未来时段 $(T_1,T_2]$ 内的远期利率可以通过债券价格由下式给出:

$$\frac{1}{T_2-T_1}\ln\frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}.$$

另一方面, 在风险中性测度下给定 t 的信息, 则未来利率可以由在 T_1 时刻观察到的 T_2 到期的短期利率的期望值给出. 假设利率过程服从 Hull-White 模型, 找出远期利率和未来利率的差值.

8.7　在风险中性测度 Q 下, 资产 $S(t)$ 的价格过程和贴现债券的价格过程服从

$$dS(t)=S(t)[r(t)\,dt+\sigma_1(t)\,dZ_1(t)+\sigma_2(t)\,dZ_2(t)],$$
$$dB(t,T')=B(t,T')[r(t)\,dt+\sigma_B(t,T')\,dZ_1(t)],$$

其中 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 为不相关的标准 Q 布朗过程, $\sigma_B(t,t)=0$ 且波动率为依赖于时间的函数.

(a) 求 $\mathrm{cov}(S(t),B(t,T'))$;

(b) 假设在 T 远期测度 Q_T 下使用债券价格 $B(t,T)$ 作为计价单位, 证明以上随机微分方程的解为 (Nielsen and Sandmann, 1996)

$$S(t)=S(t_0)\frac{B(t,T)}{B(t_0,T)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t[\sigma_1(u)-\sigma_B(u,T)]^2+\sigma_2^2(u)\right)du$$
$$+\int_{t_0}^t[\sigma_1(u)-\sigma_B(u,t)]\,dZ_1^T(u)+\int_{t_0}^t\sigma_2(u)\,dZ_2^T(u),$$
$$\frac{B(t,T')}{B(t_0,T')}=\frac{B(t,T)}{B(t_0,T)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t[\sigma_B(u,T')-\sigma_B(u,T)]^2\,du\right)$$
$$+\int_{t_0}^t[\sigma_B(u,T')-\sigma_B(u,T)]\,dZ_1^T(u),$$

其中 $Z_1^T(t)$ 和 $Z_2^T(t)$ 为 T 远期测度 Q^T 下不相关的标准 Wiener 过程.

8.8 随机利率的欧式看涨期权的价格也可以通过求解偏微分方程得到. 令资产价值过程 S_t 和短期利率过程 r_t 服从

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t\,dt + \sigma_S(t)\,dZ_S,$$
$$dr_t = \mu_r(t)\,dt + \sigma_r(t)\,dZ_r,$$

其中 $dZ_S\,dZ_r = \rho\,dt$. 令 λ_r 表示短期利率风险的市场价格. 令 $c(S,r,t)$ 表示敲定价为 X 且到期日为 T 的欧式看涨期权在 t 时刻的价值.

(a) 证明 $c(S,r,t)$ 满足的方程为

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2(t)}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \rho\sigma_S(t)\sigma_r(t)S\frac{\partial^2 c}{\partial S\partial r} + \frac{\sigma_r^2(t)}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}$$
$$+rS\frac{\partial c}{\partial S} + [\mu_r(t) - \lambda_r\sigma_r(t)]\frac{\partial c}{\partial r} - rc = 0;$$

(b) 令 $B(r,t;T)$ 表示贴现债券价格, 并且满足

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\sigma_r^2(t)}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + [\mu_r(t) - \lambda_r\sigma_r(t)]\frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0,$$

债券价格有如下形式的解:

$$B(r,t) = a(t)r + b(t),$$

定义 $\xi = S/B$ 和 $u = c/B$, 证明 $u(\xi,t)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left[\frac{\sigma_S^2(t)}{2} - \rho\sigma_S(t)\sigma_r(t)a(t) + \frac{\sigma_r^2(t)a^2(t)}{2}\right]\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0;$$

(c) 证明随机利率的欧式股票看涨期权的价值为

$$c(S,r,t) = SN(d_+) - XB(r,t)N(d_-),$$

其中

$$d_\pm = \frac{\ln\dfrac{S}{B(r,t)X} \pm \dfrac{\overline{\sigma}^2}{2}(T-t)}{\overline{\sigma}\sqrt{T-t}},$$

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T \left[\sigma_S^2(u) - 2\rho\sigma_S(u)\sigma_r(u)a(u) + \sigma_r^2(u)a^2(u)\right]du.$$

8.9 令 $X(t)$ 表示汇率过程, 即一单位外币可以兑换成 $X(t)$ 单位本币, $r_d(t)$ 和 $r_f(t)$ 分别表示本币和外币的无风险利率, $B_d(t,T)$ 和 $B_f(t,T)(t \leqslant T)$ 分别表示 T 到期的本国和外国的债券价格过程. 在本国风险中性测度 Q_d 下, $X(t)$ 和 $B_d(t,T')$ 服从以下过程:

$$dX(t) = X(t)\left\{[r_d(t) - r_f(t)]\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_X^i(t)\,dZ_d^i(t)\right\},$$

$$dB_d(t,T) = B_d(t,T)\left[r_d(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_d^i(t,T)\,dZ_d^i(t)\right],$$

其中 $(Z_d^1(t), \cdots, Z_d^n(t))^{\mathrm{T}}$ 为 Q_d 下的 n 维布朗过程. 令 $(\sigma_f^1(t,T), \cdots, \sigma_f^n(t,T))^{\mathrm{T}}$ 是 $B_f(t,T)$ 的波动率, 证明 $B_f(t,T)$ 在 Q_d 下的动态过程为

$$dB_f(t,T) = B_f(t,T)\left\{\left[r_f(t) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_f^i(t,T)\sigma_X^i(t)\right] dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_f^i(t,T)\,dZ_d^i(t)\right\}.$$

使用 T 到期的本国债券价格 $B_d(t,T)$ 作为计价单位, 找出使测度从 Q_d 变化到 T 到期的本国远期测度 Q_d^T 的 Radon-Nikodym 导数. 求解汇率过程 (Nielsen and Sandmann, 2002).

8.10 在风险中性测度下, S_t 适合以下的几何布朗过程:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t\,dt + \sigma\,dZ_t.$$

令 $B(t,T)$ 是 T 到期的贴现债券在 t 时刻的价值. 在远期测度 Q_T 下, 即用 $B(t,T)$ 作为计价单位, 证明

$$E_{Q_T}^t\left[\frac{S_T}{S_t^*}\right] = \begin{cases} \dfrac{B(t,t^*)}{B(t,T)}, & t \leqslant t^*, \\[2ex] \dfrac{S_t}{S_{t^*}B(t,T)}, & t > t^*. \end{cases}$$

试给出上述结果的金融意义.

8.11 要在随机利率的 Merton 风险债券模型下计算浮动利率债务和固定利率债务的信用收益的差值 (Ikeda, 1995). 令 A_t 和 r_t 分别表示公司资产价值和短期利率, 它们服从

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu\,dt + \sigma_A\,dZ_A(t), \quad dr_t = \alpha(\gamma - r_t)\,dt + \sigma_r\,dZ_r(t),$$

并且 $dZ_A\,dZ_r = \rho\,dt$. 对于可违约的固定利率债务, 在债务到期日 T 的收益是 $\min(A_T, F)$, 其中 F 为固定的票面值. 但是对于浮动利率债务, 票面值在到期日的价值是随机的, 它的价值为

$$F_T = De^{\int_0^T r_u\,du},$$

其中 D 为一个常数. 随机票面值等于初始存款为 D 的货币市场账户在 T 年的价值. 令 $B(r,t;T)$ 表示相应的无违约风险的贴现债券价格, $\sigma_B(r,t;T)$ 表示相应的债券波动率.

(a) 在条件 $A_t = A$ 和 $r_t = r$ 下, 证明可违约固定利率债务在当前时刻 t 的价值为

$$V_X(A,r,t) = AN(-h_X) + FB(r,t;T)N(h_X - \overline{\sigma}_X),$$

其中

$$h_X = -\frac{\ln k_X}{\overline{\sigma}_X} + \frac{\overline{\sigma}_X}{2}, \quad k_X = \frac{B(r,t;T)F}{A},$$

$$\overline{\sigma}_X^2 = \int_t^T [\sigma_A^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B(r,u;T) + \sigma_B^2(r,u;T)]\, du.$$

(b) 记 $D_t = De^{\int_0^t r(u)\, du}$, 它在 t 时刻是已知的, 因为从 0 到 t 的利率过程是已知的. 证明可违约的浮动利率债务的价值为

$$V_L(A,r,t) = AN(-h_L) + D_t N(h_L - \sigma_A\sqrt{\tau}),$$

其中

$$h_L = -\frac{\ln k_L}{\sigma_A\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma_A\sqrt{\tau}}{2}, \quad k_L = \frac{D_t}{A} \text{ and } \tau = T - t.$$

有趣的是, $V_L(A,r,t)$ 与债券波动率无关, 为什么?

提示: 令 $Y(r,t;T)$ 表示初始存款为 D 的货币市场账户的价值, $Y(t)$ 的动态过程是 $dY = r_t Y\, dt$, 分别用 $B(r,t;T)$ 和 $Y(r,t;T)$ 作为固定利率债务和浮动利率债务定价过程中的计价单位.

8.12 考虑一张欧式看涨期权, 敲定价为 X, 到期日为 T, 标的是以到期日为 T' 的贴现债券为标的的期货, 推导高斯 HJM 期限结构模型下这张期权的价值.

提示: 运用式 (8.1.20) 中远期价格和期货价格的关系, 根据式 (8.1.14a) 中的定义计算 $\overline{\mu}_F$.

8.13 设短期利率 $r(t)$ 服从扩展 Vasicek 模型

$$dr(t) = [\phi(t) - \alpha r(t)]\, dt + \sigma_r\, dZ(t).$$

证明敲定价为 X , 到期日为 T, 标的为 T' 到期的贴现债券的欧式看涨期权的价值为

$$c(t;T,T') = B(t,T')N(d_1) - XB(t,T)N(d_2),$$

其中 $B(t,T)$ 为贴现债券价格,

$$d_1 = \frac{1}{\widehat{\sigma}} \ln \frac{B(t,T')}{XB(t,T)} + \frac{\widehat{\sigma}}{2}, \quad d_2 = d_1 - \widehat{\sigma},$$

$$\widehat{\sigma} = \frac{\sigma_r}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha(T'-T)}\right]\sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}}.$$

另外，证明标的为同一张贴现债券的欧式看跌和看涨期权之间的看跌–看涨平价关系为

$$c(t;T,T') + XB(t,T) = p(t;T,T') + B(t,T').$$

8.14 在风险中性测度 Q 下，假设债券价格 $B(t,T)$ 与短期利率 r_t 的关系为

$$B(t,T) = e^{-a(\tau)-b(\tau)r_t}, \quad \tau = T - t.$$

如下定义概率测度 Q_T 和 Q_{T^*}：

$$\frac{dQ_T}{dQ} = \frac{e^{-\int_t^T r_u\,du}}{B(t,T)},$$

$$\frac{dQ_{T^*}}{dQ} = \frac{e^{-\int_t^T r_u\,du}B(T,T^*)}{B(t,T^*)}.$$

考虑一张 T 到期的欧式看涨期权，标的为 $T^*(T < T^*)$ 到期的贴现债券 $B(t,T^*)$. 令 X 为债券期权的敲定价格，定义

$$\overline{r} = \frac{\ln X - a(T^* - T)}{b(T^* - T)}.$$

在条件 $r_t = r$ 下，证明债券期权的价格为

$$c(r,t) = B(t,T^*)Q_{T^*}[r_T < \overline{r}] - XB(t,T)Q_T[r_T < \overline{r}].$$

8.15 假设风险中性测度下远期利率 $F(t,T)$ 为

$$dF(t,T) = \left(\sum_{j=1}^{J}\sigma_F^j(t,T)\int_t^T \sigma_F^j(t,T)\,du\right)dt + \sum_{j=1}^{J}\sigma_F^j(t,T)\,dZ_j(t).$$

考虑一个附息债券，它有 n 个息票，权函数 $w_i(r,t)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 如式 (8.2.12) 定义. 证明附息债券的随机久期 $D(t)$ 是下面方程的解 (Munk, 1999)：

$$\sum_{j=1}^{J}\left[\int_0^{D(t)}\sigma_F^j(t,t+u)\,du\right]^2 = \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{n}w_i(r,t)\int_0^{T_i-t}\sigma_F^j(t,t+u)\,du\right)^2,$$

其中 T_i 为第 i 个息票支付的日期.

8.16 假设在单因子 HJM 模型下，远期利率的波动率有以下形式：

$$\sigma_F(t,T) = \sigma_1 + \sigma_2[1 - e^{-\alpha(T-t)}],$$

证明不能使用 Jamshidian 分解技巧 (Jamshidian, 1989) 为附息债券期权定价, 其中附息债券的付息日为 $T_i(i=1,2,\cdots,n)$. 计算附息债券的欧式看涨期权的近似价格公式, 债券的权函数 $w_i(r,t)$ 如式 (8.2.12) 定义.

提示: 在给定波动率结构下, 短期利率过程是非 Markov 的. 随机久期是下面方程的解 $D(t)$,

$$\begin{aligned}&(\sigma_1+\sigma_2)^2D(t)^2+\frac{\sigma_2^2}{\alpha^2}[1-e^{-\alpha D(t)}]^2\\=&(\sigma_1+\sigma_2)^2\left[\sum_{i=1}^n w_i(r,t)(T_i-t)\right]^2\\&+\frac{\sigma_2^2}{\alpha^2}\left\{\sum_{i=1}^n w_i(r,t)[1-e^{-\alpha(T_i-t)}]\right\}^2.\end{aligned}$$

8.17 令 $Y(t;\tau)$ 表示到期期限为 τ 的贴现债券在时刻 t 的收益. 在时间段 $(0,T]$ 内具有相同到期期限的收益 $Y(t;\tau)$ 的平均值为

$$A(T)=\frac{1}{T}\int_0^T Y(t;\tau)\,dt.$$

想要给一张欧式看涨期权定价, 它的标的为平均收益 $A(T)$, 在 T 时刻的到期收益为

$$c(T)=\max(A(T)-X,0),$$

其中 X 为敲定价格. 假设短期利率的风险中性过程适合连续 Ho-Lee 模型,

$$r(t)=f(0,t)+\frac{\sigma^2t^2}{2}+\sigma Z(t),$$

其中 $f(0,t)$ 为远期利率的初始期限结构, $Z(t)$ 为风险中性测度 Q 下的标准布朗过程. 证明平均收益看涨期权在时刻 t $(t<T)$ 的价格可以表示为 (He and Takahashi; 2000)

$$c(t)=\frac{1}{T\tau}\frac{B(0,T)}{B(0,t)}e^{-\sigma^2(T^3-t^3)/6}E_Q^t\left[e^{-\sigma\int_t^T Z(u)\,du}c(T)\right],$$

其中

$$c(T)=\max\left(\int_0^T\frac{B(0,u)}{B(0,u+\tau)}\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}(u+\tau)u\tau+\sigma\tau Z(u)\right)du-\ (1+X\tau)T,0\right).$$

8.18 考虑一个欧式看涨债券期权, 到期日为 T_0, 标的债券在时刻 T_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 支付 $A_i\geqslant 0$, 其中 $0<T_0<T_1<\cdots<T_n$. 假设零息债券价格 $B(t,T)$ 服从单因子 HJM 模型, 即

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)}=r(t)\,dt+\sigma_B(t,T)\,dZ_t,$$

确定的波动率满足

$$\sigma_B(t,t_2)-\sigma_B(t,t_1)=f(t_1,t_2)g(t),\quad g(t)>0.$$

证明敲定价为 X 的附息债券的欧式看涨期权在 0 时刻的价格为 (Henrard, 2003)

$$\sum_{i=1}^{n}A_iB(0,T_i)N(x+\alpha_i)-XB(0,T_0)N(x+\alpha_0),$$

其中 x 为以下方程的 (唯一) 解：

$$\sum_{i=1}^{n}A_iB(0,T_i)\exp\left(-\frac{\alpha_i^2}{2}-\alpha_ix\right)=XB(0,T_0),$$

并且 $\alpha_i>0\ (i=0,1,\cdots,n)$ 满足

$$\alpha_i^2=\int_0^T[\sigma_B(u,T_i)-\sigma_B(u,T)]^2\,du,$$

其中 T 为标的债券的到期日.

8.19 假设无套利的债券价格过程服从 m 维高斯 HJM 模型. 设 $t<T_0<T_1<\cdots<T_n$, α_i 是时间段 $(T_{i-1},T_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$ 内的换算因子.

(a) 具有预设下限利率 L_f 的下限是由一系列利率下限元组成的, 它们在 T_i 的收益是 $\alpha_i\max(L_f-L_{i-1}(T_{i-1}),0)\ (i=1,2,\cdots,n)$, 求下限在 t 时刻的价值;

(b) 缓期的利率上限元在 T_{i-1} 支付 $\alpha_i\max(L_{i-1}(T_{i-1})-L_c,0)$, 也就是说, 支付日与 LIBOR 的重置日是相同的, 注意到一般的利率上限元在 T_i 时刻支付相同的金额, 求此利率上限元在 t 时刻的价值;

(c) 有延期利率上限元的上限, 它的所有利率上限元都是在到期日 T_n 付款, 求这种延期上限在 t 时刻的价值.

8.20 假设汇率过程 $X(t)$, T 到期的本国和外国债券过程 $B_d(t,T)$ 和 $B_f(t,T)$ 均与习题 8.9 中的定义相同. 求 LIBOR 价差期权在 t 时刻的价值, 它在 $T+\delta$ 时刻支付

$$\alpha[L_d(T;\delta)-L_f(T;\delta)],$$

其中 $t<T, L_d(T;\delta)$ 和 $L_f(T;\delta)$ 分别为在 T 时刻观察到的时间段 $(T,T+\delta]$ 上的本国和外国 LIBOR.

8.21 假设 T 时刻到期的贴现债券价格过程 $B(t,T)$ 在风险中性测度 Q 下服从单因素子高斯 HJM 模型

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)}=r_t\,dt-\sigma_B(t,T)\,dZ_t.$$

上限期权是上限的看涨期权, 它在 T 时刻的到期收益为

$$\max\left(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{C}_i(T;T_{i-1},T_i)-X,0\right),\quad T<T_0<T_1<\cdots<T_n,$$

其中 $\mathcal{C}_i(T;T_{i-1},T_i)$ 为在 T_i 时刻支付 LIBOR L_{i-1}, 敲定价格为 X 的利率上限元在 T 时刻的价值. 因为上限可以看成是一系列零息债券的看跌期权, 所以上限期权可以看成是看跌期权的复合看涨期权. 对一张附息债券期权运用 Jamshidian 分解技巧 (Jamshidian, 1989), 求上限期权在 t 时刻的价值.

8.22 考虑一个组合的下限, 这个组合如下定义:

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1+\alpha_{i+1}L_i),$$

其中, L_i 在时刻 T_i 重置, α_{i+1} 为时间段 $(T_i,T_{i+1}]$ 内的换算因子. 此下限在到期日 T_n 的付款为

$$\max\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1+\alpha_{i+1}L_i),K\right).$$

假设贴现债券价格过程与习题 8.21 中相同, 证明这个组合的下限在 0 时刻的价值为 (Henrard, 2005)

$$\mathcal{F}(0;T_1,\cdots,T_n)=B(0,T_1)N(k+\sigma)+KB(0,T_n)N(-k),\quad 0\leqslant T_1,$$

其中

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^{\min(T_i,T_j)}[\sigma_B(u,T_{i+1})-\sigma_B(u,T_i)]\times[\sigma_B(u,T_{j+1})-\sigma_B(u,T_j)]\,du$$

以及

$$k=\frac{1}{\sigma}\left[\ln\frac{B(0,T_1)}{KB(0,T_n)}-\frac{\sigma^2}{2}\right].$$

提示: 利用恒等式

$$\sigma_B(u,T_n)-\sigma_B(u,T_i)=\sum_{j=1}^{n-1}[\sigma_B(u,T_{j+1})-\sigma_B(u,T_j)],$$

证明

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{T_i}[\sigma_B(u,T_{i+1})-\sigma_B(u,T_i)]\times[2\sigma_B(u,T_n)-\sigma_B(u,T_{i+1})-\sigma_B(u,T_i)]\,du.$$

8.23　对于 $T' < T$, 定义修正的远期测度 $Q_{T',T}$ 为 (Eberlein and Kluge, 2006)

$$\frac{dQ_{T,T'}}{dQ_T} = \frac{F(T',T',T)}{F(0,T',T)} = \frac{B(0,T)}{B(0,T')B(T',T)},$$

其中 $F(t,T',T) = \dfrac{B(t,T')}{B(t,T)}$ 表示债券的远期价格过程. 对 $t < T'$, 将这个密度限制在 $\mathcal{F}_t$ 上, 证明

$$\left.\frac{dQ_{T,T'}}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T')}{M(t)B(0,T')} = \left.\frac{dQ_T}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t}$$

(见式 (8.1.6)). 但是对 $T' < t < T$, 证明

$$\left.\frac{dQ_{T,T'}}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{B(T',T)M(t)B(0,T')}.$$

利用修正的远期测度, 证明 (见式 (8.2.27))

$$E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[\frac{1}{B(T_j,T_{j+1})}\mathbf{1}_{\{R_\ell(T_{j,i})\leqslant L(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i})\leqslant R_u(T_{j,i})\}}\right]$$
$$= E^t_{Q_{T_j,T_{j+1}}}\left[\mathbf{1}_{\{R_\ell(T_{j,i})\leqslant L(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i})\leqslant R_u(T_{j,i})\}}\right].$$

8.24　假设远期 LIBOR $L(t,T)$ 在风险中性测度 Q 下满足以下随机微分方程:

$$dL(t,T) = \mu(t,T)L(t,T)\,dt + L(t,T)\sum_{i=1}^n \sigma_i(t,T)\,dZ_i(t),$$

其中 $\sigma_i(t,T)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 为确定的波动率, $\mathbf{Z}(\mathbf{t}) = (Z_1(t),\cdots,Z_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为 Q 布朗运动. 定义

$$F_B(t,T,T+\delta) = \frac{B(t,T+\delta)}{B(t,T)},$$

它是标的为 $T+\delta$ 到期的贴现债券的 T 远期在 t 时刻的价格. 在 Q_T 测度下, 证明 $F_B(t)$ 满足

$$dF_B(t) = -F_B(t)[1 - F_B(t)]\sum_{i=1}^n \sigma_i(t,T)\,dZ_i^T(t),$$

其中 $\mathbf{Z}^T(t) = (Z_1^T(t),\cdots,Z_n^T(t))^{\mathrm{T}}$ 是 Q_T 布朗运动. 令 $V(x,t)$ 表示标的为 $T+\delta$ 到期的债券, 到期日为 T 的看跌期权的远期价格, 其中 x 为远期债券价格. 证明 V 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[x^2(1-x^2)\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t,T)\right]\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0,$$

终值条件为 $V(x,T) = \max(X - x, 0)$, 其中, X 为看跌期权的敲定价格, 求解 $V(x,t)$ (Miltersen et al., 1997).

8.25　假设上限的上限利率和下限的下限利率都等于 L. 令 $\mathcal{C}(t;T_0,\cdots,T_n)$ 和 $\mathcal{F}(t;T_0,\cdots,T_n)$ 分别表示上限和下限在 t 时刻的价值. 证明下面的上限–下限平价关系:

$$\mathcal{C}-\mathcal{F}=\sum_{i=1}^{n}[B(t;T_{i-1})-(1+\alpha_i L)B(t;T_i)].$$

8.26　单位本金的反向浮动证券的持有者有权在时刻 $T_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 收到 LIBOR $L_i(T_i)$, 同时支付 $\max(K-L_i(T_i),K')$ $(K>0,\ K'>0)$. 利用式 (8.3.10) 中定义的对数正态 LIBOR 市场模型, 求反向浮动证券在时刻 t $(t<T_0)$ 的价值.

8.27　假设分别如下定义修正的远期 LIBOR $L_i^m(t)$ 和期货 LIBOR $L_i^f(t)$:

$$1+\alpha_{i+1}L_i^m(t)=E_{Q_{T_i}}^t\left[\frac{1}{B(T_i,T_{i+1})}\right],$$
$$1+\alpha_{i+1}L_i^f(t)=E_Q^t\left[\frac{1}{B(T_i,T_{i+1})}\right],$$

其中 Q_{T_i} 和 Q 分别为 T_i 远期测度和风险中性测度. 假设贴现债券价格 $B(t,T)$ 服从高斯 HJM 过程, 证明 $L^m(t)$ 和 $L^f(t)$ 满足以下随机微分方程:

$$dL_i^m(t)=\frac{1+\alpha_{i+1}L_i^m(t)}{\alpha_{i+1}}\sum_{j=1}^{m}\left[\sigma_B^j(t,T_j)-\sigma_B^j(t,T_{j+1})\right]dZ_j^{T_i}(t),$$

$$dL_i^f(t)=\frac{1+\alpha_{i+1}L_i^f(t)}{\alpha_{i+1}}\sum_{j=1}^{m}\left[\sigma_B^j(t,T_j)-\sigma_B^j(t,T_{j+1})\right]dZ_j(t),$$

其中 $\mathbf{Z}^{T_i}(t)=(Z_1^{T_i}(t),\cdots,Z_m^{T_i}(t))^{\mathrm{T}}$ 为一个 m 维的 Q_{T_j} 布朗过程, $\mathbf{Z}(t)=(Z_1(t),\cdots,Z_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为一个 m 维的 Q 布朗过程.

8.28　考虑欧式看跌期权, 到期日为 T_{i-1}, 敲定价为 X, 标的为 T_i 到期的贴现债券, $0<X<1$. 回忆起第 i 张利率上限元等价于看跌债券期权, 利用对数正态 LIBOR 市场模型下的利率上限元的价格公式推导这张看跌债券期权的价格公式.

8.29　想要用 LIBOR 市场模型为习题 8.22 中定义的组合的下限定价. 现在, 假设 LIBOR $L_i(t)$ 服从算术布朗过程

$$dL_i(t)=\sigma_i^L(t)\,dZ_i^{T_{i+1}}(t),\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

其中 $\sigma_i^L(t)$ 为确定的波动率, $Z_i^{T_{i+1}}(t)$ 为 $Q_{T_{i+1}}$ 布朗运动. 假设末期测度 Q_{T_n} 下 $L_i(t)$ 的随机微分方程的漂移项"系数冻结", 证明这个组合的下限在 0 时刻的价值为 (Henrard, 2005)

$$\mathcal{F}(0;T_1,\cdots,T_n)=B(0,T_1)N(k+\sigma)+KB(0,T_n)N(-k),\quad 0\leqslant T_1,$$

其中

$$\sigma^2 = \lambda^{\mathrm{T}} S \lambda, \quad k = \frac{1}{\sigma}\left[\ln \frac{B(0,T_1)}{KB(0,T_n)} - \frac{\sigma^2}{2}\right],$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{L(0,T_2) + \dfrac{1}{\alpha_2}}, \cdots, \frac{1}{L(0,T_n) + \dfrac{1}{\alpha_n}}\right)^{\mathrm{T}},$$

α_{i-1} 为时间段 (T_i, T_{i-1}) $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 的换算因子, 矩阵 S 的第 (i, j) 项为

$$(S)_{ij} = \int_0^{\min(T_i,T_j)} \sigma_i^L(u)\sigma_j^L(u)\, du, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n-1.$$

8.30　考虑 LIBOR $L_i(t)$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 的对数正态 LIBOR 市场 (LLM) 模型, 它们的期限结构是 $\{T_0, T_1, \cdots, T_n\}$ $(0 < T_0 < T_1 < \cdots < T_n)$. 令 $v_i(t)$ 表示 $L_i(t)$ 的标量波动率, 记 $L_i(0) = L_{i,0}$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. 现在, $L_i(t)$ 满足

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = v_i(t)\, dZ_i(t), \quad 0 < t < T_i,\ i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

其中 $Z_i(t)$ 为 Q_{T_i} 布朗运动. 记 $\rho_{ij}(t)$ 是 $Z_i(t)$ 和 $Z_j(t)$ 的相关系数, 使得 $\rho_{ij}(t)\, dt = dZ_i(t)\, dZ_j(t)$. 定义

$$X_i(t) = \ln \frac{L_i(t)}{L_{i,0}} + \int_0^t \frac{v_i^2(u)}{2}\, du, \quad 0 < t < T_i,\ i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

在末期测度 Q_{T_n} 下, 证明 $X_i(t)$ 满足以下随机微分方程:

$$\begin{aligned} dX_i(t) = &-\sum_{j=i}^{n-1} \frac{\alpha_j v_j(t) v_i(t) \rho_{ij}(t) L_{i,0} e^{X_j(t) - \frac{1}{2}\int_0^t v_j^2(u)\, du}}{1 + \alpha_{j+1} L_{j,0} e^{X_j(t) - \frac{1}{2}\int_0^t v_j^2(u)\, du}}\, dt \\ &+ v_i(t)\, d\widetilde{Z}_i^n(t), \quad 0 < t < T_i,\ i = 0, 1, \cdots, n-1, \end{aligned}$$

初值条件为 $X_i(0) = 0$ 且 $\widetilde{Z}_i^{n+1}(t)$ 在 Girsanov 变化: $Q_{T_i} \to Q_{T_n}$ 下是 Q_{T_n} 布朗运动.

提示: 注意到 $\widetilde{Z}_1^n, \cdots, \widetilde{Z}_n^n$ 是 Q_{T_n} 布朗运动, 并且

$$d\widetilde{Z}_i^n\, d\widetilde{Z}_j^n = \rho_{ij}(t)\, dt.$$

这是因为概率测度的等价变化保持布朗运动的相关性. 形式地记

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \widehat{\mu}_i(t)\, dt + \sigma_i(t)\, d\widetilde{Z}_i^n,$$

然后可以确定 $\widehat{\mu}_i(t)$.

$$B(t,T_i) = B(t,T_{i+1})[1+\alpha_{i+1}L_i(t)],$$

并且注意到

$$\begin{aligned}&-B(t,T_{i+1})\widehat{\mu}_i(t)L_i(t)\,dt\\ &=dB(t,T_{i+1})\,dL_i(t)\\ &=B(t,T_{i+1})L_i(t)\sum_{j=i}^{n-1}\frac{\alpha_{j+1}L_j(t)}{1+\alpha_{j+1}L_j(t)}\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{ij}(t)\,dt.\end{aligned}$$

8.31　假设 $L_i(t)$ 如习题 8.30 满足 LLM 模型. 这里, 想要找到即期 LIBOR 测度 $Q_{\widetilde{M}}$ 下 $L_i(t)$ 的随机微分方程, 此测度下的计价单位是离散的货币市场账户过程 $\widetilde{M}$. $\widetilde{M}$ 的离散过程定义为

$$\widetilde{M}(T_j) = \prod_{k=0}^{j-1}\frac{1}{B(T_k,T_{k+1})},\quad \widetilde{M}(T_0)=1,\ j=1,2,\cdots,n.$$

证明在即期 LIBOR 测度 $Q_{\widetilde{M}}$ 下, $L_i(t)$ 的动态过程为

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \sum_{j=0}^{i-1}\frac{\alpha_{j+1}v_j(t)v_i(t)\rho_{ij}(t)L_j(t)}{1+\alpha_{j+1}L_j(t)}\,dt + v_i(t)\,d\widetilde{Z}_i(t),$$

其中 $\widetilde{Z}_i(t)$ 为 $Q_{\widetilde{M}}$ 布朗运动.

8.32　考虑缓期 LIBOR 付款在 t 时刻的价值, 证明

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_L(t) &= B(t,T_j)E^t_{Q_j}[\alpha_{j+1}L_j(T_j)]\\ &=\alpha_jL_j(t)+\int_0^\infty 2\alpha_j\alpha_{j+1}\mathcal{C}_j(t;T_j,T_{j+1},X)\,dX,\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{C}_j(t;T_j,T_{j+1},X)$ 是敲定价为 X, 重置日为 T_j, 在 T_{j+1} 付款 $\max(L_j(T_j)-X,0)$ 的利率上限元在 t 时刻的价值.

提示: 对于任何定义在 $y\geqslant 0$ 内的二次可微函数 $V(y)$ 有

$$V(y) = V(0)+yV'(0)+\int_0^\infty V''(X)\max(y-X,0)\,dX.$$

8.33　假设在远期测度 Q_{T_k} 下, $L_i(t)$ 的动态过程服从式 (8.3.23), 证明在 Q_{T_k} 下, LIBOR $L_i(T)$ 的分布可以用以下对数正态分布来近似 (Daniluk and Gataret, 2005):

$$L_i(T)\approx L_i(0)\exp\left(\int_0^T\sigma_{ik}(t,T)\,dZ^k(t)-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_i^L(t)^2\,dt\right.$$

$$+\int_0^T \mu_{ik}(t,T)\,dt\Bigg),$$

其中 $T \leqslant \min(T_i, T_k), C_{ik}(t,T) = \int_t^T \sigma_i^L(u)\sigma_k^L(u)\,du$, 并且

(i) $i < k$,

$$\sigma_{ik}(t,T) = \sigma_i^L(t) - \sum_{j=i+1}^{n} C_{ij}(t,T)\frac{K_j(0)}{1+\alpha_{j+1}K_j(0)}\sigma_j^L(t),$$

$$\mu_{ik}(t,T) = \sum_{j=i+1}^{k} K_j(0)\sigma_j^L(t)\left[-\sigma_i^L(t) + \frac{C_{ij}(t,T)}{1+\alpha_{j+1}L_j(0)}\sum_{\ell=j}^{k} K_\ell(0)\sigma_\ell^L(t)\right];$$

(ii) $i > k$,

$$\sigma_{ik}(t,T) = \sigma_i^L(t) + \sum_{j=k+1}^{i} C_{ij}(t,T)\frac{K_j(0)}{1+\alpha_{j+1}K_j(0)}\sigma_j^L(t),$$

$$\mu_{ik}(t,T) = \sum_{j=k+1}^{i} K_j(0)\sigma_j^L(t)\left[\sigma_i^L(t) + \frac{C_{ij}(t,T)}{1+\alpha_{j+1}L_j(0)}\sum_{\ell=k+1}^{j-1} K_\ell(0)\sigma_\ell^L(t)\right].$$

提示：运用部分积分可以证明

$$\int_0^T K_j(t)\sigma_j^L(t)\sigma_i^L(t)\,dt = \int_0^T K_j(0)\sigma_j^L(t)\sigma_i^L(t)\,dt + \int_0^T C_{ij}(t,T)\,dK_j(t).$$

然后证明

$$dK_j(t) = \frac{K_j(t)\sigma_j^L(t)}{1+\alpha_{j+1}L_j(t)}\left\{\left[\gamma_{kj}(t) - K_j(t)\sigma_j^L(t)\right]\,dt + dZ^k(t)\right\}.$$

运用“冻结”LIBOR 技巧，证明

$$dK_j(t) \approx \frac{K_j(0)\sigma_j^L(t)}{1+\alpha_{j+1}L_j(0)}\left[dZ^k(t) - \sum_{\ell=j}^{k} K_\ell(0)\sigma_\ell^L(t)\,dt\right], \quad j < k,$$

$$dK_j(t) \approx \frac{K_j(0)\sigma_j^L(t)}{1+\alpha_{j+1}L_j(0)}\left[dZ^k(t) + \sum_{\ell=j}^{j-1} K_\ell(0)\sigma_\ell^L(t)\,dt\right], \quad j > k.$$

8.34　考虑远期支付型互换提前实施，即每一个重置日也是交割日. 在 T_i 重置 LIBOR $L_i(t)$ 是为了决定 T_i 时的现金流. 假设 T_i 的付款用因子 $\dfrac{1}{1+\alpha_{i+1}L_i(T_i)}$ 贴现，因此，浮动现金流定义为

$$\frac{\alpha_{i+1}L_i(T_i)}{1+\alpha_{i+1}L_i(T_i)},$$

同时固定现金流为

$$-\frac{K\alpha_{i+1}}{1+\alpha_{i+1}L_i(T_i)},$$

其中 α_{i+1} 为 $(T_i, T_{i+1}]$ 内的换算因子. 证明远期支付型互换在 t 时刻的价值等于具有相同固定互换利率 K 的典型互换的价值.

8.35 考虑一个互换, 重置日是 $T_0, T_1, \cdots, T_{n-1}$, 付款日是 $T_1, T_2, \cdots, T_n$, 触发互换是这样一张协议, 当 $L_i(T_i) > K_i$ 时, 它的持有者进入了一张在剩下的时间段 $[T_i, T_n]$ 定义的固定互换利率为 K 的互换, 其中 K_i 为设定的日期 T_i 的触发值. 定义 i^* 为

$$i^* = \min_{1\leqslant m\leqslant n}\{m : L_m(t_m) > K_m\},$$

其中 T_{i^*} 为停时. 对于 $t < T_1$, 证明触发互换在 t 时刻的价值可以表示为

$$\begin{aligned}
V_{\text{trig}} = &\sum_{m=1}^{n-1} B(t, T_m) E^t_{Q^T_m}[\mathbf{1}_{\{i^*=m\}}] \\
&-\sum_{m=1}^{n-1} B(t, T_n) E^t_{Q^T_m}[\mathbf{1}_{\{i^*=m\}}] \\
&-\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=m}^{n-1} K\alpha_j B(t, T_{j+1}) E^t_{Q^T_{j+1}}[\mathbf{1}_{\{i^*=m\}}].
\end{aligned}$$

8.36 利用以下的关系:

$$dZ(t) = dZ^i(t) + \sigma_B(t, T_i)\,dt = dZ^k(t) + \sigma_B(t, T_k)\,dt$$

和

$$\sigma_B(t, T_i) - \sigma_B(t, T_{i+1}) = \frac{\alpha_{i+1}L_i(t)}{1+\alpha_{i+1}L_i(t)}\sigma_i^L(t, T),$$

证明式 (8.3.23) 中的结果.

8.37 假设把互换期权的定价公式记成

$$V(t; T_0, T_n, X) = N(d_1)[B(t, T_0) - B(t, T_n)] - \sum_{i=1}^{n} XN(d_2)\alpha_i B(t, T_i)$$

(见式 (8.4.9)), 这个表达式说明可以用不同到期日的贴现债券来为互换期权的对冲. 复制组合 $\Pi_s(t)$ 包括持有 $N(d_1)$ 个单位的 T_0 到期的债券, 卖空 $N(d_1)$ 个单位的 T_n 到期的债券和 $\alpha_i N(d_2)X$ 个单位的 $T_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 到期债的券. 假设波动率是确定的, 证明复制组合 $\Pi_s(t)$ 是自融资的.

提示: 检查下式是否成立

$$d\Pi_s(t) = N(d_1)\,dB(t,T_0) - N(d_1)\,dB(t,T_n) - \sum_{i=1}^{n} XN(d_2)\alpha_i\,dB(t,T_i).$$

8.38 考虑具有共同到期日 T_n 的远期互换利率 $K_t[T_i,T_n]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$. 想要在末期远期测度 Q_{T_n} 下描述 $K_t[T_i,T_n]$ 的动态过程. 因为 $K_t[T_i,T_n]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 实际上就是 $L_{n-1}(t)$, 有

$$\frac{dK_t[T_{n-1},T_n]}{K_t[T_{n-1},T_n]} = \frac{dL_{n-1}(t)}{L_{n-1}(t)} = \sigma^K_{n-1,n}(t)\,dZ_t^{T_n},$$

其中 $Z_t^{T_n}$ 为 Q_{T_n} 布朗运动. 推导以下关系式:

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{B}(t;T_{n-2},T_n)}{B(t,T_n)} =& \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}(1+\alpha_{n-2}K_t[T_{n-2},T_n]) \\ &+\alpha_n(1+\alpha_{n-1}K_t[T_{n-1},T_n])(1+\alpha_{n-2}K_t[T_{n-2},T_n]),\end{aligned}$$

证明

$$dK_t[T_{n-2},T_n] = \mu_{n-2}(t)\,dt + \sigma^K_{n-2,n}K_t[T_{n-2},T_n]\,dZ_t^{T_n},$$

其中

$$\widehat{B}(t;T_j,T_n) = \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i B(t,T_i), \quad j<n,$$

$$\mu_{n-2}(t) = -\frac{\alpha_n\sigma^K_{n-1,n}(t)K_t[T_{n-1},T_n]\alpha_{n-1}\sigma^K_{n-2,n}(t)K_t[T_{n-2},T_n]}{\alpha_{n-1}+\alpha_n\{1+\alpha_{n-1}K_t[T_{n-1},T_n]\}}.$$

一般地, 推导以下关系:

$$\frac{\widehat{B}(t;T_i,T_n)}{B(t,T_n)} = \alpha_i + \sum_{k=i+1}^{n}\alpha_k\prod_{j=i+1}^{k}(1+\alpha_j K_t[T_j,T_n]),$$
$$i = n-2, n-3, \cdots, 0,$$

请在末期远期测度 Q_{T_n}下描述动态过程 $K_t[T_i,T_n]$.

8.39 假设短期利率 r_t 由以下的 Vasicek 模型决定:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)\,dt + \rho\,dZ_t.$$

其中 Z_t 为风险中性测度 Q 下的布朗过程. 证明在以年金 $\widehat{B}(t;T_0,T_n)$ 为计价单位的互换测度 $Q_{S_{0,n}}$下, 互换利率 $K_t[T_0,T_n]$ 满足的随机微分方程为 (Schrager and Pelsser, 2006)

$$\frac{dK_t[T_0,T_n]}{K_t[T_0,T_n]} = \rho\frac{\partial K_t[T_0,T_n]}{\partial r_t}\,dZ_t^{0,n},$$

其中

$$\frac{\partial K_t[T_0,T_n]}{\partial r_t} = -b(t,T_0)D(t,T_0) + b(t,T_n)D(t,T_n) + K_t[T_0,T_n]\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b(t,T_i)D(t,T_n),$$

$$b(t,T) = \frac{1}{\alpha}[1-e^{-\alpha(T-t)}],$$

$$D(t,T_i) = \frac{B(t,T_i)}{\widehat{B}(t;T_0,T_n)}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

8.40 考虑一种固定期限互换 (CMS) 利率上限元, 它在付息日 T_p 的收益有如下形式:

$$\max(K_{T_0}[T_0,T_n]-s_{\text{cap}},0),$$

其中期限为 $\{T_0,\cdots,T_n\}$ 的票面互换利率在 T_0 设置, $T_p>T_0$, s_{cap} 为某个预设的常上限价值. 通常, $\{T_0,\cdots,T_{n-1}\}$ 是重置日, 此时确定相应的 LIBOR $\{L_0,\cdots,L_n\}$. 使用年金 $\widehat{B}(t;T_0,T_n)$ 作为计价单位, 证明 CMS 利率上限元在 t 时刻的价值为

$$V_{\text{CMS}}(t;T_0,T_n) = \widehat{B}(t;T_0,T_n)E^t_{Q_{s_{0,n}}}\left[\frac{\max(K_{T_0}[T_0,T_n]-s_{\text{cap}},0)B(T_0,T_p)}{\widehat{B}(T_0;T_0,T_n)}\right],$$

其中 $Q_{s_{0,n}}$ 为以年金作为计价单位的互换测度. 利用关系

$$E^t_{Q_{s_{0,n}}}\left[\frac{B(T_0,T_p)}{\widehat{B}(T_0;T_0,T_n)}\right] = \frac{B(t,T_p)}{\widehat{B}(t;T_0,T_n)},$$

将 $V_{\text{CMS}}(t;T_0,T_n)$ 表示为用欧式互换期权价格函数加上一个由于利率上限元在更大的日期 T_p 支付而造成的凸性调整项, 推导这个凸性调整.

8.41 在风险中性测度下, 假设本国利率 r_d 和外国利率 r_f 服从均值回归过程

$$dr_d = k_d(\mu_d - r_d)\,dt + \sigma_d\,dZ_d,$$

$$dr_f = k_f(\mu_f - r_f)\,dt + \sigma_f\,dZ_f,$$

汇率过程 X 服从

$$\frac{dX}{X} = (r_d - r_f)\,dt + \sigma_X\,dZ_X.$$

用 ρ_{df} 和 ρ_{fX} 分别表示本国利率和外国利率, 外国利率和汇率之间的相关系数. 取本金为单位 1, 假设在 T_1 支付的利息在 t 时刻已知, 证明在差分互换中基于外国 LIBOR 的所有未来利息在 t 时刻的现值总和为

$$
\begin{aligned}
V_f = & r_f(t)B_d(t,T_1) \\
& + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{B_d(t,T_{i+1})B_f(t,T_i)}{B_f(t,T_{i+1})}\exp\left(-b_i^{(1)}+b_i^{(2)}-b_i^{(3)}\right) - B_d(t,T_{i+1})\right], \\
& \qquad t < T_1,
\end{aligned}
$$

其中 $B_d(t,T_i)$ 和 $B_f(t,T_i)$ 分别为 T_i 到期的本国和外国贴现债券的价格, 并且

$$
\begin{aligned}
b_i^{(1)} = & \frac{\sigma_d\sigma_f\rho_{df}}{k_dk_f}\left\{\frac{1+e^{-k_f(T_{i+1}-t)}-e^{-k_f(T_i-t)}-e^{-k_f(T_{i+1}-T_i)}}{k_f}\right. \\
& + \frac{1}{k_d+k_f}\left[e^{-k_d(T_{i+1}-t)-k_f(T_i-t)}+e^{-(k_d+k_f)(T_{i+1}-T_i)}\right. \\
& \left.\left. - e^{-(k_d+k_f)(T_{i+1}-t)}-e^{-k_d(T_{i+1}-T_i)}\right]\right\}, \\
b_i^{(2)} = & \frac{\sigma_f^2}{k_f^3}\left[1-\frac{3}{2}e^{-k_f(T_{i+1}-T_i)}+e^{-k_f(T_{i+1}-t)}-e^{-k_f(T_i-t)}\right. \\
& \left. -\frac{1}{2}e^{-2k_f(T_{i+1}-t)}+\frac{1}{2}e^{-2k_f(T_{i+1}-T_i)}+\frac{1}{2}e^{-k_f(T_{i+1}+T_i-2t)}\right], \\
b_i^{(3)} = & \frac{\sigma_f\sigma_X\rho_{fX}}{k_f^2}\left[1-e^{-k_f(T_{i+1}-T_i)}+e^{-k_f(T_{i+1}-t)}-e^{-k_f(T_i-t)}\right].
\end{aligned}
$$

运用金融观点, 解释为什么在定价公式中引入了 ρ_{df} 和 ρ_{fX}, 以及即使本国和外国的远期利率相等, 此时它们完全相关, 但是差分互换仍然是有价值的.

8.42　一种差分互换可能涉及三种货币：利息由前两种货币的浮动 LIBOR 计算, 而实际的付款由第三种货币计价. 说明这种 3 货币差分互换可以分解成值涉及两种货币的标准差分互换的投资组合.

参考文献

Ahn, D.M.,Dittmar,R.f.,Gallant,A.R.,"Quadratic term structure models: Theory and evidence". *Review of Financial Studies*, vol. 15(2002) pp.243-288.

Andersen, L., Broadie, M., "A primal-dual simulation algorithm for pricing multi-dimensional American options," *Management Science*, vol. 50(9) (2004) pp.1222-1234.

Andreasen, J., "The pricing of discretely sampled Asian and lookback options: a change of numeraire approach," *Journal of Computational Finance*, vol. 2(1998) pp.5-30.

Babbs, S.H., Nowman, K.B., "Kalman Filtering of Generalized Vasicek Term Structure Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 34 (1999) pp.115-130.

Balduzzi, P., Das, S.R., Foresi,S.,Sundaram,R.K., " A simple approach to three-factor affine term structure models," *Journal of Fixed Income* , vol. 6(1996) pp.43-53.

Barber, J.R., "Bond option valuation for non-Markovian interest rate process," *Financial Review*, vol. 40(2005) pp.519-532.

Barone-Adesi, G., Whaley, R.E., "Efficient analytic approximation of American option values," *Journal of Finance*, vol. 42(2) (1987) pp.301-320.

Barraquand, J., Pudet,T., "Pricing of American path-dependent contingent claims," *Mathematical Finance*, vol. 6(1) (1996) pp.17-51.

Beaglehole, D.R., Tenney, M.S., "General solutions of some interest rate-contingent claim pricing equation," *Journal of Fixed Income*, 1(2) (l991) pp.69-83.

Bensaid, B., Lesne, J.P., Pages, H., and Scheinkman, J., "Derivative asset pricing with transaction costs," *Mathematical Finance*, vol. 2 (April 1992) pp.63-86.

Bingham, N.H., Kiesel,R., *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives*, Springer, Heidelberg, second edition (2004).

Black, F., "Fact and fantasy in the use of options," *Financial Analysts Journal*, vol. 31 (July 1975) pp.36-72.

Black, F., "The pricing of commodity contracts," *Journal of Financial Economics*, vol. 3 (1976) pp.167-179.

Black, F., "How we came up with the option formula," *Journal of Portfolio Management*, vol. 7 (Winter 1989) pp.4-8.

Black, F., Cox,J.C. "Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions," *Journal of Finance*, vol. 31 (May 1976) pp.351-367.

Black, F., Karasinski, P., "Bond and option pricing when short rates are lognormal," *Financial Analysts Journal* (July 1991) pp.52-59.

Black, F., Scholes, M., "The pricing of option and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, vol. 81 (1973) pp.637-659.

Black, F., Derman, E., Toy.W., "A one-factor model of interest rates and its application to Treasury bond options," *Finanical Analysts Journal* (Jan. 1990) pp.33-39.

Bouaziz, L., Briys, E., Crouhy., "The pricing of forward-starting Asian options," *Journal of Banking and Finance*, vol. 18 (1994) pp.823-839.

Boyle, P.P., "A lattice framework for option pricing with two state variables," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 23 (March 1988) pp.1-12.

Boyle, P.P., "New life forms on the option landscape," *Journal of Financial Engineering*, vol. 2(3) (1993) pp.217-252.

Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P., "Monte Carlo metho ds for security pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21 (June 1997) pp.1267-1321.

Boyle, P.P., Tian, Y., "An implicit finite difference approximation to the pricing of barrier options," *Applied Mathematical Finance*, vol. 5 (1998) pp.17-43.

Brace, A., Musiela, M., "A multifactor Gauss Markov implementation of Heath,Jarrow,and Morton," *Mathematical Finance*, vol. 4 (1994) pp.259-283.

Brace. A., Gatarek, D., Musiela, M., "The market model of interest rate dynamics," *Mathematical Finance*, vol. 7 (1997) pp.127-147.

Breeden, D., Litzenberger, R., "Prices of state-contingent claims implicit in option prices," *Journal of Business*, vol. 51 (1979) pp.621-651.

Brennan, M.J., Schwartz, E.S., "Finite difference method and jump processes arising in the pricing of contingent claims," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 13 (Sept., 1978) pp.461-474.

Brennan, M.J., Schwartz, E.S., "A continuous time approach to the pricing of bonds," *Journal of Banking and Finance*, vol. 3 (1979) pp.133-155.

Brennan, M.J., Schwartz, E.S., "Analyzing convertible bonds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 15 (Nov. 1980) pp.907-929.

Brenner, M., Courtadon, G., Subrahmanyan, M., "Options on the spot and options on futures," *Journal of Finance*, vol. 40 (Dec. 1985) pp.1303-1318.

Brigo, D., Limev, J., "On the distributional distance between the lognormal LIBOR and swap market models," *Quartitative Finance*, vol. 5(5) (2005) pp.433-442.

Broadie, M., Detemple, J., "American capped call options on dividend-paying assets," *Review of Financial Studies*, vol. 8 (1995) pp.161-191.

Broadie, M., Detemple, J., "American option valuation: new bounds, approximations, and a comparison of existing methods," *Review of Financial Studies*, vol. 9 (1996) pp.1211-1250.

Broadie, M., Glasserman, P., "Pricing American-style securities using simulation," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21 (1997) pp.1323-1352.

Broadie, M., Glasserman, P., Kou, S., "A continuity correction for discrete barrier option," *Mathematical Finance*, vol. 7 (1997), pp.325-349.

Broadie, M., Glasserman, P., Kou, S.G., "Connecting discrete and continuous path dependent options," *Finance and Stochastics*, vol. 3 (1999) pp.55-82.

Bunch, D.S., Johnson, H., "A simple and numerically efficient valuation method for American puts using a modified Geske-Johnson approach," *Journal of Finance*, vol. 47 (June 1992) pp.809-816.

Bunch, D.S., Johnson, H., "The American put option and its critical stock price," *Journal of Finance*, vol. 55(5) (2000) pp.2333-2356.

Cairns, A.J.G., *Interest rate models*, Princeton University Press, Princeton (2004).

Carr, P., Bandyopadhyay, A., "How to derive Black-Scholes equation correctly?" *Working paper of Banc of America Securities and University of Illinois* (2000).

Carr, P., Chesney, M., "American put call symmetry," *Working paper of Morgan Stanley and Groupe HEC* (1996).

Carr, P., Jarrow, R., Myneni, R., "Alternative characterizations of American put options," *Mathematical Finance*, vol. 2 (1992) pp.87-106.

Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A., Sanders, A.B., "An empirical comparison of alternative models of short-term interest rate," *Journal of Finance*, vol. 47 (July 1992) pp.1209-1227.

Chang, C.C., Chung, S.L.,Yu, M.T.,"Valuation and hedging of differential swaps," *Journal of Futures Market* , vol. 22 (2002) pp.73-94.

Chen, R. R., "Exact solutions for futures and European futures options on pure discount bonds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 27 (Mar. 1992) pp.97-107.

Chesney, M., Jeanblanc-Picqué, M., Yor, M., "Brownian excursions and Parisian barrier options," *Advances in Applied Probabilities*, vol. 29 (1997) pp.165-184.

Cheuk, T.H.F., Vorst, T.C.F., "Currency lookback options and observation frequency: a binomial approach," *Journal of International Money and Finance*, vol. 16 (No. 2 1997) pp.173-187.

Chiarella, C., Kwon, O.K, "Finite dimensional affine realizations of HJM models in terms of forward rates and yields," *Review of Derivatives Research*, vol. 6 (2003) pp.129-155.

Chu, C.C., Kwok, Y.K., "Reset and withdrawal rights in dynamic fund protection," *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 34(2) (2004) pp.273-295.

Chung, S.L.,Shackleton, M., Wojakowski, R., "Efficient quadratic approximation of floating strike Asian option values," *Finance*, vol. 24 (2003) pp.49-62.

Clement, E., Lamberton, D., Protter, P., "An analysis of a least squares regression algorithm for American option pricing," *Finance and Stochastic*, vol. 6 (2002) pp.449-471.

Conze, A., Viswanathan, "Path dependent options: the case of lookback options," *Journal of Finance*, vol. 46(5) (1991) pp.1893-1907.

Cox, D.R., Miller, H.D., *The theory of stochastic processes*, Chapman and Hall, London (1995).

Cox, J.C., Ross, S.A., "The valuation of options for alternative stochastic processes," *Journal of Financial Economics*, vol. 3 (1976) pp.145-166.

Cox, J.C., Ross, S., Rubinstein, M., "Option pricing: a simplified approach," *Journal of Financial Economics*, vol. 7 (Oct. 1979) pp.229-264.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E. Jr., Ross, S.A., "An analysis of variable rate loan contracts," *Journal of Finance*, vol. 35 (1980) pp.389-403.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E. Jr., Ross, S.A., "A theory of the term structure of interest rates," *Econometrica*, vol. 53 (March 1985) pp.385-407.

Curran, M., "Valuing Asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price," *Management Science*, vol. 40(12) (1994) pp.1705-1711.

Dai, M., Kwok, Y.K., "Knock-in American options," *Journal of Futures Markets*, vol. 24(2) (2004b) pp.179-192.

Dai, M., Kwok, Y.K., "American options with lookback payoff," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 66(1) (2005a) pp.206-227.

Dai, M., Kwok, Y.K., "Optimal policies of call with notice period requirement for American warrants and convertible bonds," *Asia Pacific Financial Markets*, vol. 12(4) (2005b) pp.353-373.

Dai, M., Kwok, Y.K., "Options with combined reset rights on strike and maturity," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 29 (2005a) pp.1495-1515.

Dai, M., Kwok, Y.K., "Characterization of optimal stopping regions of American Asian and lookback options," *Mathematical Finance*, vol. 16(1) (2006) pp.63-82.

Dai, M., Kwok, Y.K., "Optimal multiple stopping models of reload options anf shout options," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 32 (2008) pp.2269-2290.

Dai, M., Kwok, Y.K., Wu, L., "Options with multiple reset rights," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 6(6) (2003) pp.637-653.

Dai, M., Kwok, Y.K., Wu, L., "Optimal shouting policies of options with strike reset right," *Mathematical Finance*, vol. 14(3) (2004a) pp.383-401.

Dai, Q., Singleton, K.J., "Specification analysis of affine term structure models," *Journal of Finance*, vol. 55 (2000) pp.1943-1978.

Dai, M., Wong. H.Y., Kwok, Y.K., "Quanto lookback options," *Mathematical Finance*, vol. 14(3) (2004) pp.445-467.

Daniluk, A., Gatarek, D., "A fully lognormal LIBOR market model," *Risk*, (Sept.2005) pp.115-118.

Das, S.R., Foresi, S., "Exact solutions for bond and option prices with systematic jump risk," *Review of Derivatives Research*, vol. 1 (1996) pp.7-24.

Davis, M.H.A., Panas, V.G., Zariphopoulou, T., "European option pricing with transaction costs," *SIAM Journal of Control*, vol. 31 (1993) pp.470-493.

Dempster, M.A.H., Hutton, J.P., "Pricing American stock options by linear programming," *Mathematical Finance*, vol. 9 (1999) pp.229-254.

Derman, E., Kani, I., "Stochastic implied tress:Arbitrage pricing with stochastic term and

strike structure of volatility," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 1(1998) pp.61-110.

Dewynne, J.N., Howison, S.D., Rupf, I., Wilmott, P., "Some mathematical results in the pricing of American options," *European Journal of Applied Mathematics*, vol. 4 (1993) pp.381-398.

Dothan, U.L., "On the term structure of interest rate," *Journal of Financial Economics*, vol. 6 (1978) pp.59-69.

Duan, J., "The Garch option pricing model," *Mathematical Finance*, vol. 5 (1995) pp.13-32.

Duffie, D., Huang, C.F., "Implementing Arrow-Debreu equilibria by continuous trading of a few long-lived securities," *Econometrica*, vol. 53(6) (1985) pp.1337-1356.

Duffie, D., Kan, R., "A yield-factor model of interest rates," *Mathematical Finance*, vol. 6(4) (1996) pp.379-406.

Dupire,B., "Pricing with a smile," *Risk*, vol. 7(1) (Jan.1994) pp.18-20.

Eberlein, E., Kluge, W., "Valuation of floating range notes in Levy term structure models," *Mathematical Finance*, vol. 16(2) (2006) pp.237-254.

El-Karoui, N.,Geman, H., "A probabilistic approach to the valuation of floating rate notes with an application to interest rate swaps," *Advances in Options and Futures Research*, vol. 1 (1994) pp.41-64.

Evans, J.D., Kuske, R., Keller, J.B., "American options on assets with dividends near expiry," *Mathematical Finance*, vol. 12(3) (2002) pp.219-237.

Feller, W., "Two singular diffusion problems," *Annals of Mathematics*, vol. 54 (1951) pp.173-182.

Figlewski, S., Gao, B., "The adaptive mesh model: A new approach to efficient option pricing," *Journal of Financial Economics*, vol. 53 (1999) pp.313-351.

Fong, H.G., Vasicek, O.A., "Fixed-income volatility management," *Journal of Portfolio Management* (Summer 1991) pp.41-46.

Forsyth, P.A., Vetzal, K.R., "Quadratic convergence of a penalty method for valuing American options," *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 23 (2002) pp.2096-2123.

Forsyth, P.A., Vetzal, K.R., Zvan, R., "Convergence of lattice and PDE methods for valuing path dependent options using interpolation," *Review of Derivatives Research*, vol. 5 (2002) pp.273-314.

Fouque, J.P., Papanicolaou, G., Sircar, K.R., *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2000).

Fu, M.C., Laprise, S.C., Madan, D.B., Su, Y., Wu, R. "Pricing American options: a comparison of Monte Carlo simulation approaches," *Journal of Computational Finance*, vol. 4(3) (Spring 2001) pp.39-88.

Galluccio,S., Ly, J.M., "Theory and calibration of swap market models," *Mathematical Finance*, vol. 17 (Jan.2007) pp.111-141.

Gao, B., Huang, J.Z., Subrahmanyam, M., "The valuation of American barrier options using the decomposition technique," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 24 (11-12) (2000) pp.1783-1827.

Garman, M., "Recollection in tranquillity" in *From Black-Scholes to Black Holes: New Frontiers in Options*, Risk Magazine, Ltd, London (1992) pp.171-175.

Garman, M.B., Kohlhagen, S.W., "Foreign currency option values," *Journal of International Money and Finance*, vol. 2 (1983) pp.231-237.

Geman, H., El Karoui, N., Rochet, J.C., "Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing," *Journal of Applied Probability*, vol. 32 (1995) pp.443-458.

Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., "From perpetual strangles to Russian options," *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 15 (1994) pp.121-126.

Geske, R., " The valuation of compo und options," *Journal of Financial Economics*, vol. 7 (1979) pp.375-380.

Geske, R., Johnson,H.E., "The American put option valued analytically," *Journal of Finance* , vol. 39 (1984) pp.1511-1524.

Glasserman, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* Springer, New York (2004).

Glasserman, P., Yu, B.,"Number of path versus number of basis functions in American option pricing," *Annals of Applied Probability*, vol. 14(4) (2004) pp.2090-2119.

Goldman, M.B., Sosin, H.B., Gatto, M.A., "Path dependent options: buy at the low, sell at the high," *Journal of Finance*, vol. 34(5) (1979) pp.1111-1127.

Grannan, E.R., Swindle, G.H., "Minimizing transaction costs of option hedging strategies," *Mathematical Finance*, vol. 6 (Oct. 1996) pp.341-364.

Grant, D., Vora, G., Weeks, D.E., "Simulation and the early-exercise option problem," *Journal of Financial Engineering*, vol. 5(3) (1996) pp.211-227.

Harrison, J.M., Kreps, D.M., "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets," *Journal of Economic Theory*, vol. 20 (1979) pp.381-408.

Harrison, J.M., Pliska, S.R., "A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets," *Stochastic Processes and Their Applications,* vol. 15 (1983) pp.313-316.

He, H., Takahashi, A., "A variable reduction technique for pricing average-rate options," *International Review of Finance*, vol. 1(2) (2000) pp.123-142.

Heath, D., Jarrow, R., Morton, A., "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation," *Econometrica*, vol. 60 (Jan. 1992) pp.77-105.

Henderson, V., Wojakowski, R., "On the equivalence of floating and fixed-strike Asian options," *Journal of Applied Probability*, vol. 39 (2002) pp.391-394.

Henrard, M., " Explicit bond option and swaption formula in Heath-Jarrow-Morton one-factor models," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 6(1) (2003) pp.57-72.

Henrard, M., "Libor Market Model and Gaussian HJM explicit approaches to option on composition," *Working paper* (2005).

Heston, S.L., "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options," *Review of Financial Studies*, vol. 6 (1993) pp.327-343.

Heston, S., "Discrete-time versions of continuous-time interest rate models," *Journal of Fixed Income* (Sept. 1995) pp.86-88.

Heston, S., Zhou, G., "On the rate of convergence of discrete-time contingent claims," *Mathematical Finance*, vol. 10(1) (2000) pp.53-75.

Heynen, R., Kat, H., "Partial barrier options," *Journal of Financial Engineering*, vol. 3(3/4) (1994a) pp.253-274.

Heynen, R., Kat, H., "Selective memory," *Risk*, vol. 7 (Nov. 1994b) pp.73-76.

Heynen, R. C., Kat, H.M., "Lookback options with discrete and partial monitoring of the underlying price," *Applied Mathematical Finance*, vol. 2 (1995) pp.273-284.

Heynen, R. C., Kat, H.M., "Discrete partial barrier options with a moving barrier," *Journal of Financial Engineering*, vol. 5 (1996) pp.199-209.

Ho, T. S. Y., Lee, S. B., "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims," *Journal of Finance*, vol. 41 (Dec. 1986) pp.1011-1029.

Hodges, S.D., Neuberger, A.J., "Optimal replication of contingent claims under transaction costs," *Review of Futures Markets*, vol. 8 (1989) pp.222-239.

Hoogland, J., Neumann, C.D., "Asians and cash dividends: Exploiting symmetries in pricing theory," *Technical report of CWI* (2000).

Hsu, H., "Surprised parties," *Risk*, vol. 10 (Apr. 1997) pp.27-29.

Huang, J.Z., Subrahmanyam M.G., Yu, G.G., "Pricing and hedging American options: a recursive integration method," *Review of Financial Studies*, vol. 9(1) (1996) pp.277-300.

Hull, J.C., White, A., "The pricing of options on assets with stochastic volatilities," *Journal of Finance*, vol. 42 (June 1987) pp.281-300.

Hull, J., White, A., "The use of the control variate technique in option pricing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 23(3) (1988) pp.237-251.

Hull, J., White, A., "Pricing interest-rate-derivative securities," *Review of Financial Studies*, vol. 3 (No.4 1990) pp.573-592.

Hull, J., White, A., "Bond option pricing based on a model for the evolution of bond prices," *Advances in Futures and Options Research*, vol. 6 (1993b) pp.1-13.

Hull, J., White, A., "Efficient proced ures for valuing European and American path-dependent options," *Journal of Derivatives* (Fall 1993) pp.21-31.

Hull, J., White, A., "Numerical procedures for implementing term structure models I: single-factor models," *Journal of Derivatives* (Fall 1994) pp.7-16.

Hull, J., White, A., "Forward rate volatilities, swap rate volatilities, and the implementation

of the Libor market model," *Journal of Fixed Income*, vol. 10(3) (2000) pp.46-62.

Ikeda, M., "Default premiums and quality spread differentials in a stochastic interest rate economy," *Advances in Futures and Options Research*, vol. 8 (1995) pp.175-201.

Imai, J., Boyle, P., "Dynamics fund protection," *North American Actuarial Journal*, vol. 5(3) (2001) pp.31-49.

Inui, K., Kijima, M., "A Markovian framework in multi-factor Heath-Jarrow-Morton models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 33(3) (1998) pp.423-440.

Jacka, S.D., "Optimal stopping and the American put," *Mathematical Finance*, vol. 1 (April 1991) pp.1-14.

Jamshidian, F., "An exact bond option formula," *Journal of Finance*, vol. 44 (Mar. 1989) pp.205-209.

Jamshidian, F., "An analysis of American options," *Review of Futures Markets*, vol. 11(1) (1992) pp.72-82.

Jamshidian, F., "Hedging quantos, differential swaps and ratios," *Applied Mathematical Finance*, vol. 1 (1994) pp.1-20.

Jamshidian, F., "A simple class of square-root interest rate-models," *Applied Mathematical Finance*, vol. 2 (1995) pp.61-72.

Jamshidian, F., "Bond futures and option evaluation in the quadratic interest rate model," *Applied Mathematical Finance*, vol. 3 (1996) pp.93-115.

Jamshidian, F., "LIBOR and swap market models and measures," *Finance and Stochastics*, vol. 1 (1997) pp.293-330.

Jarrow, R., Rudd, A., "Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes," *Journal of Financial Economics*, vol. 10 (1982) pp.347-369.

Jarrow, R., Rudd, A., *Option Pricing*, Richard D. Irwin, Homewood (1983).

Jiang, L., Dai, M., "Convergence of binomial tree method for European/American path-dependent options," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 42(3) (2004) pp.1094-1109.

Johnson, H., Stulz, R., "The pricing of options with default risk," *Journal of Finance*, vol. 42 (June 1987) pp.267-280.

Ju, N., "Pricing an American option by approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function," *Review of Financial Studies*, vol. 11(3) (1998) pp.627-646.

Kamrad, B., Ritchken, P., "Multinomial approximating models for options with k state variables," *Management Science*, vol. 37 (Dec. 1991) pp.1640-1652.

Karatzas, I., "On the pricing of American options," *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 60 (1988) pp.37-60.

Karatzas, I., Shreve, S.E., *Brownian motion and stochastic calculus*, second edition, Springer-Verlag, New York (1991).

Kat, H., Verdonk, L., "Tree surgery," *Risk*, vol. 8 (Feb. 1995) pp.53-56.

Kemna, A.G.Z., Vorst, T.C.F., "A pricing method for options based on average asset values," *Journal of Banking and Finance*, vol. 14 (1990) pp.113-129.

Kevorkian, J., *Partial differential equations. Analytical solution techniques*, Brooks/Cole, Pacific Grove, California (1990).

Kijima, M., Nagayama, I., "Efficient numerical procedures for the Hull-White extended Vasicek model," *Journal of Financial Engineering*, vol. 3(3/4) (1994) pp.275-292.

Kijima, M., Suzuki, T., "A jump-diffusion model for pricing corporate debt securities in complex capital structure," *Quantitative Finance*, vol. 1 (2001) pp.1-10.

Kim, I. J., "The analytic valuation of American options," *Review of Financial Studies*, vol. 3(4) (1990) pp.547-572.

Kim, I.J., Byun, S.J., "Optimal exercise boundary in a binomial option pricing model," *Journal of Financial Engineering*, vol. 3 (1994) pp.137-158.

Kolkiewicz, A.W., "Pricing and hedging more general double-barrier options," *Journal of Computational Finance*, vol. 5(3) (2002) pp.1-26.

Krylov, N.V., *Controlled diffusion processes*, Springer, New York (1980).

Kunitomo, N., Ikeda, M., "Pricing options with curved boundaries," *Mathematical Finance*, vol. 2 (Oct. 1992) pp.275-298.

Kwok, Y.K., Lau, K.W., "Pricing algorithms for options with exotic path dependence," *Journal of Derivatives*, (Fall 2001a) pp.28-38.

Kwok, Y.K., Lau, K.W., "Accuracy and reliability considerations of option pricing algorithms," *Journal of Futures Markets*, vol. 21 (2001b) pp.875-903.

Kwok, Y.K., Wu, L; "Effects of callable feature on early exercise policy," *Review of Derivatives Research*, vol. 4 (2000) pp.189-211.

Kwok, Y.K., Wu, L., Yu, H., "Pricing multi-asset options with an external barrier," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 1(4) (1998) pp.523-541.

Kwok, Y.K., Wong, H.Y., Lau, K.W., "Pricing algorithms of multivariate path dependent options," *Journal of Complexity*, vol. 17 (2001) pp.773-794.

Lai, T.L., Wong, S., "Valuation of American options via basis functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49(3) (2004) pp.374-385.

Langetieg, T., "A multivariate model of the term structure," *Journal of Finance*, vol. 35 (March 1980) pp.71-97.

Lau, K.W., Kwok, Y.K., "Anatomy of option features in convertible bonds," *Journal of Futures Markets*, vol. 24(6) (2004) pp.513-532.

Leippold, M., Wu, L.,"Asset pricing under the quadratic class," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 37(2002) pp.271-295.

Leland, H.E., "Option pricing and replication with transaction costs," *Journal of Finance*, vol. 40 (Dec. 1985) pp.1283-1301.

LeRoy, S.F., Werner, J., *Principles of Financial Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2001).

Levy, E., "Pricing European average rate currency options," *Journal of International Money and Finance*, vol. 11 (1992) pp.474-491.

Levy, E., Mantion, F., "Discrete by nature," *Risk,* vol. 10 (Jan. 1997) pp.74-75.

Li, A, "The pricing of double barrier options and their variations," *Advances in Futures and Options Research*, vol. 10 (1999) pp.17-41.

Linetsky, V., "Step options," *Mathema tical Finance*, vol. 9 (Jan. 1999) pp.55-96.

Little, T., Pant, V., "A new integral representation of the early exercise boundary for American put options," *Journal of Computational Finance*, vol. 3(3) (2000) pp.73-96.

Lo, C.F., Yuen, P.H., Hui, C.H., "Pricing barrier options with square root process," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 4(5) (2002) pp.805-818.

Longstaff, F.A., Schwartz, E.S. "Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model," *Journal of Finance*, vol. 47 (Sept. 1992) pp.1259-1282.

Longstaff, F.A., Schwartz, E.S. "A simple appoach to valuing risky fixed and floating rate debt," *Journal of Finance*, vol. 50 (July 1995) pp.789-819.

Longstaff, F.A., Schwartz, E.S. "Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach," *Review of Financial Studies*, vol. 14 (2001) pp.113-147.

Luo, L.S.J., "Various types of double-barrier options," *Journal of Computational Finance*, vol. 4(3) (2001) pp.125-138.

MacMillan, L.W., "Analytic approximation for the American put option," *Advances in Futures and Options Research*, vol. 1 (Part A 1986) pp.119-139.

Maghsoodi, Y., "Solution of the extended CIR term structure and bond option valuation," *Mathematical Finance*, vol. 6(1) (1996) pp.89-109.

Manaster, S., Koehler, G., "The calculation of implied variances from the Black-Scholes model: a note," *Journal of Finance*, vol. 37 (March 1982) pp.227-230.

Margrabe, W., "The value of an option to exchange one asset for another," *Journal of Finance*, vol. 33 (March 1978) pp.177-186.

Merton, R.C., "Theory of rational option pricing," *Bell Journal of Economics and Management Sciences*, vol. 4 (Spring 1973) pp.141-183.

Merton, R.C., "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates," *Journal of Finance*, vol. 29 (1974) pp.449-470.

Merton, R.C., "Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous" *Journal of Financial Economics*, vol. 3 (March 1976) pp.125-144.

Milevsky, M.A S.E., Posner, S.E., "Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal Gamma distribution," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 33 (1998) pp.409-422.

Miltersen, K.R., Sandmann, K., Sondermann, D., "Closed form solutions for term struc-

ture derivatives with log-normal interest rates," *Journal of Finance*, vol. 52(1) (1997) pp.409-430.

Munk,C., "Stochastic duration and fast coupon bond option pricing in multi-factor models," *Review of Derivatives Research*, vol. 3 (1999) pp.157-181.

Myneni, R., "The pricing of the Americ an option," *Annals of Applied Probability*, vol. 2(1) (1992) pp.1-23.

Neuberger, A., "Option replication with transaction costs – an exact solution for the pure jump process," *Advances in Futures and Options Research*, vol. 7 (1994) pp.1-20.

Nielsen, J.A., Sandmann, K., "The pricing of Asian options under stochastic interest rates," *Applied Mathematical Finance*, vol. 3 (1996) pp.209-236.

Nielsen, J.A., Sandmann, K., "Pricing of Asian exchange rate options under stochastic interest rates as a sum of options," *Finance and Stochastic*, vol. 6 (2002) pp.355-370.

Nielsen, J.A., Sandmann, K., "Pricing bounds on Asian options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 38(2) (2003) pp.449-473.

Nunes, J.P.D., "Multifactor valuation of floating range note," *Mathematical Finance*, vol. 14(1) (2004) pp.79-97.

Paskov, S., Traub, J.F., "Faster valuation of financial derivatives," *Journal of Portfolio Management* (Fall 1995) pp.113-120.

Pelsser, A., "Pricing double barrier options using Laplace transforms," *Finance and Stochastics*, vol. 4 (2000) pp.95-104.

Pliska, S.R., *Introduction to mathematical finance*, Blackwell Publishers, Oxford, U.K. (1997).

Pooley, D.M., Vetzal, K.R., Forsyth, P.A., "Convergence remedies for non-smooth payoff in option pricing," *Journal of Computational Finance*, vol. 6 (Summer 2003) pp.25-40.

Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

Ramaswamy, K., Sundaresan, S.M., "The valuation of options on futures contracts," *Journal of Finance*, vol. 40 (Dec. 1985) pp.1319-1340.

Rich, D.R., "The mathematical foundations of barrier option-pricing theory," *Advances in Futures and Options Research*, vol. 7 (1994) pp.267-311.

Ritchken, P., Sankarasubramanian, L., "Volatility structures of forward rates and the dynamics of the term structure," *Mathematical Finance*, vol. 5(1) (1995) pp.55-72.

Roberts, G.O., Shortland, C.F., "Pricing barrier options with time-dependent coefficients," *Mathematical Finance*, vol. 7 (Jan. 1997) pp.83-93.

Rogers, L., Shi, Z., "The value of an Asian option," *Journal of Applied Probability*, vol. 32(4) (1995) pp.1077-1088.

Rossi, A., "The Britten-Jones and Neuberger smile-consistent with stochastic volatility

option pricing model: a further analysis," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 5(1) (2002) pp.1-31.

Rubinstein, M. "Options for the undecided," in *From Black-Scholes to Black-Holes: New Frontiers in Options*, Risk Magazine, Ltd, London (1992) pp.187-189.

Schaefer, S.M., Schwartz, E.S., "A two-factor model of the term structure: an approximate analytical solution," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* vol. 19 (Dec. 1984) pp.413-424.

Schlögl, E., "A multicurrency extension of the lognormal interest rate market models s," *Finance and Stochastics*, vol. 6 (2002) pp.173-196.

Schöbel, R., Zhu, J., "Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process:An extension," *European Finance Review.* vol. 3 (1999) pp.23-46.

Schrager, D.F., Pelsser, A.A., " Pricing swaptions and coupon bond options in affine term strucutre models," *Mathematical Finance*, vol. 16(4) (2006) pp.673-694.

Selby, M.J.P., Strickland, C. "Computing the Fong and Vasicek pure discount bond price formula," *Journal of Fixed Income* (Sept. 1995) pp.78-84.

Sepp, A., "Analytical pricing of double-barrier options under a double-exponential jump diffusion process: Applications of Laplace transform," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 7(2) (2004) pp.151-175.

Shepp, L., Shiryaev, A.N., "The Russian option: reduced regret," *Annals of Applied Probability*, vol. 3 (1993) pp.631-640.

Sidenius, J., "Double barrier options: valuation by path counting," *Journal of Computational Finance*, vol. 1 (1998) pp.63-79.

Singleton, K.J., Umantsev, L.,"Pricing coupon-bond options and swaptions in affine term structure models," *Mathematical Finance*, vol. 12(4) (2002) pp.427-446.

Smith, C.W.Jr., "Option pricing - a review," *Journal of Financial Economics*, vol. 3 (1976) pp.3-51.

Tavella, D., Randall, C., *Pricing Financial instruments: The Finite Difference Method,* John Wiley & Sons, New York (2000).

Thompson,G.W.P., "Fast narrow bounds on the value of Asian options," *working paper of University of Cambridge* (1999).

Tilley, J. A., "Valuing American options in a path simulation model," *Transactions of the Society of Actuaries*, vol. 45 (1993) pp.499-520.

Tsao, C.Y., Chang, C.C., Lin, C.G., "Analytic approximation formulae for pricing forward-starting Asian options," *Journal of Futures Markets*, vol. 23(5) (2003) pp.487-516.

Tsitsiklis, L., Van Roy, B., "Regression methods for pricing complex American style options," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 12 (2001) pp.694-703.

Vasicek, O., "An equilibrium characterization of the term structure," *Journal of Financial Economics*, vol. 5 (1977) pp.177-188.

Wei, J.Z., "Valuing differential swaps," *Journal of Derivatives*, (Spring 1994) pp.64-76.

Wei, J.Z., " A simple approach to bond option pricing," *Journal of Futures Markets*, vol. 17(2) (1997) pp.131-160.

Welch, R., Chen, D., "On the properties of the valuation formula for an unprotected American call option with known dividends and the computation of its implied standard derivation," *Advances in Futures and Options Research*, vol. 3 (1988) pp.237-256.

Whaley, R., "On the valuation of American call options on stocks with known dividends," *Journal of Financial Economics*, vol. 9 (1981) pp.207-211.

Whalley, E., Wilmott, P., "Counting the costs," *Risk*, vol. 6 (Oct. 1993) pp.59-66.

Wong, H.Y., Kwok, Y.K.,"Sub-replication and replenishing premium: Efficient pricing of multi-state lookbacks," *Review of Derivatives Research*, vol. 6 (2003b) pp.83-106.

Wu, L., Kwok, Y.K., "A front-fixing finite difference method for valuation of American options," *Journal of Financial Engineering*, vol. 6 (1997) pp.83-97.

Wu, L., Kwok, Y.K., Yu, H., "Asian options with the American early exercise feature," *International Journal of Theoretical and Applied Finance* , vol. 2 (1999) pp.101-111.

Xu, C., Kwok, Y.K., "Integral price formulas for lookback options," *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2005 (2) (2005) pp.117-125.

Zhang, P.G., "Flexible Asian options," *Journal of Financial Engineering*, vol. 3(1) (1994) pp.65-83.

Zhu, Y.L., Sun, Y., "The singularity-separating method for two-factor convertible bonds," *Journal of Computational Finance*, vol. 3 (1999) pp.91-110.

Zvan, R., Forsyth, P.A., Vetzal, K.R., "Robust numerical methods for PDE model of Asian options," *Journal of Computational Finance*, vol. 1 (Winter 1998) pp.39-78.

Zvan, R.,. Vetzal, K.R., Forsyth, P.A., "PDE methods for pricing barrier options," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 24 (2000) pp.1563-1590.

《现代数学译丛》已出版书目

（按出版时间排序）

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引　2007. 12 〔德〕Andreas Enge　著　吴　铤　董军武　王明强　译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价　2008. 1 〔美〕Steven Roman　著　邓欣雨　译
3 现代非参数统计　2008. 5 〔美〕Larry Wasserman　著　吴喜之　译
4 最优化问题的扰动分析　2008. 6 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro　著　张立卫　译
5 统计学完全教程　2008. 6 〔美〕Larry Wasserman　著　张　波　等译
6 应用偏微分方程　2008. 7 〔英〕John Ockendon, Sam Howison, Andrew Lacey & Alexander Movchan　著　谭永基　程　晋　蔡志杰　译
7 有向图的理论、算法及其应用　2009. 1 〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷　著　姚兵　张忠辅　译
8 微分方程的对称与积分方法　2009.1〔加〕乔治 W. 布卢曼　斯蒂芬 C. 安科　著　闫振亚　译
9 动力系统入门教程及最新发展概述　2009.8 〔美〕Boris Hasselblatt & Anatole Katok　著　朱玉峻　郑宏文　张金莲　阎欣华　译　胡虎翼　校
10 调和分析基础教程　2009.10 〔德〕Anton Deitmar 著　丁勇　译
11 应用分支理论基础　2009. 12 〔俄〕尤里・阿・库兹涅佐夫　著　金成桴　译
12 多尺度计算方法——均匀化及平均化　2010. 6　Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著　郑健龙　李友云　钱国平　译
13 最优可靠性设计：基础与应用　2011. 3 〔美〕Way Kuo, V. Rajendra Prasad, Frank A.Tillman, Ching-Lai Hwang 著　郭进利　闫春宁　译　史定华 校
14 非线性最优化基础　2011.4 〔日〕Masao Fukushima　著　林贵华　译
15 图像处理与分析：变分，PDE，小波及随机方法　2011.6　Tony F. Chan, Jianhong (Jackie) Shen 著　陈文斌，程晋　译
16 马氏过程　2011.6 〔日〕福岛正俊　竹田雅好　著　何萍　译　应坚刚　校

17 合作博弈理论模型 2011.7 〔罗〕Rodica Branzei 〔德〕Dinko Dimitrov 〔荷〕Stef Tijs 著 刘小冬 刘九强 译

18 变分分析与广义微分 I：基础理论 2011. 9 〔美〕Boris S. Mordukhovich 著 赵亚莉 王炳武 钱伟懿 译

19 随机微分方程导论与应用(第 6 版) 2012.4 〔挪〕Bernt Øksendal 著 刘金山 吴付科 译

20 金融衍生产品的数学模型 2012.4 郭宇权(Yue-Kuen Kwok) 著 张寄洲 边保军 徐承龙 等 译

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝金融衍生产品的数学模型
作者＝郭宇权著；张寄洲，边保军，徐承龙等译
页数＝４５０
出版社＝科学出版社
出版日期＝２０１２
ＳＳ号＝１２９５９９８６
ＤＸ号＝
ＵＲＬ＝ｈｔｔｐ：／／ｂｏｏｋ２．ｄｕｘｉｕ．ｃｏｍ／ｂｏｏｋＤｅｔａｉｌ．ｊｓｐ？ｄｘＮｕｍｂｅｒ＝＆ｄ＝２０４０１８３５０Ｅ１５３ＡＢＢ９Ｂ７３ＦＥＢＣ８２Ｂ５６７１５